MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉE 1809.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET PHYSIQUES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

10

ANNÉE 1809.

PARIS.

BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT DE FRANCE.

GARNERY, rue de Seine, ancien hôtel Mirabeau.

AOUT, M. DCCC. X.

Lettre à page 58

HISTOIRE

DE LA CLASSE DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

DE

L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

ANALYSE

Des travaux de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut, pendant l'année 1809.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

Par M. Delambre, secrétaire perpétuel.

On a vu dans l'histoire des travaux de la classe en 1808, avec quel succès nos grands géomètres ont su traiter une des questions les plus importantes et les plus difficiles de la physique céleste, la stabilité du système planétaire, et l'invariabilité des grands axes ou des mouvemens moyens.

Nous avons rendu compte du savant Mémoire, dans lequel M. Lagrange, envisageant la question sous le point de vue le plus général, avoit su triompher d'une difficulté qu'il avoit attaquée de front et avec les seules ressources de l'analyse. Sa solution étoit complète pour le problême qu'il avoit traité, mais elle étoit bornée à ce problême. Aujourd'hui il vient d'étendre à un système de corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque l'analyse qui lui a réussi pour les planètes. Le cas qu'il avoit envisagé d'abord n'est plus qu'un cas particulier d'une théorie qui peut s'appliquer à divers problêmes de mécanique. Ses formules ne se bornent plus à une loi unique, telle que celle de la pesanteur universelle; elles ne supposent plus les corps mus dans des sections coniques. Elles fournissent les moyens d'employer à d'autres recherches les mêmes procédés, dont les mouvemens des planètes lui ont suggéré la première idée.

Parmi les autres questions qu'on peut aborder au moyen de la nouvelle analyse, et qu'il ne sera donné qu'à peu de personne de prévoir et surtout de résoudre, l'auteur en indique une dès à présent, en nous annonçant qu'elle est encore plus difficile, qu'il s'en occupe et se propose d'en faire l'objet d'un autre Mémoire. C'est celle de la rotation des planètes autour de leur centre de gravité, en ayant égard à leur figure non sphérique et à l'attraction que les autres planètes exercent sur chacune de leurs molécules.

Dans le cours de ce travail, aussi long qu'épineux, l'auteur s'est aperçu qu'on pouvoit arriver plus directe-

ment à la principale formule et supprimer beaucoup d'opérations intermédiaires. Mais si le procédé est plus simple, moins laborieux, il exige aussi pour être bien saisi une conception plus forte; il peut laisser quelques doutes dans l'esprit du plus grand nombre des lecteurs; l'analyse entière préviendra ces doutes et empêchera les objections de naître.

A peine ce Mémoire étoit-il imprimé que l'auteur a remarqué qu'il étoit susceptible d'une simplification tout autrement importante que celles dont il avoit déjà averti.

« La formule qui renferme toute la théorie de la variation des constantes arbitraires, et à laquelle, dit » lui-même M. Lagrange, je ne suis arrivé que par une » analyse longue et compliquée, peut se déduire immédiatement des équations primitives, en sorte que le » Mémoire, présenté de cette manière, ne contiendroit » que deux ou trois pages. » Exemple frappant, à joindre à tant d'autres, qui nous ont fait voir qu'en géométrie la route par laquelle on arrive pour la première à une découverte difficile est rarement la plus courte. Les expressions algébriques ont une telle généralité, elles renferment tant de choses sous un petit nombre de symboles, que les plus grands analystes mêmes ne peuvent se flatter de démêler d'abord tout ce que renferme une formule, et c'est quand on en a trouvé par une autre voie les conséquences immédiates qu'on se reproche un défaut d'attention et qu'on s'étonne d'avoir été si près d'un théorême important sans même en soupçonner l'existence.

C'est le 13 mars 1809 que M. Lagrange lut à la classe le Mémoire dont nous venons de rendre compte; il y annonçoit des recherches sur la rotation qui se lioient à sa théorie; on ne sera donc pas étonné que, presque dans le même temps, M. Poisson ait présenté, comme suite à son propre travail sur les variations des élémens des planètes, un Mémoire sur la rotation de la terre. M. Lagrange nous a prévenus de l'excessive difficulté du problême; on s'étonnera peu qu'en le traitant, M. Poisson soit tombé sur des formules dont l'intégration absolue lui ait paru impraticable. Son objet étoit d'examiner l'influence des termes du second ordre dans l'expression de la vitesse de rotation de la terre. Ces termes naissent du développement en série de la fonction qui exprime la somme des produits de la masse de chaque corps attirant par celle du corps attiré, divisés par la distance mutuelle de ces corps, fonction si heureusement introduite dans ces recherches par M. Lagrange. Dans l'impossibilité d'évaluer tous ces termes, l'art est de mettre en évidence tous ceux qui peuvent mériter attention. M. Poisson examine d'abord s'il ne seroit pas permis de négliger même ceux qui dépendent du soleil, et il trouve qu'ils sont en effet toujours fort petits.

Dans des recherches aussi épineuses, on est toujours forcé de s'aider de quelque hypothèse. Pour ce qui concerne la figure de la terre, M. Poisson suppose que sans l'action du soleil et de la lune, la terre tourneroit rigoureusement autour de l'un de ses axes principaux. Pour

prouver la légitimité de son hypothèse, il remarque qu'elle est justifiée par l'état physique des choses, puisqu'on ne remarque dans les hauteurs du pôle, observées en divers lieux, aucune des oscillations qui résulteroient d'une hypothèse différente, oscillations dont la durée seroit d'une année environ.

Par des considérations du même genre, il parvient à écarter les termes relatifs aux deux autres axes principaux, lesquels ne pourroient jamais devenir sensibles que dans des hypothèses peu vraisemblables, et qui donneroient au mouvement de rotation de la terre des périodes dont la durée n'embrasseroit pas deux années et qu'on n'a jamais observées.

Il fait voir ensuite que, dans les approximations successives, les équations à intégrer conservent la même forme; il conclut : que l'axe instantané de rotation coïncidera toujours à très-peu près avec le plus petit axe principal de la terre, et que les pôles répondront en tout temps aux mêmes points de la surface; conclusion que M. Laplace avoit indiquée dans son exposition du système du monde.

Ainsi se trouve établi, d'une manière qui est au moins fort probable, un des résultats les plus importans pour l'astronomie-pratique, résultat supposé de tout temps par les astronomes qui n'ont jamais rien remarqué qui pût leur donner aucune crainte légitime à ce sujet, et qui, en dernière analyse, se trouve reposer sur leur témoignage. Mais ce point n'est pas le seul; nous pouvons admettre avec une certaine confiance que les latitudes

terrestres sont invariables ; en est-il de même de la rotation ? Cette seconde question est au moins aussi intéressante que la première. Les latitudes ne pourroient varier, au moins d'une manière qui méritât quelqu'attention, sans que les astronomes s'en aperçussent ; mais le mouvement de rotation qui est la mesure du temps sidéral est l'élément nécessaire de toutes nos observations, de tous nos calculs, jouit-il de toute l'uniformité qu'on a supposée de tout temps? Ses inégalités, si elles ne sont pas très-sensibles et d'une période assez courte, nous échapperoient éternellement et pourroient affecter jusqu'à un certain point toutes nos observations et les conséquences qui s'en déduisent.

M. Poisson trouve d'abord qu'il faudroit avoir égard aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices ; en les faisant passer successivement en revue il n'en trouve aucun qui puisse devenir sensible par les intégrations, et parvient à ce résultat que les astronomes avoient toujours supposé sans trop s'inquiéter d'une démonstration directe. Pour motiver leur conduite ils pouvoient alléguer l'impossibilité d'en suivre une autre, et le succès constant de la méthode qu'ils ont suivie en tout temps de supposer d'abord l'uniformité des mouvemens, de comparer les mouvemens réels à ces mouvemens hypothétiques, et de tirer de ces comparaisons multipliées, et la vitesse qu'auroient les mouvemens si réellement ils étoient uniformes, et la valeur précise des inégalités ; partageant ainsi le problème en deux parties, l'une qui est la recherche des constantes, et l'autre qui est celle

des variations, méthode que les géomètres suivent eux-mêmes, et sans laquelle les problêmes seroient insolubles.

Nous avons fait remarquer que, pour appuyer des hypothèses qui simplifient les formules, M. Poisson a fait valoir les observations astronomiques qui n'ont décélé aucune des oscillations qui seroient la suite nécessaire d'hypothèses différentes; mais si ces oscillations n'ont que peu d'étendue, est-il bien certain que les astronomes aient pu les apercevoir? Elles auroient des périodes les unes moindres que d'une année et les autres moindres que deux années. Pour ne parler que de la plus facile à reconnoître, l'oscillation du pôle et le changement des latitudes terrestres, supposons que cette oscillation soit de 1″, et que sa période soit de $\frac{m}{n}$ d'années; au bout de n années, nous aurons m périodes; le pôle sera revenu à sa place primitive, et dans l'intervalle, il aura décrit m cercles dont le rayon sera 1″; supposons, pour avoir un exemple sensible que le pôle en un an, au lieu de parcourir les 360° de son cercle, n'en parcoure que 350; et qu'à une époque, on ait observé la latitude de Paris, et qu'en vertu de l'oscillation qui aura été au *maximum* la latitude ait paru trop forte de 1″, l'erreur étant proportionnelle au cosinus de *o*; l'année suivante, à la même époque, l'erreur ne sera plus proportionnelle qu'au cosinus de 350°, puis 340. Au bout de 9 ans, elle sera nulle; au bout de 18 ans de 1″ dans le sens contraire : ainsi, au bout de 18 ans, on pourroit trouver une différence de 2″

sur la hauteur du pôle, en un lieu donné. Or, il seroit bien impossible qu'une inégalité si peu considérable, et d'une période aussi longue, fût remarquée par les astronomes, à moins qu'ils n'en fussent avertis expressément; enfin, si l'on vouloit montrer, par le fait, la probabilité d'une telle oscillation, ne pourroit-on pas dire que, par une suite assez nombreuse d'observations de la polaire en 1753, Bradley avoit trouvé 51° 28′ 41″ 5, pour la latitude, tandis que, par une suite plus nombreuse encore, il n'avoit *précédemment* trouvé que 51° 28′ 38″, et qu'il s'étoit arrêté à 39″ 5, qui tient à fort peu près le milieu entre toutes. On pourroit donc supposer une oscillation de 2″ avec une période assez courte; ou bien une oscillation plus grande dont on n'auroit observé qu'une partie. On sait de même que la latitude de l'Observatoire de Paris, a été trouvée de 48° 50′ 10″ pendant un temps, et de 50′ 14″ à plusieurs autres époques, par Lacaille, Cagnoli, Méchain et moi. On pourroit attribuer ces différences à des oscillations dont l'étendue seroit au moins de 2″, et la période d'environ 15 ans; en sorte qu'il y auroit eu 2 $\frac{1}{2}$ périodes entre Lacaille et Cagnoli, et une seule entre Cagnoli et nous. Il faut dire pourtant qu'ayant examiné en détail les observations de Bradley, pendant cinq années consécutives, je n'ai vu aucun vestige de ces oscillations; que s'il y en avoit une de 2″, elle pourroit se confondre souvent avec les erreurs de l'observation; que la différence de 3″ 5 entre les deux résultats de Bradley pourroit venir de ce qu'il avoit, dans l'intervalle, changé de quart de cercle, et surtout de ce que l'er-

reur de collimation qui pour l'ancien quart de cercle étoit de 1″74, et pour l'autre 8″ pourroit bien n'avoir pas été connue avec une précision suffisante, ce dont on a beaucoup d'exemples. Quoi qu'il en soit, pour le présent, on peut conjecturer que ces oscillations sont ou nulles ou petites, ainsi que l'a supposé M. Poisson avec tous les astronomes; mais on n'a pas, ce me semble, de véritables démonstrations, et la chose est assez importante pour mériter d'être vérifiée avec un instrument qui n'auroit pas à craindre d'erreur dans la ligne de collimation. Il suffiroit d'observer, pendant plusieurs années, avec le cercle de Borda, les hauteurs méridiennes de la polaire au-dessus et au-dessous du pôle, pendant les mois de décembre et de janvier. Il seroit bien difficile qu'une oscillation, ne fût-elle que de 2″, échappât à ces recherches. Nous aurions à l'analyse de M. Poisson l'obligation de savoir que la période n'est pas tout à fait d'un an; ce qui prouve que la latitude doit éprouver une variation graduelle, quand on observe toujours à la même époque; et le cercle de Borda fourniroit ce qui manque à la démonstration analytique pour être tout à fait rigoureuse.

Il est rare que la plus belle solution ne laisse rien à faire de plus à son auteur, ou à ceux qui traitent après lui le même sujet. L'attention fatiguée d'un grand effort a besoin de repos, et c'est en revenant sur son ouvrage qu'on aperçoit encore au-delà de ce qu'on avoit regardé comme le dernier terme où l'on pût atteindre. Nous avons parlé des simplifications successives aperçues par M. Lagrange. Du côté de la fécondité son analyse sem-

bloit ne rien laisser à désirer; mais les différentielles de ses constantes arbitraires entrent toutes à la fois dans chacune de ces équations finales qui ne donnent immédiatement que les expressions des coefficiens différentiels de la fonction des forces perturbatrices pris par rapport à ces constantes; il falloit avoir recours à l'élimination pour conclure les différentielles de celles-ci qui sont les véritables inconnues du problême. M. Poisson a voulu éviter cette opération subsidiaire en parvenant d'abord à l'expression de la différentielle de chaque constante arbitraire au moyen des coefficiens différentiels de la fonction des forces perturbatrices multipliées par des fonctions de ces constantes.

Il a pris pour base de ses recherches les équations générales de M. Lagrange; et par des idées qui lui sont propres et des différentiations ingénieusement combinées, il arrive à des équations que l'on peut regarder comme inverses de celles de M. Lagrange, puisqu'elles présentent isolément les quantités qui étoient combinées dans ces dernières et réciproquement. Toutes ces quantités ne montent qu'au premier degré dans les unes comme dans les autres, leurs multiplicateurs ne sont que des constantes; la forme du système d'équations trouvées par M. Poisson, a l'avantage de rendre les applications plus immédiates, il en présente particulièrement deux qui sont du plus grand intérêt.

La première a pour objet le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, suivant une fonction quelconque de la distance. Les variables peuvent être séparées dans

les équations du problême; mais la double intégration ne sauroit s'achever tant qu'on ne particularise pas la loi d'attraction. M. Poisson trouve encore des moyens d'éluder cette difficulté. Par un choix adroit des constantes arbitraires, il obtient des différentielles qui, se présentant sous une forme indépendante de la loi d'attraction, doivent s'accorder avec les différentielles des élémens des orbites elliptiques des planètes. C'est ce qui a lieu immédiatement à l'égard des formules données par M. Lagrange, et au moyen de quelques transformations par rapport à celles de M. Laplace.

Pour seconde application, M. Poisson choisit les équations du mouvement de rotation d'un corps qui n'est soumis à aucune force accélératrice.

Les expressions des six constantes arbitraires desquelles dépendent tous les coefficiens à calculer, sont absolument de même forme que les différentielles des constantes analogues dans la première application. L'auteur montre que cette similitude est due au choix qu'il a fait des constantes, et il termine son mémoire par cette conclusion vraiment remarquable :

Que les perturbations du mouvement de rotation des corps solides de figure quelconque dues à des forces d'attraction quelconques, dépendent des mêmes équations que les perturbations du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe; ainsi la précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre seront exprimées par les mêmes formules qui donnent les variations des élémens elliptiques des planètes.

Le peu que nous avons dit suffira pour faire regretter à nos lecteurs de ne pas trouver le mémoire de M. Poisson réuni dans le même volume, avec ceux de M. Lagrange, dont il s'est montré le digne continuateur.

Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies, par M. Legendre.

On vient de voir par un exemple bien digne de remarque, comment les points principaux du système du monde ont fourni aux plus grands géomètres, les occasions de perfectionner et d'étendre les moyens et les ressources de l'analyse. Le génie excité par une grande difficulté que présente une question intéressante, recueille toutes ses forces et crée des théories auxquelles peut-être il n'auroit jamais songé. Il n'en est pas moins vrai que la recherche de ces moyens nouveaux que chaque problême exige, et qu'on ne trouve pas toujours à point nommé, rallentissant le travail, font abandonner souvent des questions qu'on ne peut ramener à aucune méthode connue. On ne sauroit donc trop encourager les recherches de ces savans courageux, qui, par le simple amour de la science, s'attachent à des objets de pure spéculation, ajoutent à nos richesses et préparent des méthodes qui auront quelque jour leurs applications, quand bien même ces applications ne paroîtroient pas très-prochaines. Ces théories ont fait les principaux titres de gloire des Leibnitz, des Bernouilli, des Euler, des Lagrange, et c'est dans ce genre surtout que s'est distin-

gué M. Legendre quand il a traité des sphéroïdes, de la théorie des nombres et des transcendantes elliptiques, auxquelles se rapportent plus particulièrement les recherches que nous annonçons.

Euler, en plusieurs endroits de ses ouvrages, s'est occupé des diverses sortes d'intégrales définies. Les géomètres qui ont eu occasion de se servir de ses méthodes n'y avoient ajouté rien d'essentiel, et M. Legendre paroît être le premier qui ait donné quelques théorêmes nouveaux sur cette matière; mais comme ces théorêmes n'étoient pas l'objet principal qu'il eût alors en vue, il s'étoit presque contenté de les indiquer. Il a reconnu depuis que ses méthodes pouvoient se lier à d'autres de même genre; que de ce rapprochement il résultoit quelques théorêmes nouveaux, et des approximations d'un usage facile.

C'est cet ensemble qu'il a présenté dans un mémoire (lu le 13 novembre 1809). Dans l'impossibilité où nous sommes d'en donner ici un extrait détaillé qui nécessiteroit l'emploi continuel des symboles algébriques. nous nous bornerons à indiquer ce qui appartient plus spécialement à l'auteur, qui, pour se faire entendre, ayant dû reproduire les théorêmes d'Euler, avoit modestement laissé à son lecteur le soin de distinguer ce qu'il avoit ajouté lui-même aux idées de ce grand géomètre.

Ce mémoire sans division apparente contient cependant quatre parties.

Dans la première, qui traite des intégrales de la forme

$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, désignées par Euler par le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$, on peut regarder comme choses nouvelles l'expression générale des intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour une même valeur de n en fonction des auxiliaires de la forme $\frac{\text{[illegible]}}{n-1-a}$; la formule qui réduit le nombre des auxiliaires à moitié, dans le cas de n pair; enfin la valeur approchée de toute transcendance $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans le cas où p et q sont très-petits par rapport à n.

Dans la seconde, l'auteur prouve que le rapport des intégrales définies $\int \frac{x^{p-1}\,dx\,log.\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ est toujours donné par une fonction qui ne contient d'autres transcendances que des arcs de cercle et des logarithmes; ce qui généralise complètement le théorème d'Euler.

Dans la troisième, il fait voir que les intégrales successives $\int \frac{n^{p-1}\,dx\,log.^2\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, $\int \frac{x^{p-1}\,dx\,log.^3\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, etc. dépendent en général de la somme des termes pris de n en n dans la suite réciproque des puissances de degré n des nombres naturels. Ces sommes se déterminent pour chaque

valeur de π par la circonférence du cercle ou par quelques auxiliaires; et la meilleure méthode pour calculer celles qui ne sont pas déterminables exactement, est d'employer les suites demi-convergentes affectées des nombres bernoulliens, suivant les exemples donnés par Euler dans son *Calcul différentiel*.

A cette occasion, et plus particulièrement dans la quatrième partie, l'auteur explique avec détail, et d'une manière nouvelle, l'usage des suites demi-convergentes, c'est-à-dire qui ne sont convergentes que jusqu'à un certain terme, et qui deviennent ensuite divergentes. Il fait voir que ces suites, au moins dans l'espèce dont il s'agit, sont propres à donner tout le degré d'approximation qu'on peut désirer.

Dans la quatrième partie consacrée à l'intégrale $\int dx\left(log.\ \frac{1}{x}\right)^{m-1}$ prise entre les mêmes limites $x=0$ $x=1$ et désignée par $\Gamma\ (m)$, l'auteur fait voir comment les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\ (m)$ se déduisent l'une de l'autre; et comme les transcendantes $\Gamma\ (m)$ ne sont fonction que d'une seule variable, il s'attache particulièrement à leur détermination. Il prouve d'abord qu'il suffit de connoître la fonction $\Gamma\ (m)$ pour les valeurs de m, prises dans l'intervalle d'un quart d'unité; par exemple depuis $m=\frac{3}{4}$ jusqu'à $m=1$, il indique ensuite la méthode pour calculer directement chacune de ces quantités avec toute l'exactitude nécessaire. Cette partie est terminée par une table des valeurs de la transcendante $\Gamma\ (x)$

depuis $x = 1$ jusqu'a $x = \frac{1}{2}$, au moyen de laquelle on peut calculer très-promptement, non-seulement la valeur de cette transcendante pour toute valeur de x, mais même toutes les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ considérées dans la première partie.

De la libration de la lune, par M. Laplace et M. Bouvard.

On sait depuis long-temps que la Lune, dans sa révolution, tourne toujours la même face vers la terre : cette vérité étoit connue des anciens, et pour la découvrir, il suffisoit d'examiner avec quelque attention les taches de la Lune. Galilée le premier s'aperçut de quelques mouvemens qui couvroient et découvroient alternativement quelques petites taches situées vers les bords, et il donna une explication vraie d'une partie de ces mouvemens; Hevelius et quelques autres astronomes observèrent et mesurèrent avec plus de suite ces phénomènes. Mais Dominique Cassini fut le premier qui en conçut le mécanisme bien complet, et c'est une de ses plus belles découvertes. Mayer, dans un mémoire très-curieux, en donna des observations plus précises avec une meilleure méthode pour les calculer. Quant à la cause physique, elle fit le sujet d'un prix proposé par l'Académie des sciences, et remporté par M. Lagrange qui depuis l'exposa plus complètement encore dans un mémoire qui est au rang de ses plus belles productions. Lalande fit, vers 1764,

diverses observations qui confirmèrent les résultats de Mayer dont il adopta la méthode. Cette méthode n'étoit pourtant qu'approximative, et en l'examinant il y a plus de vingt-cinq ans, j'avois été surpris que l'auteur aussi bon géomètre qu'il étoit excellent astronome, ne se fût pas aperçu qu'en laissant aux formules toute leur généralité, on en pouvoit déduire une solution rigoureuse et qui réussiroit également bien, quelle que fût l'inclinaison de l'axe; au lieu que l'approximation de Mayer, qui, d'ailleurs, n'abrège en rien le calcul, cesseroit d'être suffisante pour une inclinaison double ou triple de celle de l'équateur lunaire. Je fis de cette remarque l'objet d'un mémoire que je remis à Lalande, et dont il fait mention dans les additions à la troisième édition de son Astronomie, tom. III, page 736. J'ai exposé cette méthode dans mes cours au collège de France, mais je n'ai fait aucune observation pour constater un phénomène avéré et parfaitement démontré. Il n'est pourtant pas inutile de le vérifier de temps à autre, ne fût-ce que pour voir s'il n'offriroit pas à la longue quelque anomalie qui auroit échappé à l'analyse : c'est ce qu'ont senti MM. Laplace et Bouvard qui en ont fait le sujet de deux mémoires qu'ils ont lus à la classe, mais qu'ils n'ont pas encore déposés au sécrétariat. Tout ce qu'il est possible d'en dire ici de souvenir, c'est que M. Bouvard a de son côté fait la remarque qu'il n'étoit nul besoin de recourir aux approximations; que sa méthode, quoique différente de la mienne, est également rigoureuse et directe, et ce qui est plus important, que ses résultats sont parfaite-

ment d'accord avec ceux de Mayer, et c'est une nouvelle preuve de l'habileté de ce grand astronome; car Mayer n'avoit que les instrumens les plus médiocres, et M. Bouvard avoit l'avantage d'employer un bel équatorial de Bellet qui lui fournissoit les moyens de mettre dans ses observations une précision plus grande et plus certaine. Ajoutons enfin que ces observations sont aussi bien plus nombreuses, et qu'elles ont pleinement confirmé la théorie.

Formules générales pour les perturbations des ordres supérieurs, par M. Burckhardt.

Ce Mémoire a été lu le 29 août 1808, et nous avions omis d'en parler il y a un an, parce que nous ne l'avions pas entre les mains. Il étoit d'une date plus ancienne encore et qui remonte à 1803. L'auteur en avoit égaré le manuscrit, en le refaisant il y a inséré quelques développemens ultérieurs qu'il a soin d'indiquer.

Ce nouveau Mémoire contient les perturbations des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres. Les termes dépendans des inclinaisons y manquent, parce que l'auteur a trouvé qu'ils étoient sujets à quelque embarras, et il avoit proposé d'employer dans l'approximation, les sinus verses au lieu des tangentes, et il n'a pas encore eu le loisir de suivre cette idée.

Tous ceux qui ont essayé d'appliquer à certaines planètes les formules générales des géomètres, ont pu juger par expérience combien ces développemens sont embar-

rassans par la complication des facteurs. Il est presque impossible que l'attention venant à se lasser il ne se glisse quelque erreur, et l'on auroit besoin d'équations de condition qui donnassent les rapports des différens termes, afin qu'on pût les vérifier les uns par les autres : c'est à quoi s'est appliqué M. Burckhardt. Il donne d'abord un théorême pour ramener à la théorie de la planète troublante, les différentielles qu'on auroit calculées pour la planète troublée, parce que ces changemens sont continuels dans ces sortes de calculs. Il a reconnu par le fait que les coefficiens de certains termes du troisième ordre ont les troisièmes différences égales au cube de 3; ceux du quatrième ordre, les quatrièmes différences égales à la quatrième puissance de 4; ceux du cinquième, aux cinquièmes puissances de 5, et qu'en général on arrive a des différences constantes. Il en fournit les exemples. Les termes qui résultent d'une manière constante et uniforme de l'addition des angles, lui ont offert une marche bien plus régulière que ceux qui sont formés par l'addition et la soustraction ; mais il ne croit pas impossible que ces termes, si on les rangeoit dans un autre ordre, ne présentassent plus de facilités à découvrir la loi de leurs accroissemens.

Dans la seconde partie l'auteur a réuni les perturbations des ordres supérieurs qui ressemblent et peuvent se réunir à ceux des ordres précédens.

La troisième partie contient les termes séparés qui résultent de l'équation (7), n°. 46, liv. II de la mécanique céleste.

Mémoire sur plusieurs moyens propres à perfectionner les tables de la lune, par le même.

Ce Mémoire, lu le 30 janvier 1809, a été joint au précédent, et termine le volume de 1808, qui va paroître.

On sait que la théorie n'a pu ou n'a osé entreprendre les calculs nécessaires pour déterminer les coefficiens des diverses inégalités de la lune, on a préféré de les tirer de l'observation.

La méthode qu'on suit dans ces recherches, est de laisser dans la formule de la longitude ou de la latitude de la lune sous forme indéterminée, tous les coefficiens inconnus en les multipliant par la fraction qui exprime le sinus ou le cosinus de l'argument duquel dépend l'inégalité. On réunit en une masse toutes les équations où le même coefficient a les plus forts multiplicateurs positifs, on fait une autre somme où ce même coefficient a les plus forts cofacteurs négatifs, et de cette comparaison résulte la valeur la plus probable du coefficient inconnu, celle qui satisfait le mieux aux observations. Cette méthode, qui a dû être celle de Mayer et Mason, a depuis été suivie par M. Bürg, et tous ceux qui ont calculé les tables depuis vingt ans.

Cette méthode est facile et n'offre d'autre inconvénient que la longueur des calculs quand on prend les observations par milliers, comme il le faudroit si l'on vouloit déterminer les coefficiens des égalités que leur petitesse

a fait négliger dans la théorie de la lune. M. Burckhardt nous offre aujourd'hui un moyen bien simple pour abréger ces calculs, puisqu'il dispenseroit de calculer et de sommer tous ces sinus de l'argument.

Concevez une série de sinus d'arcs qui forment une progression arithmétique décroissante depuis 90° jusqu'à 90° moins une limite donnée y. M. Burckhardt a trouvé qu'on auroit assez exactement la valeur du coefficient cherché, en employant au lieu du sinus moyen arithmétique le sinus de y divisé par l'arc y. D'après cette idée, il expose les règles à suivre dans ces recherches où l'on est exposé au désagrément de trouver, après bien des calculs, que l'inégalité qu'on cherchoit est nulle ou tout-à-fait insensible.

Pour essai de sa méthode, M. Burckhardt a choisi parmi treize cents observations de M. Maskeline, et s'est proposé de déterminer une inégalité qui auroit pour argument l'anomalie moyenne de la lune, augmentée de l'argument qui règle l'inégalité dont la période est de cent quatre-vingts ans. Neuf cents observations lui ont donné 4″7 pour coefficient. Il désire qu'on s'assure par de nouvelles recherches de la bonté d'une équation qui mériteroit si bien d'entrer dans les tables.

Mayer a remarqué qu'on diminuoit considérablement le nombre des équations en employant dans la formation de tous les argumens le lieu vrai du soleil, et dans ceux des principales inégalités le lieu de la lune, corrigé successivement par toutes les inégalités précédentes; mais il en résulte cet inconvénient qu'on ne peut renfermer

les argumens transformés dans les tables; que leur formation reste à faire au calculateur; ce qui augmente considérablement le travail pour ceux qui composent des éphémérides, sans parler de la chance des erreurs que cet arrangement augmente sensiblement. Aussi Lambert et Schulze avoient-ils essayé de ramener les tables de Mayer à leur forme primitive et moyenne; mais ils avoient considérablement augmenté le nombre des équations; et ils en avoient négligé d'autres qui pouvoient assez souvent produire des erreurs de plusieurs secondes. Quand je fus chargé de diriger les calculs de la connoissance des temps, j'avois cherché à diminuer le travail en ramenant aux mouvemens moyens toutes les inégalités, à la réserve de l'équation du centre de la variation et la réduction à l'écliptique que je corrigeois à l'ordinaire; mais quoique j'y trouvasse un avantage sensible, la crainte de dérouter les calculateurs en changeant leurs habitudes, et la nécessité de calculer de nouveau les tables de la lune presque en entier, me fit ajourner l'exécution de ce projet. M. Burckhardt conçut, de son côté, le même dessein qu'il produit aujourd'hui sur un plan un peu différent; il propose d'employer au calcul de l'évection le lieu corrigé de la lune. Les quatre derniers argumens seront les seuls qui aient besoin d'être corrigés à la manière ordinaire, et cette correction sera bien facile, il suffira d'appliquer la somme simple ou double des petites équations. Dans cette forme il ne lui faut que cinq équations de plus que dans les tables ordinaires, en sorte que nous différons seulement sur l'ar-

gument de l'évection dans lequel je n'employois, comme Mayer, que les moyens mouvemens de la lune, et que je corrigeois seulement de la double équation du soleil. De cette manière nous pouvons n'employer dans presque tous les argumens que la division décimale du cercle comme dans toutes les autres tables modernes; ce qui est déjà un avantage très-précieux. M. Burckhardt a donné sa formule où l'on voit en effet que ses équations nouvelles ont pour la plupart des coefficiens fort petits. Il restoit à donner aux tables la nouvelle forme qui doit abréger les calculs sans leur rien ôter de leur précision. M. Burckhardt a lui même entrepris ce travail et nous avons la satisfaction d'annoncer qu'il l'a presque entièrement achevé.

M. Burckhardt termine son Mémoire par l'examen d'un cas qui peut se rencontrer, et auquel je n'ai pas vu que ces tables donnassent lieu. Supposons deux équations dont les coefficiens soient presque égaux, que la longitude du soleil entre dans l'argument de l'un, et que l'argument du second, tout pareil d'ailleurs, emploie l'anomalie moyenne au lieu de la longitude. On pourra réunir ces deux équations en une seule qui aura pour argument l'angle commun aux deux équations, plus l'anomalie moyenne, plus un angle constant qui différera peu de 45°. Dans ce cas, si l'on vouloit déterminer les deux coefficiens partiels par l'observation de l'inégalité composée, on pourroit se tromper sensiblement sur le lieu du maximum, et les coefficiens ne pourroient être déterminés avec exactitude. M. Burckhardt pense que, dans

ce cas, on fera mieux de supposer d'abord l'angle constant de 45° juste, sauf à le faire varier ensuite par divers essais, pour reconnoître la valeur qui satisferoit mieux aux observations.

Comète DE HALLEY.

Dans un autre Mémoire lu le 10 juillet, le même astronome a calculé les perturbations de la comète de Halley qui a reparu en 1759, et qui est attendue vers 1735. Il a trouvé que l'attraction de la terre aura changé de seize jours la durée de la révolution.

Manières d'orienter une chaîne de triangles.

M. Burckhardt, qui a formé le projet d'une grande opération géodésique pour joindre des observatoires très-différens en longitude, a senti combien une détermination exacte des azimuts importoit à la réussite de son projet, et il a examiné les avantages et les inconvéniens particuliers à chacune des méthodes connues.

Celle à laquelle on accorde communément plus de confiance est une mire placée dans le méridien, au moyen d'un instrument des passages. Mais pour placer cette mire par les étoiles circonpolaires, il faut beaucoup de temps et une excellente pendule, ce qui ne se peut guères que dans les observatoires fixes. On peut y employer deux étoiles très-différentes en déclinaison comme la Chèvre et Rigel. J'ai donné pour ce cas des formules commodes, et elles m'ont constamment réussi; mais on peut dire que l'exactitude qui est suffisante pour obtenir

les ascensions droites des étoiles et des planètes par leurs passages observés, pourroit très-bien ne l'être pas assez pour avoir les azimuts avec la dernière précision. D'ailleurs, les lunettes méridiennes qu'on peut porter en voyage n'ont presque jamais ni les dimensions ni la parfaite exécution de celles des observatoires en règle. L'axe optique peut n'être pas parfaitement perpendiculaire à l'axe de rotation. Celui-ci peut avoir une légère inclinaison. On se rassure à cet égard, quand différentes étoiles connues passent à la lunette à des intervalles exactement égaux à leurs différences d'ascension droite, et l'on suppose que la lunette n'a aucune déviation; mais j'ai prouvé dans la connoissance des temps de 1810, que si la déviation et l'inclinaison de l'axe de rotation sont entre elles dans le rapport du sinus au cosinus de la latitude du lieu, la lunette décrira un cercle horaire; les différences observées d'ascension droite seront exactes; mais le point où la lunette coupera l'horizon ne sera pas dans le méridien, et l'erreur se portera en entier sur l'azimut. Il n'est pas même nécessaire que ce rapport soit rigoureusement exact, il suffit qu'il soit approché; les erreurs seront insensibles sur les différences d'ascension droite; on les attribuera à la petite incertitude de chaque observation, et celle de l'azimut, pour être ignorée, n'en sera pas moins réelle. Je passe sous silence d'autres causes d'erreurs exposées par M. Burckhardt, et je pense avec lui que cette recherche est certainement l'une des plus délicates, et peut-être la plus difficile de toute l'astronomie. Quand le major général Roy voulut orienter la

chaîne de triangle entre Greenwich et Dunkerque, il fit élever à grands frais un échafaud au-dessus de l'instrument des passages de l'observatoire; il ne négligea rien pour mettre le centre de son théodolite dans la même ligne verticale que celui de la lunette méridienne pour profiter de la mire établie avec tant de soins et vérifiée tant de fois, et avec toutes ces attentions, il seroit peut-être téméraire de répondre de son azimut à 3 ou 4″ près de degré.

M. le baron de Zach a imaginé de placer des globes de verre dans la direction présumée du méridien, de prendre avec un sextant des distances orientales et occidentales du soleil à ces globes, pour en conclure de combien chacun s'écarte du méridien vrai; après quoi rien de plus facile que de placer exactement la mire. Ce procédé est ingénieux, et je l'ai mis en formules qu'on peut réduire en tables de même genre à peu près que celle qui est connue sous le nom d'équation du midi ou des hauteurs correspondantes. M. de Zach a trouvé de cette manière la même direction que celle qui lui étoit indiquée par le bel instrument des passages de son observatoire de Seeberg; mais j'ai peine à croire que ce moyen soit plus précis que celui du général Roy.

Un instrument vertical et azimutal tel que celui de Palerme, n'est guère de ceux qu'un voyageur traîne à sa suite. Nous sommes donc dispensés d'examiner si cet instrument donneroit la précision désirée, ce que M. Burckhardt paroît révoquer en doute. Il reste donc les distances du soleil ou d'une étoile connue à un objet

terrestre. L'observation est assez facile, et peut se varier, et surtout se répéter de manière à rendre les erreurs insensibles; mais il faut une connoissance parfaitement exacte de l'angle horaire, et par conséquent une pendule excellente et bien réglée, soit par les hauteurs absolues, soit par les hauteurs correspondantes. Or nous avouerons qu'aucune de ces deux manières ne nous paroît susceptible de la précision de 2 à 3″ de degré pour l'azimut.

M. Burckhardt examine lequel on doit préférer du soleil ou de l'étoile polaire. J'ai moi-même discuté cette question dans le second volume de la base du système métrique décimal; il m'a paru que tout étoit assez égal de part et d'autre, et que le soleil étoit infiniment plus commode. Au reste, cette question étoit bien moins intéressante dans la mesure d'un arc du méridien, et nous nous rangerions volontiers à l'avis de M. Burckhardt, qui paroît donner la préférence à la polaire dans ses digressions comparées à une mire placée dans le premier vertical. Ces attentions contribueroient puissamment à l'exactitude demandée ; et nous n'aurions qu'une crainte, c'est qu'elle ne fussent pas toujours au pouvoir de l'astronome voyageur, qui seroit obligé d'établir son observatoire sur une montagne éloignée de toute habitation.

Le Mémoire est terminé par des renseignemens sur la manière de faire les observations avec le cercle de Borda, et par les formules différentielles qui expriment les effets des différentes erreurs qu'on peut craindre. On trouvera des recherches pareilles dans l'ouvrage cité plus haut. Nos formules mènent aux mêmes conséquences. J'ai de

plus fait entrer dans le calcul la réfraction terrestre de la mire ; mais l'erreur qui en provient est nulle, si la mire est dans l'horizon.

Pour terminer la notice des travaux de M. Burckhardt, j'ajouterai qu'il a déterminé avec deux différentes aiguilles l'inclinaison de l'aiguille aimantée. La première a donné 68° 47′ 1″, l'autre 68° 47′ 4″, les 10 et 20 août 1809. M. Gay-Lussac avoit fait vers le même temps des observations pareilles avec une autre boussole, mais comme son inclinaison différoit de quelques minutes de celle de M. Burckhardt, les deux observateurs sont convenus de multiplier les épreuves, pour démêler, s'il est possible, la cause de la différence. On sait d'ailleurs combien ces observations sont délicates.

Longueur du pendule.

M. Biot a lu une note sur les observations du pendule faites aux deux extrémités de la méridienne, c'est-à-dire à Formentera, et à Dunkerque, en société avec MM. Arago et Mathieu, et sur l'aplatissement qui en résulte. Cette note ne nous ayant pas été remise, nous nous bornerons à dire que toutes ces observations présentent l'accord le plus étonnant avec celles qui ont été faites à Bordeaux, à Figeac, à Paris, par les mêmes observateurs et Borda, et qu'elles donnent un applatissement très-peu différent de $\frac{1}{308}$ que j'ai trouvé par la comparaison de notre arc avec celui du Pérou.

M. Biot a lu dans la séance publique de janvier 1810

un Mémoire où il a rendu compte de ses travaux et de ceux de M. Arago pour la prolongation de la méridienne. (Voyez à la suite de l'histoire).

Mesure des hauteurs à l'aide du baromètre.

On se souvient avec quelle attention scrupuleuse M. Ramond a répété, varié et combiné les observations barométriques à l'aide desquelles il a modifié le coefficient de la formule barométrique de M. Laplace. M. de Prony a pensé que ce coefficient étoit trop fort dans les petites hauteurs auxquelles le coefficient primitif convenoit beaucoup mieux. Il s'appuyoit sur l'expérience qu'il avoit faite au Mont-Cenis. Cette remarque de M. de Prony a engagé M. Ramond dans un fort grand travail, dont il nous a communiqué les résultats le 26 juin. Pour lever toute incertitude sur la bonté de son coefficient pour les hauteurs médiocres, il a pris le parti de mesurer un assez grand nombre de fois la hauteur de plusieurs points situés aux environs de Clermont-Ferrand. M. de Cournon, ingénieur en chef, a bien voulu se charger de déterminer par des nivellemens séparés les hauteurs des mêmes points. Avant de se communiquer les résultats des deux méthodes, les observateurs les ont fait constater de la manière la plus authentique. La conclusion a été que, sur les hauteurs de six points divers déterminées par quarante-huit observations barométriques, les différences n'ont monté qu'une fois à $\frac{3}{4}$ de mètre, deux fois à $\frac{1}{2}$, et deux fois a $\frac{1}{20}$; que les écarts autour de la moyenne ne passent guères deux mètres dans

les quarante-huit observations auxquelles on doit ajouter confiance. Pour en trouver de 4 mètres, il faut aller rechercher cinq observations si suspectes, que M. Ramond a cru devoir les rejeter. Les six hauteurs étoient entre 300 et 600 mètres. Il en conclut que le coefficient corrigé n'est pas moins exact pour les médiocres différences de niveau qu'il ne l'a paru pour les hauteurs plus considérables. Il resteroit donc à montrer la raison qui a fait trouver une erreur sensible sur la hauteur du Mont-Cenis. M. Ramond expose à ce sujet ses conjectures. Il suppose que le mercure devoit être trop bas dans le baromètre supérieur, et la preuve qu'il en apporte c'est que l'élévation du mercure observée au haut du Mont-Cenis, combinée avec la hauteur qu'il affecte aux bords de la mer du sud, donne précisément la hauteur que M. de Saussure assigne à cette montagne. Or, on sait qu'aux bords de la mer du sud le baromètre se tient environ trois-millimètres plus bas qu'aux bords de nos mers. De plus, Saussure n'employoit dans ces comparaisons que les hauteurs observées dans nos régions. Ainsi, pour que l'observation de M. de Prony s'accordât à donner au Mont-Cenis la hauteur qu'il lui donne en effet, il faut que son baromètre se soit tenu trop bas et fort au-dessous de la moyenne hauteur qu'il affecte dans ces montagnes. Si l'on compare l'élévation de ce baromètre aux hauteurs simultanées observées à Paris et à Clermont, on trouvera, sur la hauteur de la station, une erreur d'une centaine de mètres ou plus. Donc, conclut M. Ramond, l'erreur du baromètre est un pur accident qui ne prouve

rien contre le coefficient. Mais quelle peut être la cause de cet accident? c'est ce que ne prétend pas décider M. Ramond, puisqu'il ne connoît ni l'instrument, ni les lieux, ni les accessoires de l'observation.

M. de Prony présent à la lecture du mémoire de M. Ramond, a remarqué que la hauteur du Mont-Cenis, déduite d'une observation effective du baromètre, comparée à l'élévation moyenne que le mercure affecte sur les bords de la mer du sud, laissoit trop d'incertitude pour être opposée à deux faits bien constatés.

M. de Prony a voulu déterminer la hauteur du Mont-Cenis, au-dessus de Lans-le-Bourg, par une observation barométrique. Les nivellemens du Mont-Cenis ont été faits directement et avec les instrumens destinés à cet usage, par M. Daune, l'un de nos ingénieurs les plus habiles et les plus soigneux. Ils ont été ensuite répétés avec les mêmes instrumens, pendant la construction de la route; ils ont servi de base au règlement des pentes. La nature de ce travail nécessitoit des vérifications multipliées, et il n'existe pas dans les ponts et chaussées de différence de niveau mieux constatée que celle de Lans-le-Bourg et du col du Mont-Cenis.

Le résultat de l'observation barométrique s'est trouvé parfaitement conforme avec celui du nivellement; la construction de l'instrument et la manière d'observer semblent garantir de toute erreur: on est resté tout le temps nécessaire pour que le mercure ait pris la température de l'atmosphère: la collimation de la surface du mercure dans la cuvette avec la pointe d'ivoire et celle

du haut de la colonne avec les deux lignes de *visée*, ont été vérifiées quinze ou vingt fois; à chaque fois, on lisoit le vernier des lignes et celui des millimètres; et ces deux verniers, calcul fait, ont donné la même hauteur pour la colonne. Par l'établissement des zéros des deux échelles, celle des lignes étoit en différence constante de 0 lig. 09, et cette différence, tant à la station supérieure, qu'à la station inférieure, étoit entre 0 lig. 08, et 0 lig. 11. Le baromètre paroît donc bien observé, et les lectures fidèles. Peu de temps auparavant, M. de Prony avoit comparé son baromètre à celui de M. Oriani, à Milan; et la différence n'étoit que de $\frac{1}{100}$ de ligne; à l'arrivée à Paris, ce baromètre offroit le même accord avec le baromètre de l'Observatoire.

Ainsi d'une part, le nivellement du Mont-Cenis, fait avec des instrumens à niveler est très-exact; et de l'autre part, si c'étoit au hasard qu'on dût attribuer l'accord singulier de l'observation barométrique avec le nivellement, les causes qui ont produit ce hasard mériteroient d'être recherchées. C'est une discussion qui ne peut avoir lieu que quand M. Ramond, de retour à Paris, aura pu conférer avec M. de Prony, sur toutes les circonstances de l'observation; et si nous sommes entrés dans ces détails, c'est moins pour éclaircir une question très-difficile, et peut-être insoluble, que pour avoir occasion d'expliquer la manière d'observer de M. de Prony, et la construction de l'instrument dont il se sert.

Dans la vue d'introduire l'usage du baromètre dans les travaux géodésiques, qui ont pour objet les opéra-

tions préliminaires relatives aux projets des routes, et surtout des canaux qui doivent traverser des cols et des chaînes de montagnes, ce qui seroit une économie considérable de temps et d'argent, M. de Prony est occupé d'une suite d'expérience à Paris et dans les environs, pour constater le degré de précision qu'on peut obtenir de cet instrument, et déterminer le coefficient le plus convenable aux petites hauteurs : il vérifie les hauteurs barométriques par des mesures trigonométriques faites avec le cercle répétiteur. M. Mathieu observe à l'Observatoire impérial, et M. de Prony, au petit Observatoire qu'on lui a construit au-dessus du fronton du corps législatif.

Il croit avoir réuni dans le baromètre qu'il a fait construire par Fortin, tout ce qui peut assurer l'exactitude de l'observation : des microscopes à fil attachés au curseur, sont d'abord mis en coïncidence avec un point supérieur, dont la distance à la pointe d'ivoire de la cuvette est parfaitement déterminée, et de 855 millimètres; on lit alors le vernier, et la différence entre 855 millimètres, et le nombre indiqué par le vernier est une différence constante à ajouter au nombre observé sur l'échelle; lorsque le fil horizontal est tangent au sommet de la colonne de mercure, on observe avec deux microscopes diamétralement opposés, et il résulte de cette disposition, que si quelque inégalité dans le tube de cuivre qui enveloppe le tube de verre dérangeoit le parallélisme des axes optiques dans les diverses hauteurs ou positions, où l'on observe les microscopes, les erreurs des deux microscopes seroient de signe contraire; la moyenne entre

les deux résultats est donc nécessairement exacte. Jusqu'ici les différences ont été insensibles, ce qui prouve que les axes optiques conservent le parallélisme dans leurs diverses positions.

Voici un résultat curieux de la comparaison que l'on a faite du baromètre microscopique avec le baromètre qui s'observe à l'œil nu : si dans ce dernier on met le plan de *visée* tangent au sommet de la colonne de mercure, avec toute l'exactitude qu'on peut établir à la vue simple, et qu'on dérange ensuite le curseur d'une ou deux divisions du vernier (s'il donne les cinquantièmes de millimètres), on n'apercevra aucun dérangement sensible dans la collimation du plan tangent; la précision du vernier dans cet instrument est donc supérieure à celle de la collimation du plan horizontal tangent au sommet de la colonne de mercure.

Dans le baromètre microscopique, au contraire, la précision de la collimation du plan tangent, passant par le fil horizontal du microscope, est fort supérieure à celle du vernier, car lorsqu'on a ajusté le plan tangent et lu le vernier, on peut détacher sensiblement le fil horizontal du sommet de la colonne de mercure, sans que le vernier indique de variation sensible.

M. de Prony a donc rendu la collimation du plan tangent avec le sommet de la colonne supérieure en précision au vernier, d'inférieure qu'elle étoit, et il paroît difficile qu'on obtienne une exactitude plus grande.

Nous nous sommes flattés que nos lecteurs verroient avec plaisir ces renseignemens qui ne sont consignés

nulle part, et nous y ajoutons qu'à cette occasion M. de Prony a communiqué à la classe, une série très-convergente, pour calculer les hauteurs barométriques, sans logarithmes. On ne soupçonnera pas l'auteur des tables logarithmiques les plus étendues et les plus exactes que l'on connoisse de vouloir détourner les Géomètres et les ingénieurs de l'emploi de ces tables. Il sait mieux que personne toute la supériorité du calcul logarithmique sur tous les autres moyens, soit pour la précision, soit pour la brièveté et la commodité. Il ne donne lui-même sa série que comme un moyen de vérification et comme un procédé fort expéditif dans certaines circonstances, où, manquant de tables logarithmiques, on desire connoître à l'instant le résultat d'une observation.

Ouvrages imprimés présentés a la classe.

Histoire générale des Mathématiques depuis leur origine jusqu'à 1808, par M. Bossut.

Dans la première édition de cet ouvrage qui parut en 1802, l'auteur s'étoit imposé la loi de ne parler d'aucun mathématicien vivant; mais il annonçoit un supplément déjà composé, et qui devoit paroître sous le titre de *Considérations sur l'état actuel des mathématiques. On sait*, ajoutoit-il, *combien ce dernier ouvrage doit demander de circonspection dans le dessein que j'ai d'être parfaitement juste, et de payer aux véritables inventeurs le titre d'éloges et de reconnoissance qui leur est dû.*

Le succès de la première édition a permis à l'auteur

de réunir et de fondre ensemble les deux parties, qui ne pouvoient que perdre à être présentées séparément; il répète dans son discours préliminaire, qu'il a cherché avec l'attention la plus scrupuleuse à être juste : en parlant des auteurs vivans, il croit s'être exprimé comme si tous lui étoient personnellement inconnus, ou comme s'il avoit pour tous les mêmes affections; dans la supposition où il auroit blessé, quoique involontairement, les droits de quelqu'un, il est prêt à réparer ses erreurs. Il est comme impossible, ajoute-t-il en finissant, que dans l'immense quantité d'ouvrages qui existent sur les mathématiques, je n'en aie pas oublié plusieurs qui sont très-dignes d'estime; mais en cela je n'aurois fait tort qu'à moi-même : le public qui les connoît, est le juge et le garant de leur mérite.

C'est en effet une entreprise bien délicate que de rendre un compte impartial des ouvrages de ses contemporains, de ses confrères et de ses émules. Un exposé clair de leurs découvertes, dans lequel on se montre réservé dans les éloges et surtout dans les critiques, est le seul moyen d'éviter les écueils dont cette route est parsemée. Ainsi, après avoir nous-mêmes rendu compte des intentions et des dispositions de l'auteur, nous nous contenterons d'ajouter que cette histoire générale des mathématiques se fait lire d'un bout à l'autre avec un intérêt dont quelques personnes n'auroient pas cru le sujet susceptible à ce point; que le récit est toujours rapide, clair et souvent élégant; que le style s'anime quand le sujet acquiert une importance particulière, comme

dans la dispute entre Newton et Leibnitz, et dans celle des frères Bernoulli, ou quand l'historien apprécie et compare des géomètres plus modernes qu'il a particulièrement connus, comme d'Alembert et Clairaut.

On seroit presque tenté de regretter que dans la dernière partie de son ouvrage, il se soit imposé des lois plus sévères, et que par une circonspection, si louable d'ailleurs, en négligeant une partie de ses avantages, il ait laissé quelque chose à faire à ceux qui, continuant un jour ce tableau, pourront se livrer sans réserve à leurs idées et même à leurs affections.

Mais si nous croyons devoir nous interdire tout détail sur la partie tout à fait moderne, nous pouvons nous permettre quelques remarques sur celle où il est question de l'état de la science chez les anciens. Ces réflexions ne porteront pas sur les mathématiciens dont les ouvrages nous sont restés. M. Bossut les a appréciés avec justesse et impartialité; mais sur quelques points douteux, sur lesquels les avis sont nécessairement partagés, et nous ne donnerons nos idées que comme des conjectures que nous soumettons au jugement et aux lumières de l'historien des mathématiques.

C'est par exemple une idée presque généralement reçue et adoptée par M. Bossut, que la théorie des planètes chez les Grecs, est due toute entière à Ptolémée; que ses prédécesseurs, et Hipparque lui-même, s'étoient contentés d'amasser quelques observations sans oser imaginer une hypothèse propre à expliquer des mouvemens si compliqués. Or, il nous paroît aisé de prouver par le

témoignage de Ptolémée lui-même, que la théorie des planètes, au moins pour ce qui concerne les mouvemens en longitude, est bien antérieure à Ptolémée, à qui il resteroit pourtant encore le mécanisme, presque inintelligible, au moyen duquel il explique les mouvemens en latitude, et la gloire plus solide d'avoir su réduire tous ces mouvemens en tables auxquelles on n'a rien ajouté pendant douze cents ans. En laissant donc à Ptolémée ce qui lui appartient incontestablement, on pourroit revendiquer pour des géomètres plus anciens le système des épicycles et de l'excentrique. Ouvrons, en effet, l'Almageste, au liv. 12, chap. 1er., nous y verrons que plusieurs mathématiciens, et notamment Apollonius de Perge, avoient expliqué les stations et les rétrogadations dans l'un et l'autre système; qu'Apollonius avoit déterminé le rapport qui doit exister entre le mouvement de l'épicycle et le mouvement propre de la planète, pour qu'il arrive une *apparence de station* toutes les fois que la planète se trouve sur une ligne qu'Apollonius enseignoit à tirer en conséquence de ce rapport. Ptolémée, en rapportant les théorêmes d'Apollonius, et le lemme qui lui avoit servi à les démontrer, nous annonce seulement qu'il les démontrera d'une manière plus commode, en mêlant dans son explication les hypothèses de l'excentrique et de l'épicycle qui auroient suffi séparément. Ajoutons que les théorêmes d'Apollonius sont identiques aux règles données pour trouver les stations et les rétrogradations par les astronomes les plus modernes, quand ils se sont permis de négliger les excentricités, ainsi

que nous nous en sommes convaincus en convertissant ces théorêmes en formules algébriques. On peut donc penser que la théorie des planètes étoit créée long-temps avant Ptolémée, et qu'il ne restoit qu'à discuter les observations en plus grand nombre poûr déterminer plus exactement les mouvemens et la grandeur des épicycles; que dans la recherche de ces mouvemens, Ptolémée ayant dû nécessairement reconnoître une inégalité propre à la planète, et une autre inégalité qui dépendoit de l'angle d'élongation, il avoit été conduit à représenter l'une par un excentrique, et l'autre par un épicycle. Cette réunion de deux hypothèses est ce qu'on pouvoit imaginer de plus simple pour démontrer aux yeux le mécanisme de ces mouvemens compliqués. Ptolémée paroît être le premier qui ait imaginé cet emploi des deux hypothèses réunies. Il a même été plus loin; il a vu que ce n'étoit pas encore assez pour satisfaire aux inégalités de la Lune et de Mercure; et il eut recours à un moyen tout à fait nouveau; celui de faire tourner la ligne des apsides, non plus autour du centre du zodiaque, comme ses prédécesseurs, mais autour d'un autre point dont il détermina la position d'après ses observations et celles d'Hipparque.

On attribue de même à Thalès la science des éclipses, parce qu'il avoit annoncé une éclipse de soleil, et que l'évènement avoit vérifié sa prédiction. Comment Thalès auroit-il apporté en Grèce une science qui n'étoit connue que si imparfaitement de Ptolémée? Comment calculer les éclipses de soleil sans la connoissance des parallaxes?

Or, Ptolémée lui-même donnoit 51′ et 103′ pour limite à la parallaxe de la lune, au lieu de 53′ $\frac{3}{4}$ et 61 $\frac{1}{2}$. Il se trompoit donc de plus de 40′ sur la plus grande parallaxe : il n'en falloit pas davantage pour réduire à moins que rien une éclipse qu'il auroit annoncée comme totale, ou pour faire arriver une éclipse totale le jour où il n'auroit pas cru qu'on pût avoir une éclipse même partielle. On suppose que Thalès avoit apporté cette science d'Egypte : dans un climat où le ciel est rarement couvert, les prêtres avoient pu tenir un registre exact de toutes les éclipses arrivées pendant une longue suite d'années, et remarquer la période qui ramène ces éclipses dans le même ordre; il n'y a nulle apparence que ces prêtres, si mystérieux, en aient su davantage; et il y a loin de là à la science des éclipses.

On attribue la trigonométrie rectiligne et sphérique à Menelaus, qui, en effet, nous a transmis les théorêmes que les Grecs employoient au calcul des triangles; mais Hipparque avoit composé un grand ouvrage sur les cordes et la manière d'en construire les tables. Est-il croyable qu'il n'ait pas donné en même temps l'usage de ces cordes pour la solution des triangles? Ptolémée, en nous expliquant sa table des cordes, donne, sans citer Menelaus, ces mêmes théorêmes. N'y a-t-il pas quelque apparence que le tout appartient à Hipparque? Menelaus et Théodose paroissent mettre fort peu d'importance à la pratique; le dernier ne dit pas un mot de la solution des triangles sphériques; et un astronome qui n'auroit lu que Menelaus, auroit encore éprouvé quelque embar-

ras à résoudre le cas le plus ordinaire; c'est-à-dire, à trouver l'heure par la hauteur du soleil.

On ne voit pas bien clairement quelle connoissance positive en astronomie, Pythagore avoit rapportée de son voyage dans l'Inde. Il y a grande apparence que l'astronomie des Grecs n'étoit pas la même que celle des Indiens. Ceux-ci connoissoient des théorêmes qui ont toujours été ignorés des Grecs; mais les astronomes d'Alexandrie ont été plus loin, à quelques égards, que ceux de l'Inde. Cependant ceux-ci employoient les sinus, calculés suivant le système décimal, quand l'Afrique et l'Europe ne connoissoient encore que les cordes exprimées en sexagésimales. Il nous paroîtroit donc à peu près certain que l'arithmétique décimale nous vient de l'Inde, et le plus ancien traité d'arithmétique un peu complet que nous connoissions est celui de Planude, qui l'intitule *l'arithmétique selon les Indiens*. Les mémoires de Calcutta nous ont donné sur l'astronomie des Indiens et sur leurs méthodes pour les éclipses, des renseignemens bien plus complets que ceux de Le Gentil, et que ce qu'il a été possible à Cassini de deviner sur les tables des Siamois.

M. Bossut a cru devoir prendre la défense d'Eratosthène contre ceux qui ayant tenté de lui ravir *une partie de sa gloire, n'ont pu s'appuyer que sur des conjectures destituées de fondement*. La gloire d'Eratosthène est d'avoir été pour son temps un bon astronome, un bon géomètre, un bon géographe, un homme fort savant; personne ne lui a contesté aucun de ces titres,

mais on peut les lui accorder tous sans convenir qu'il ait en effet mesuré la terre; il a le premier indiqué à peu près ce qu'il falloit faire pour la mesurer : il n'existe aucune preuve qu'il ait observé à Syené; personne, pas même Cléomède, n'a dit qu'il eût mesuré la distance terrestre entre cette ville et Alexandrie; il a certainement mesuré les deux hauteurs solstitiales à Alexandrie, et déterminé par-là la hauteur du pôle : il a d'ailleurs supposé que Syené étoit sous le tropique, que l'arc terrestre étoit de 5000 stades; on ne voit pas sur quel fondement, probablement sur le rapport des ingénieurs qui avoient tracé et mesuré la route, et il en a conclu la grandeur approximative de la terre. Voilà ce qui paroît prouvé, mais ce qui ne l'est pas malgré le témoignage de Cléomède, c'est qu'il se soit servi du scaphé, mauvais instrument portatif, comparable à peine pour l'exactitude, aux anneaux astronomiques, tandis qu'il avoit à Alexandrie un gnomon et des armilles bien préférables à l'instrument nommé *bateau* ou *scaphé*, dont Ptolémée ne parle en aucun endroit de ses ouvrages, et qui ne paroît avoir été qu'un instrument de gnomonique et non d'astronomie.

Puisque nous avons parlé des armilles d'Alexandrie, ajoutons que ces armilles n'avoient pas d'horizon; il est dit simplement que le méridien, ou plus exactement, que les deux extrémités de l'axe sur lequel tournoit toute la machine, devoient être dans un plan perpendiculaire à l'horizon du lieu : l'horizon n'auroit fait que gêner les observations, et n'auroit eu d'ailleurs aucune utilité.

Enfin nous serions tentés de croire que M. Bossut fait

un peu trop d'honneur aux astronomes d'Almamoun. Jbn Jounis nous a conservé leurs noms; il dit que, suivant eux, le degré étoit de 57 milles; Aboulfeda dit que les uns avoient trouvé 56 milles, et les autres $56\frac{1}{3}$, et qu'on s'en étoit tenu à ce dernier nombre. Un manuscrit de la bibliothèque Impériale dont M. Jourdain nous a communiqué un extrait, porte qu'Almamoun ayant lu dans Ptolémée que la circonférence de la terre étoit de 24000 milles, avoit demandé à ses astronomes si cela étoit exact; ceux-ci avoient répondu qu'oui. Nous ne voyons pas trop ce qui pouvoit leur donner cette assurance. Almamoun alors leur ordonna de mesurer un degré. Ils allèrent donc dans la plaine du Sandjâr, prirent la hauteur du pôle, plantèrent un piquet au lieu de l'observation, étendirent un cordeau dans le sens du méridien, au bout de ce cordeau ils plantèrent un second piquet et ainsi de suite, jusqu'à ce que la hauteur du pôle fût changée de un degré; ils trouvèrent $66\frac{2}{3}$ milles, ce qui donnoit 2400 milles pour la circonférence du méridien. Ils portèrent ce résultat au Calife, qui fit vérifier l'opération en un autre endroit. Ils allèrent alors dans le désert de Koufah; le second résultat s'accordant avec le premier, Almamoun ne douta plus que Ptolémée n'eût raison.

D'après ce récit, le plus circonstancié de tous ceux qui nous sont parvenus, on pourroit soupçonner qu'ayant mesuré $66\frac{2}{3}$ ils observèrent grossièrement la hauteur du pôle, bien décidés d'avance à trouver ce que Ptolémée avoit avancé, et cette mesure ne seroit pas

digne d'une grande confiance, d'autant plus que voilà $66\frac{2}{3}$ milles, tandis que les autres auteurs disent $56\frac{1}{3}$ ou 57. D'ailleurs, comment trouvèrent-ils deux plaines d'un degré chacune, sans montagnes, sans forêts, sans rivières, sans habitations : les Anglois n'ont pu en trouver une en Amérique, et ils ont été obligés de partager leur arc en plusieurs lignes parallèles, qui n'étoient pas dans un même méridien.

Voilà les doutes que nous proposerons à M. Bossut, ils ne sont pas comme on voit d'une grande importance, et le mal ne seroit pas bien grand d'avoir accordé à quelques anciens un peu plus que ce qui leur seroit dû rigoureusement.

Parmi les ouvrages imprimés, présentés à la classe par les associés de l'Institut, nous devons la première place à ceux de S. A. Eminentissime Monseigneur le Prince Primat, qui, non content de protéger dans ses États toutes les sciences et tous les arts utiles les cultive lui-même, et a daigné envoyer à la classe ses recherches sur l'irréductibilité des nombres, où l'on remarque des idées nouvelles, et une notation ingénieuse qui simplifie les opérations.

Ce présent étoit accompagné d'une description du beau monument que S. A. Eminentissime a fait dresser dans ses États, à la mémoire du fondateur de la véritable astronomie, de l'inventeur de ces trois principes connus sous le nom de *lois de Képler*, et sur lesquelles porte la théorie de tout le système planétaire.

Ce monument est une espèce de temple où Képler est représenté recevant des mains de la muse Uranie les trois découvertes qui ont immortalisé son nom.

Parmi les ouvrages présentés par les correspondans, le plus vaste, le plus intéressant et le plus universellement répandu est celui où M. de Humboldt travaille à réunir les observations de tout genre qu'il a faites dans les deux continens.

La classe a reçu de lui cette année :

Les livraisons 2, 3, 4 et 5e de la partie astronomique, dans lesquelles, outre les points dont il a fixé la position géographique, on trouve encore les mesures géodésiques, un nivellement barométrique executé dans les régions équinoxiales de l'Amérique, avec des observations physiques et géodésiques sur la Cordillière des Andes; enfin toutes les recherches qu'il a faites sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée et l'intensité des forces magnétiques;

Les 3e et 4e parties de l'essai politique sur le royaume de la Nouvelle-Espagne, accompagnées d'une carte générale du Mexique en deux feuilles, et d'une grande carte de la Nouvelle-Espagne.

Tant d'observations amenoient à leur suite une quantité vraiment effrayante de calculs, auxquelles n'auroient pu suffire ni les forces, ni surtout le temps d'un seul. M. de Humboldt a eu le bonheur rare de trouver dans son ami M. Oltmanns un collaborateur d'un mérite distingué, qui, aux connoissances astronomiques nécessaires pour les réductions, joint par une réunion précieuse la patience qui fait dévorer les calculs les plus

longs et les plus monotones à la sagacité qui indique au besoin les méthodes nouvelles, ou les modifications que les diverses circonstances forcent d'apporter aux méthodes connues pour tirer des observations le parti le plus avantageux.

Non content encore de ce grand travail si heureusement achevé, M. Oltmanns y a puisé des forces nouvelles pour en entreprendre un plus vaste et d'une utilité encore plus prochaine; c'est de discuter, de comparer, de calculer de nouveau sur les tables les plus modernes, toutes les observations astronomiques propres à déterminer les longitudes et latitudes terrestres qu'il a pu recueillir dans les écrits des savans, dans les Voyages, dans les Ephémérides et dans les Recueils académiques. De ces recherches est déjà résulté le premier volume d'un ouvrage qu'il a composé en allemand, et qui a pour titre : *Recherches sur la Géographie du nouveau continent, fondées sur les observations astronomiques et mesures barométriques d'Alexandre de Humboldt et autres voyageurs, et un tableau de 820 positions géographiques calculées d'après les tables les plus récentes et d'après une méthode uniforme*, avec l'indication des sources où l'auteur a puisé, le nom des observateurs, et des remarques sur les observations. On sent que l'espace nous manque pour analyser tant de travaux utiles; il nous suffira de les indiquer aux savans et aux voyageurs qui en sentiront tout le prix.

RAPPORTS.

Il ne se passe presque aucune de nos séances particulières, sans que la classe entende quelque Rapport sur les machines ou inventions nouvelles, et sur les Mémoires qui sont soumis à son examen, par des savans encore étrangers à l'Institut. Dans l'impossibilité où nous sommes de les passer en revue, nous nous contenterons d'indiquer :

1°. Les recherches sur la vitesse de la lumière, par M. Arago, maintenant membre de la classe dans la section d'astronomie, qui a prouvé que la vitesse étoit la même, soit que la lumière vînt directement du soleil et des étoiles ou d'un feu allumé sur terre, ou enfin qu'elle nous fût réfléchie par la terre, les planètes ou les corps terrestres : d'où résulte pour l'astronomie-pratique, cette vérité importante que les effets de l'aberration de tous les corps célestes, se calculent d'après une même loi, supposition admise jusqu'aujourd'hui comme très-vraisemblable, mais qui n'avoit pas encore été prouvée d'une manière aussi directe. Nous reviendrons sur ce travail intéressant quand l'auteur, qui le continue, l'aura présenté avec les augmentations qu'il se propose d'y ajouter.

2°. Une machine à feu de M. Cagniard-Latour, qui y fait un usage inverse et fort heureux de la vis d'Archimède. L'auteur vient d'y faire tout nouvellement des additions que la classe a renvoyées à l'examen des commissaires qui avoient déjà fait de la première partie le

rapport le plus avantageux. Nous y reviendrons après le travail des commissaires.

3°. Le polygone et les polièdres de M. Poinsot, inspecteur-général de l'Université Impériale.

Imaginez un rayon mobile, tournant autour d'un point fixe, et s'arrêtant successivement dans les positions parallèles à tous les côtés d'un polygone donné.

Si tous les angles formés par les positions consécutives du rayon mobile sont tous moindres que de 180°., et que, pour revenir à sa position primitive, le rayon mobile n'ait parcouru qu'une circonférence, le polygone donné est de première espèce : c'est le polygone vulgaire, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.

Si les angles, entre les positions consécutives, sont toujours moindres que deux droits, et que le rayon mobile tournant toujours dans le même sens, soit obligé, pour devenir parallèle à tous les côtés, de parcourir deux circonférences, le polygone sera ce que M. Poinsot appelle polygone convexe de la seconde espèce ; s'il est obligé de parcourir trois circonférences, le polygone sera de la troisième espèce ; et ainsi de suite.

Dans la seconde espèce, la somme des angles extérieurs sera évidemment de huit angles droits, de douze dans la troisième, de seize dans la quatrième, et toujours en augmentant de quatre angles droits.

Or, comme chaque angle intérieur du polygone, joint à l'angle extérieur correspondant, fait toujours une somme égale à deux angles droits, il est clair que la

somme des angles intérieurs du polygone diminue de quatre angles droits à mesure que le polygone passe d'une espèce à la suivante. Ainsi, la somme des angles intérieurs peut se réduire à deux angles droits, et le triangle n'est plus, comme on l'avoit cru jusqu'ici, le seul polygone dont la somme des angles intérieurs soit de deux angles droits.

M. Poinsot observe que le triangle et le quadrilatère n'admettent pas de seconde espèce, parce qu'on ne peut soustraire quatre angles droits de la somme des angles intérieurs, sans avoir un reste négatif pour le triangle, et nul pour le quadrilatère. Mais tous les autres polygones, sans exception, sont susceptibles d'être de toutes les espèces, jusqu'à ce que le nombre des angles intérieurs soit réduit à deux ou quatre droits.

M. Poinsot appelle polygones étoilés les polygones réguliers de nouvelle forme, et il a remarqué que l'usage de ces polygones peut avoir lieu dans les problêmes de statique. Un de ces problêmes l'a conduit à s'occuper d'une question d'un autre genre. Il s'agit de conduire entre des points, situés comme on voudra dans l'espace, un même fil inextensible qui les unisse deux à deux de toutes les manières possibles, de sorte que les deux bouts du fil se joignent, et qu'ainsi la longueur totale du fil soit égale à la somme de toutes les distances mutuelles des points donnés.

Ce problème n'est possible que lorsque lespoints donnés sont en nombre impair, et il en donne la solution.

Mais si le nombre est pair, et qu'il soit permis de

faire passer le fil deux fois sur chaque point, le problème devient possible, et la longueur du fil est la double somme des distances.

On sait qu'il n'y a que cinq corps réguliers dans l'acception ordinaire; mais comme il a considéré des polygones de différente espèce, M. Poinsot, avec ses nouveaux polygones, compose des corps réguliers de différente espèce; mais tout polygone de nouvelle espèce ne donne pas infailliblement un polyèdre de l'espèce analogue. Il en faut vérifier la possibilité par une équation que donne M. Poinsot, et qui l'a conduit à la découverte de deux de ces polyèdres.

Le premier est l'icosaèdre formé par vingt triangles équilatéraux, et sa surface recouvre sept fois la sphère inscrite.

Le second est un dodécaèdre formé sous douze pentagones réguliers, et sa surface recouvre trois fois exactement la sphère inscrite.

Il y a encore des polyèdres réguliers d'une autre espèce, et M. Poinsot en donne deux qui sont des dodécaèdres étoilés.

Il peut s'en trouver encore d'autres, car M. Poinsot ne donne ces résultats que comme des premiers essais d'un travail qu'il se propose de continuer. Nous ne pousserons pas plus loin l'extrait de ce mémoire. Ce qu'on vient de lire suffira pour prouver que tous ces résultats sont nouveaux, et méritent l'attention des géomètres.

ANALYSE

Des travaux de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut, pendant l'année 1809.

PARTIE PHYSIQUE.

Toutes les sciences qui sont fondées sur des faits ont l'inappréciable avantage que chaque expérience et chaque observation peut contribuer à leur progrès. Il n'est véritablement point de découvertes inutiles pour les sciences physiques ; quelles que soient les conséquences auxquelles on arrive, quels que soient les resultats qu'on obtienne; dès qu'ils sont nouveaux ils ont leur importance : chaque fait a une place déterminée qui ne peut être remplie que par lui seul, et l'on doit considérer l'édifice des sciences comme celui de la nature : tout y est infini, tout y est nécessaire. On peut dire plus : c'est quelquefois sans nuire essentiellement aux progrès de la vérité que les hommes qui se livrent à sa recherche s'égarent dans de fausses routes. On a vu les découvertes les plus utiles naître des plus graves erreurs. Nous en trouvons des preuves récentes dans les travaux qui ont été faits pour combattre la chimie moderne, et pour soutenir l'ancienne théorie de la combustion. La complication des phénomènes de cette science sera même cause

que les preuves de ce genre se multiplieront souvent encore: les faits ne se présentent pas toujours avec les mêmes caractères, on les étudie sous d'autres rapports, ils sont vus avec des yeux différens, et les résultats auxquels ils conduisent ne sont point semblables. C'est ce que nous apercevons aujourd'hui d'un manière bien évidente dans les discussions qui se sont élevées entre M. Davy, notre confrère Gay-Lussac et M. Thénard.

CHIMIE.

Nous avons rendu compte, dans nos rapports précédens, de la découverte de M. Davy sur les changemens que la potasse et la soude éprouvent par l'action de la pile de Volta, et des procédés par lesquels MM. Gay-Lussac et Thénard opéroient ces changemens sans le secours de cet instrument.

M. Davy croyoit que, dans ces expériences, la potasse et la soude éprouvoient une désoxigénation, et qu'il en résultoit un véritable métal qui se distinguoit surtout, des autres substances de ce genre, par une extrême affinité pour l'oxigène. Il nommoit ces nouveaux métaux, l'un *potassium*, et l'autre *sodium*. MM. Gay-Lussac et Thénard établissoient, au contraire, par plusieurs expériences, mais surtout par les produits qu'on obtient en analysant la combinaison du potassium avec l'ammoniaque; que les changemens de la potasse et de la soude étoient dus à une combinaison particulière de ces alcalis avec l'hydrogène. M. Davy, ayant répété les expériences sur lesquelles cette opinion est fondée, n'a point eu des

résultats comformes à ceux qui avoient été annoncés par les chimistes français; ce qui a donné lieu à des observations de MM. Gay-Lussac et Thénard, dans lesquelles ils montrent que les différences qui se trouvent entre les résultats des expériences de M. Davy, et les résultats des leurs, tiennent à des causes qui ne peuvent point influer sur les conséquences auxquelles ils sont arrivés. Au reste dans l'une et dans l'autre hypothèse, il n'en résultoit pas moins pour la chimie, de la découverte de M. Davy, un réactif extrêmement puissant, et qui devoit produire sur les autres corps des effets jusqu'alors ignorés.

Cette nouvelle découverte donnoit donc lieu à des expériences très-différentes, mais qui conduisoient au même but; les unes avoient pour objet de reconnoître l'action de la pile sur les autres alcalis, sur les terres, et généralement sur toutes les substances simples non métalliques, et qu'on pourroit soupçonner être des oxides comme la potasse et la soude. Le but des autres étoit de décomposer, au moyen des nouveaux métaux, les substances oxigénées ou supposées telles, et surtout les acides boraciques, fluoriques et muriatiques.

Nous avons dit l'année dernière que MM. Gay-Lussac et Thénard étoient parvenus à opérer la décomposition du premier de ces acides, et à en reconnoître le radical. Depuis, leurs recherches se sont portées sur l'acide fluorique.

Ils ont commencé par étudier les propriétés physiques et chimiques de cet acide, plus exactement qu'on ne l'avoit fait avant eux. L'affinité de l'eau pour ce gaz est

extrême; dès qu'on le mêle à d'autres qui contiennent quelques portions de ce liquide, il se forme de nombreuses vapeurs : cependant ce gaz ne peut communiquer à l'eau sa force expansive; il ne peut se dissoudre ni en gazéïfier la plus petite quantité, et dans son état aériforme, il est absolument sec; mais il est impossible d'obtenir cet acide pur; il retient toujours quelques portions des corps avec lesquels il a été en contact; et dans les travaux que MM. Gay-Lussac et Thénard ont entrepris sur cet acide, au moyen du potassium, il se sont servis de préférence du gaz fluorique siliceux, comme ne contenant aucun corps étranger susceptible de se décomposer et d'obscurcir les résultats des expériences. Dans l'action réciproque de ces deux matières, il y a une grande absorption d'acide fluorique, très-peu de gaz hydrogène dégagé, et transformation du métal en une matière solide dont la couleur est brune-rougeâtre.

MM. Gay-Lussac et Thénard regardent cette combinaison nouvelle, comme un composé de potasse, de silice et du radical de l'acide fluorique; mais il n'ont pu isoler cette dernière substance. « Il paroît, disent nos auteurs, » (d'après beaucoup d'expériences que nous ne pouvons » rapporter ici), que, quand ce radical n'est combiné » qu'avec la potasse, il peut décomposer l'eau comme » les phosphures; mais que quand il est combiné avec la » potasse et le silice, il ne la décompose pas, sans doute » par la raison que cette combinaison triple est inso- » luble. »

M. Davy a aussi fait des tentatives pour mettre à nu

le radical fluorique, et il a obtenu des résultats analogues à ceux que nous venons de rapporter; il attribue l'hydrogène produit dans la combinaison du potassium avec le gaz, à l'eau qu'il croyoit être contenue dans cet acide et que le métal avoit décomposé.

L'acide muriatique a aussi été pour M. Davy, et pour MM. Gay-Lussac et Thénard, le sujet d'observations nombreuses et intéressantes. Les uns et les autres ont fait des essais infructueux pour décomposer cet acide, et pour isoler le radical qu'on croit en former un des élémens. Mais MM. Gay-Lussac et Thénard ont reconnu que l'acide muriatique ne pouvoit exister sans eau à l'état de gaz; qu'alors il en contenoit le quart de son poids, et que l'eau seule avoit la faculté de l'enlever à ses combinaisons sèches. Il est à remarquer que, dans toutes les expériences faites avec les métaux, l'eau, en se décomposant, a toujours produit une quantité d'oxide égale à celle dont avoit besoin l'acide pour se neutraliser; de sorte que, pour tout résultat, on obtenoit de l'hydrogène et un sel neutre. Les bornes de ce rapport ne nous permettent pas de faire connoître toutes les expériences qui sont contenues dans le travail de MM. Gay-Lussac et Thénard; mais nous ne devons pas passer sous silence l'heureuse application que ces savans ont faite, à la décomposition du muriate de soude, de l'affinité que l'acide muriatique a pour l'eau: on sait que la soude entre comme matière première dans plusieurs fabrications, et qu'il est très-important de posséder un moyen simple et direct de retirer cet alcali du sel commun.

Quant à l'acide muriatique oxigéné, MM. Gay-Lussac et Thénard l'ont soumis à de nombreuses expériences. « Elles doivent donner, disent ces chimistes, de la constitution de cet acide une idée toute différente de celle » qu'on s'étoit formée. On l'avoit regardé comme le corps » le plus facile à décomposer, et au contraire il résiste à » l'action des agens les plus énergiques. On ne peut en » retirer l'acide muriatique à l'état de gaz, qu'au moyen » de l'eau ou de l'hydrogène ». Cet acide pèse 2.47 plus que l'air. Il contient la moitié de son volume de gaz oxigène, et toute l'eau qu'il peut former avec l'hydrogène est retenue par l'acide muriatique qu'il renferme. Cette eau fait le quart du poids de ce dernier acide.

L'action du métal de la potasse sur les oxides et les sels métalliques, et sur les sels terreux et alcalins, a aussi fait pour MM. Gay-Lussac et Thénard le sujet d'un travail particulier, duquel il est résulté que tous les corps dans lesquels on connoît la présence de l'oxigène, sont décomposés par ce métal; que cette décomposition se fait presque toujours avec dégagement de lumière et de chaleur; que ce dégagement est d'autant plus considérable que l'oxigène est moins condensé, et que, par conséquent, ce pourroit être un moyen d'apprécier le degré de condensation de l'oxigène dans chaque corps.

Après avoir opéré sur la potasse et sur la soude, à l'aide de la pile de Volta, les changemens dont nous avons parlé plus haut, il étoit naturel de chercher à produire des effets analogues sur les autres alcalis et sur les terres. En effet M. Davy a entrepris de nombreuses

expériences pour découvrir, suivant son système, les métaux de la baryte, de la strontiane, de la chaux, de la magnésie, de la silice, de l'alumine, de la zircone, et de la glucine. Après beaucoup de tentatives infructueuses, il annonce qu'il est parvenu, avec le secours de la pile, à désoxigéner les quatre premières de ces substances, et à former des amalgames des nouveaux métaux qui en résultent. Il pense que les quatre autres sont aussi des oxides métalliques; mais ses expériences, comme il l'avoue, ne le prouvent point d'une manière évidente.

Un autre amalgame, produit par l'ammoniaque, a été découvert l'année dernière à Jéna par le docteur Scebeck. Il a fait ensuite le sujet des recherches de MM. Berzélius et Pontin à Stockholm, et de M. Davy en Angleterre; les uns et les autres se sont accordés à reconnoître l'ammoniaque comme jouissant de toutes les propriétés d'oxide. A la température ordinaire, cet amalgame a la consistance du beurre, et au froid il crystallise en cubes; mais on n'a pu isoler le nouveau métal. MM. Gay-Lussac et Thénard ont répété les expériences rapportées par les chimistes dont nous venons de parler, et ils en ont reconnu l'exactitude. Mais cet amalgame, qui n'avoit été formé que par l'action de la pile, les physiciens français l'ont produit par l'action du métal de la potasse, et ils ont reconnu qu'une légère agitation suffisoit pour le décomposer. Par cette simple action le mercure redevient coulant, et il se dégage de l'ammoniaque et de l'hydrogène dans la proportion de 28 à 23. Le mercure absorbe 3, 47 de son volume de gaz

hydrogène, et 4, 22 de son volume de gaz ammoniaque pour passer à l'état d'amalgame, d'où il résulte, disent nos auteurs, que dans cette combinaison le mercure augmente d'environ 0.0007[e] de son poids, tandis que, d'après les expériences de M. Davy, il n'augmentoit que d'un 12000[e]. Ainsi la théorie par laquelle MM. Gay-Lussac et Thénard expliquent la formation du potassium, s'applique à la formation de l'ammonium. Ce nouveau métal n'est, suivant eux, que de l'ammoniaque et de l'hydrogène. Enfin, M. Davy a encore porté ses recherches sur le soufre, le phosphore, la plombagine, le charbon et le diamant. Les principales expériences relatives à ces deux premières substances ont été faites sur les gaz hydrogènes, sulfurés et phosphorés, au moyen du potassium, et il conclut des résultats qu'il a obtenus: que ces deux corps inflammables sont des combinaisons d'hydrogène, d'oxigène et d'une base qui n'est point connue, et qui n'a point encore été mise à nu. Quant aux autres substances, il est conduit à regarder la plombagine comme un alliage du fer avec un métal particulier qui se retrouve dans le charbon combiné à l'hydrogène, et dans le diamant à une petite partie d'oxigène.

Ces idées étoient trop contraires à celles qui sont communément reçues, pour ne pas exciter les recherches des autres chimistes. Aussi MM. Gay-Lussac et Thénard ont-ils fait sur le soufre et le phosphore un travail très-étendu; et comme M. Davy avoit employé les hydrures dans ses expériences, les chimistes français ont cherché d'abord à déterminer avec exactitude les élémens de ces

substances. Ils ont reconnu que le gaz hydrogène sulfuré contient un volume d'hydrogène égal au sien; que le gaz hydrogène phosphoré en contient au moins une fois et demie son volume, que le premier de ces gaz peut être absorbé par le potassium et le sodium, et que dans cette absorption il se développe précisément la même quantité d'hydrogène que le métal seul en donneroit avec l'ammoniaque et avec l'eau; enfin, que le gaz hydrogène phosphoré est décomposé par le potassium et le sodium, en sorte que le phosphore se combine avec ce métal, et que l'hydrogène se dégage. Mais ces physiciens ne se sont point bornés à porter leurs recherches sur les substances que M. Davy avoit mises en usage; ils ont fait des expériences sur le gaz hydrogène arseniqué, et ils ont vu que ce gaz se comporte avec les nouveaux métaux comme le gaz hydrogène phosphoré, et que l'arsenic peut se combiner avec l'hydrogène, de manière à former un hydrure solide qui a la forme de flocons légers, d'une couleur brune. Ils concluent que le gaz hydrogène sulphuré et phosphoré, ainsi que le soufre et le phosphore, ne contiennent point d'oxigène, ou du moins que les expériences de M. Davy ne le démontrent point. Mais ils croient, comme on l'a déjà pensé, que le soufre, et peut-être le phosphore, contiennent de l'hydrogène.

Nous ne nous permettrons point de prononcer entre les opinions de M. Davy et celles de MM. *Gay-Lussac* et *Thénard*; mais on ne manquera sans doute pas de remarquer, quoique cela ne puisse conduire à aucune

conséquence fâcheuse pour la chimie moderne, que l'hydrogène qui, souvent dans la théorie de Staël n'étoit pas autre chose que le phlogistique, donne lieu à des combinaisons qui ont tous les caractères des métaux.

Outre les travaux dont nous venons de parler, nous devons à M. Gay-Lussac des observations sur la combinaison des substances gazeuses les unes avec les autres, qui l'ont conduit à prouver que les gaz, dans telles proportions qu'ils puissent se combiner, donnent toujours lieu à des composés dont les élémens sont entre eux dans des rapports très-simples. Ainsi, 100 parties de gaz oxigène saturent exactement 200 parties d'hydrogène; les gaz fluoriques et muriatiques, mêlés avec le gaz ammoniacal, saturent de celui-ci un volume égal au leur, et forment des sels neutres, etc. Mais il observe que lorsqu'on considère les proportions en poids, on n'obtient aucun rapport simple entre les élémens d'une pareille combinaison. De plus, il fait voir que les contractions apparentes qu'éprouvent les gaz en se combinant, se font aussi dans des rapports très-simples avec le volume primitif des gaz, ou seulement avec celui de l'un d'eux, et il fait remarquer ensuite que la contraction apparente n'indique point la contraction réelle qu'ont éprouvée les élémens en se combinant.

Ces observations ont été suivies d'un travail particulier sur la vapeur nitreuse et sur le gaz nitreux considéré comme moyen eudiométrique. On y voit d'une manière bien évidente l'influence des quantités sur le résultat des combinaisons. Si l'on mélange 200 parties de gaz

nitreux et 200 parties de gaz oxigène, il se produit de l'acide nitrique; et 100 parties d'oxigène restent libres. Si au contraire on fait un mélange de 100 parties d'oxigène et de 400 de gaz nitreux, il se fait une absorption de 400 parties, qui produisent de l'acide nitreux, et 100 parties de gaz nitreux restent libres. Ainsi, on obtient de l'acide nitrique, ou de l'acide nitreux suivant que l'un ou l'autre des gaz dont ces acides se composent, domine.

Mais dans l'un et l'autre cas, les absorptions sont toujours constantes. Ainsi, l'acide nitrique est composé de 100 parties de gaz azote et de 200 de gaz oxigène, ou de 100 de gaz oxigène et de 200 de gaz nitreux. L'acide nitreux résulte de la combinaison de 100 parties de gaz oxigène et de 300 de gaz nitreux. Et si l'on ajoute que le gaz nitreux est composé de parties égales de gaz oxigène et de gaz azote, comme M. Gay-Lussac l'avoit déjà démontré, on aura une histoire complète des combinaisons de l'oxigène et de l'azote.

M. Guyton de Morveau, dans une suite d'expériences sur le diamant et les substances qui contiennent du carbone, a cherché à déterminer leur action sur l'eau, à une température très-élevée. L'eau a été décomposée par le diamant, et l'acide carbonique a été produit.

M. Sage nous a fait part des ses recherches sur la révivification de l'argent par le mercure dans le nitrate d'argent; sur un acétate d'ammoniaque retiré du bois par la distillation; sur l'analyse de la pierre calcaire nommée typographique; sur la magnésie contenue dans les co-

quilles, les madrepores, la pierre calcaire et l'arragonite; sur une mine de fer arenacée; sur une pétrification inconnue et sur l'analyse d'un bois pétrifié, cuivreux et ferrugineux. Nous regrettons que les bornes de ce rapport ne nous permettent pas d'entrer dans plus de détails sur ces nombreux travaux.

Lorsque la chimie descend des corps brutes aux corps organisés, les phénomènes qu'elle observe sont plus compliqués, et les résultats qu'elle obtient sont plus obscurs. Aussi cette branche de la chimie a-t-elle été négligée jusqu'à ces derniers temps, et la plupart des observations et des découvertes dont elle s'est enrichie sont incontestablement dues aux travaux de M. Fourcroy, de cet illustre confrère dont nous déplorons tous la perte aujourd'hui, et à ceux de son célèbre ami M. Vauquelin.

Ce dernier s'est occupé de l'analyse du tabac, dans la vue de reconnoître les principes qui caractérisent cette plante, et qui l'ont fait choisir pour les usages auxquels elle est employée, et afin d'apprécier les modifications qu'elle éprouve par les différentes préparations qu'on lui fait subir pour en faire un objet de commerce. Il résulte de ce travail que la plante du tabac à large feuille (*Nicotiana latifolia*) contient une matière animale de nature albumineuse, du malate de chaux avec excès d'acide, de l'acide acétique, du nitrate et du muriate de potasse, une matière rouge dont la nature est inconnue, du muriate d'ammoniaque, et enfin un principe âcre et volatil qui paroît être différent de tous ceux qu'on a déterminés dans le règne végétal. C'est ce principe qui donne

au tabac les qualités qu'on lui connoît; on peut le séparer de la plante par la distillation, et l'employer séparément. Le tabac préparé, a présenté de plus que la plante sans préparation, du carbonate d'ammoniaque et du muriate de chaux.

M. Vauquelin, pensant que le suc de la belladone dont les effets sur l'économie animale, sont si analogues à ceux du tabac, contenoit le principe âcre qu'il a découvert dans cette dernière plante, en a fait l'analyse; mais il n'y a trouvé qu'une substance animale, des sels à base de potasse, et une substance amère de laquelle le suc de la belladone reçoit ses propriétés narcotiques.

A l'article *Physiologie*, nous parlerons des expériences que M. Vauquelin a faites avec ce suc sur les animaux.

M. Chevreul a présenté à la classe des expériences fort étendues sur les matières végétales. Les unes ont pour objet le principe amer produit par l'action de l'acide nitrique sur les matières organisées qui contiennent de l'azote, et dont MM. Hausmann, Welther, Proust, Fourcroy et Vauquelin s'étoient déjà occupés.

M. Chevreul pense que cet amer est composé d'acide nitrique et d'une matière végétale huileuse ou résineuse; et il attribue la propriété qu'a cette substance de détonner, à la décomposition de l'acide nitrique, à la formation du gaz ammoniacal, de l'acide prussique et du gaz hydrogène huileux, etc. etc.; ce qui est conforme à une partie des observations de MM. Fourcroy et Vauquelin.

Mais avec l'amer il se produit une matière résineuse

et un acide volatil, sur lequel M. Chevreul a fait plusieurs expériences, et qu'il regarde comme ne différant de l'amer que par une petite portion d'acide nitrique.

Un second travail de M. Chevreul a pour objet les substances formées par l'action de l'acide nitrique sur les corps charbonneux ou résineux, qui ont la propriété de précipiter la gélatine. Les premières observations de ce genre avaient été faites en Angleterre par M. Hatchett, et elles avaient conduit à regarder ces substances comme analogues au tannin. M. Chevreul pense que c'est une erreur, et qu'elles diffèrent entre elles non-seulement suivant l'espèce d'acide et de matière avec lesquelles elles ont été préparées, mais encore suivant la quantité d'acide qui est entrée dans leur composition.

Enfin, poursuivant toujours le même genre d'expériences, M. Chevreul a porté ses recherches sur différens composés, formés par la réaction de l'acide sulfurique sur le camphre. Ces travaux ont tous obtenu l'approbation de la classe qui en a ordonné l'insertion dans les mémoires des savans étrangers.

Chaque année nous avons pu présenter d'heureuses applications de la chimie aux arts, et donner ainsi de nouvelles preuves des secours que nos besoins et l'industrie peuvent tirer des sciences.

M. Chaptal, à qui les fabriques doivent déjà tant de procédés utiles, nous a fait connoître d'intéressantes observations sur la distillation des vins. On voit par l'histoire qu'il donne de cet art, par la description des appareils qui y étaient employés autrefois et de ceux

qui y sont employés aujourd'hui, que les procédés de la fabrication des eaux-de-vie se sont améliorés à mesure que les appareils de la chimie se perfectionnaient. Un des plus importans de ceux qui existent dans le midi, n'est, pour ainsi dire, que l'appareil de Voulf en grand. Les lois de l'évaporation et les procédés au moyen desquels on chauffe les liquides par la vapeur, ont ingénieusement été combinés pour opérer la distillation des vins d'une manière économique ; mais les observations de M. Chaptal conduiront sans doute encore à de nouveaux perfectionnemens dans la fabrication des eaux-de-vie, et contribueront à conserver à cette branche importante de nôtre commerce la supériorité qu'elle a acquise.

Le même membre a fait l'analyse de sept échantillons de couleurs, trouvés à Pompéïa, qui lui avaient été remis par Sa Majesté l'Impératrice Joséphine. Trois de ces couleurs n'étaient que des terres colorées naturellement ; l'une verdâtre, l'autre jaune et la troisième brun-rouge; la quatrième était une pierre ponce, très-légère et fort blanche. Une cinquième, qui avait une belle teinte rose, a montré tous les caractères d'une lacque, et M. Chaptal lui a trouvé beaucoup d'analogie avec la lacque de Garance qu'il a fait connaître dans son traité sur la teinture du coton.

Les deux dernières étaient bleues ; l'une avait une teinte pâle, mais l'autre était intense et nourrie. L'analyse de ces deux couleurs a montré qu'elles étoient dues à une combinaison d'oxide de cuivre, de chaux et d'alumine, résultante d'un commencement de vitrification.

M. Chaptal observe que cette couleur est fort supérieure, en éclat et en solidité, à notre cendre bleue, et que son prix étant bien inférieur à celui du bleu de Cobalt et au prix de l'outre-mer, il seroit important de rechercher les procédés que les anciens employoient à sa fabrication.

M. Sage s'est occupé des procédés les plus propres à préparer la chaux vive, pour obtenir des mortiers solides; de la nature des différentes espèces de stucs; des moyens de donner le poli du marbre aux pierres artificielles; et enfin, d'un procédé propre à réduire la cire blanche en une sorte de savon.

Le même auteur, dans un mémoire, et MM. Guyton et Vauquelin, dans un rapport, ont communiqué des observations sur les avantages et les inconvéniens qu'il y auroit à employer le zinc dans la couverture des édifices; et sur la demande du Ministre de l'intérieur, la section de chimie a fait connoître quelles sont les fabriques qui peuvent être nuisibles à ceux qui habitent dans leur voisinage, et quelles seroient les mesures à prendre pour accorder l'intérêt des fabricans avec celui du public.

Il a été fait un rapport sur un mémoire de M. Tarry, relatif à la composition des encres à écrire et à leur perfectionnement. L'auteur est parvenu à composer une encre qui ne peut être détruite par les acides ni par les alcalis, et qui n'a que le léger inconvénient de laisser trop facilement déposer sa matière colorante. « La découverte de M. Tarry promet à la société, dit » le rapporteur, un grand avantage; celui d'introduire » l'usage d'une encre qui, n'étant pas susceptible d'être

» enlevée par les agens chimiques actuellement connus,
» n'offrira plus aux fripons l'occasion d'altérer des titres,
» comme cela n'arrive que trop souvent aujourd'hui. »

Un autre rapport sur les turquoises artificielles de M. de Sauviac, fait espérer de voir bientôt en ce genre les produits de l'art imiter exactement ceux de la nature.

Enfin une commission composée de plusieurs membres de la première classe et de plusieurs membres de la quatrième, s'est occupée de retrouver un procédé de feu Bachelier pour la composition d'un badigeon conservateur des bâtimens. On sait qu'à Paris, les édifices se couvrent très-vite d'une teinte d'un gris sale, et que ce premier changement est cause de la détérioration qu'on les voit bientôt éprouver après. Une petite araignée établit sa toile dans les creux qui se trouvent à la surface des pierres : ces toiles s'accumulent, se recouvrent les unes les autres, et avec la poussière qu'elles retiennent, elles forment cette croûte terreuse, dont nous venons de parler, où les lichens prennent racine, et qui retient l'humidité à la surface des pierres : alors les gelées occasionnent des dégradations considérables, et obligent à ce grattage qui finiroit par être lui-même une véritable dégradation.

Il s'agissoit donc de trouver un badigeon qui remplît les inégalités de la pierre sans faire épaisseur dans les angles, sans amortir les ressauts, et qui résistât aux pluies et à toutes les intempéries de nos saisons. Feu Bachelier avoit fait des essais heureux sur ce sujet. La commission aidée des renseignemens de M. Bachelier fils, est parvenue à retrouver la recette d'un badigeon qui a résisté

pendant quarante ans aux épreuves qu'on lui a fait subir, et qui donne l'espérance de pouvoir garantir nos édifices des dégradations auxquelles ils ont été exposés jusqu'à ce jour.

MINÉRALOGIE.

M. Guyton nous a fait connoître une nouvelle forme crystalline du diamant. On sait que celles que présente le plus souvent cette pierre précieuse, sont l'octaèdre régulier et le dodécaèdre à faces rhomboïdales. La variété que notre confrère a découverte, est formée de deux demi-sphéroïdes dont la position retournée, imparfaitement terminée à l'une de ses extrémités, présente, de l'autre, des angles rentrans très-prononcés qui caractérisent la forme nommée hémitrope par M. Haüy.

Le même membre ayant porté ses recherches sur la tenacité des métaux, a été conduit à de nouvelles expériences sur la diminution de pesanteur spécifique du plomb par l'écrouissement, constatée par Muschenbroek, et dont la cause étoit restée inconnue. Des flans de ce métal ont été frappés en viroles; et lorsque les coins et les virolles étoient asssez justes pour qu'il ne pût s'échapper aucune bavure, et pour que le plomb ne pût pas obéir à la facilité qu'il a de se ramollir, on l'a vu, comme tous les autres métaux, augmenter de pesanteur spécifique par cette opération.

M. Sage a fait part à la classe de ses recherches sur l'émeri et sur les substances qui pourroient le suppléer

dans le polissage. Il résulte de ses observations que la chrysolite de volcans pulvérisée peut remplacer l'émeri : tous les artistes qui l'ont employée ont été satisfaits des effets qu'ils en ont obtenus.

GÉOLOGIE.

Les observations d'où la Géologie peut tirer les plus grands résultats, sont, sans contredit, celles qui ont pour objet les animaux fossiles, mais particulièrement les animaux terrestres. M. Cuvier a continué les travaux qu'il a entrepris sur cette importante matière. Il a terminé, conjointement avec M. Brongniart, la Géographie minéralogique des environs de Paris, dont il a déjà été donné un aperçu dans le rapport des travaux de la classe, fait, l'année dernière. Il a ensuite porté ses recherches sur les brèches osseuses des côtes de la Méditerranée. Ces roches singulières, qui se trouvent à Gibraltar, près de Terruel en Aragon, à Cette, à Antibes, à Nice, près de Pise, en Corse, sur les côtes de la Dalmatie, et dans l'île de Cérigo, ont été formées dans des fissures du calcaire compact qui constitue le sol principal de ces divers lieux, et elles sont toutes composées des mêmes élémens : c'est un ciment de couleur rouge de brique qui lie confusément de nombreux fragmens d'os et des débris du calcaire où ces brèches sont renfermées. Les os contenus dans ces rochers appartiennent tous à des animaux herbivores, la plupart connus, et même encore existans sur les lieux; ils sont

mélangés à des coquilles de terre ou d'eau douce : ce qui porteroit à penser que ces brèches sont postérieures au dernier séjour de la mer sur nos continens, mais fort anciennes, cependant, relativement à nous, puisque rien n'annonce qu'il se forme encore aujourd'hui de ces brèches, et que même quelques-unes comme celles de Corse, renferment des animaux inconnus.

Les terrains d'alluvion contiennent aussi des os de rongeurs; on en a découvert dans les tourbières de la vallée de la Somme avec des bois de cerf et des têtes de bœuf, et dans les environs d'Azof, près de la Mer Noire. Ces os ont appartenu à des espèces de castors : les premiers ressemblent assez à ceux du castor commun; les autres, qui forment une tête complète, proviennent d'une espèce beaucoup plus grande que celle que nous connoissons, et M. Fischer, qui a découvert cet animal, lui donne le nom de trogontherium, que M. Cuvier adopte comme nom spécifique.

Des débris de rongeurs ont aussi été trouvés dans les schistes. On en a décrit de trois espèces. M. Cuvier en a vu la figure d'une que quelques auteurs regardoient comme ayant appartenu à un cochon d'Inde, et d'autres à un putois. M. Cuvier a bien reconnu sur ce dessin les caractères d'un rongeur; mais il n'a pu en déterminer le genre, et conséquemment l'espèce.

Parmi les os fossiles de ruminans, trouvés dans les terrains meubles, M. Cuvier a reconnu une espèce d'élan différente de celle que nous connoissons aujourd'hui. Les débris de cet animal ont été recueillis en Irlande,

en Angleterre, près du Rhin et aux environs de Paris dans des lits de marne peu profonds et qui paroissent avoir été déposés dans l'eau douce. D'autres bois, découverts abondamment aux environs d'Etampes, dans du sable surmonté par du calcaire d'eau douce, ont montré l'existence d'une petite espèce de renne, qui paroît ne plus se trouver actuellement. M. Cuvier a de plus observé des restes de bois de chevreuil, de daim et de cerf, qui ne lui ont point paru différer essentiellement des bois de nos espèces connues. « Rien, dit l'auteur, n'est » plus abondant; les alluvions récentes en ont toutes » fourni, et si l'on ne trouve pas sur ces bois fossiles » beaucoup de témoignages, c'est que, ne se montrant » qu'à de très-petites profondeurs, ils n'ont rien présenté » d'assez remarquables pour êtres notés. »

Dans les fossiles de ruminans à cornes creuses, il a reconnu des crânes d'aurochs, découverts sur les bords du Rhin, sur les bords de la Vistule, dans les environs de Cracovie, en Hollande et dans l'Amérique septentrionale : seulement, ces crânes surpassent en grandeur ceux de l'aurochs; mais, comme l'observe M. Cuvier, cette différence pourrroit bien être due à l'abondance de nourriture qu'avoient autrefois ces animaux lorsqu'ils disposoient à leur gré des vastes forêts et des gras pâturages de la France et de l'Allemagne.

Il existe une autre sorte de crâne fossile, qui ne diffère du crâne de nos bœufs domestiques, que par une taille plus grande et par des cornes autrement dirigées. Ces crânes ont été trouvés dans la vallée de la Somme, en

Souabe, en Prusse, en Angleterre, en Italie. « Si l'on
» se rappele, dit M. Cuvier, que les anciens distin-
» guoient en Gaule et en Germanie deux sortes de bœufs
» sauvages, l'urus et le bison, ne sera-t-on pas tenté de
» croire que l'une des deux étoit celle de cet article, qui,
» après avoir fourni nos bœufs domestiques, aura été
» extirpée dans son état sauvage; tandis que l'autre qui
» n'a pu être domptée, subsiste encore, en très-petit
» nombre, dans les seules forêts de la Lithuanie. »

On rencontre aussi dans les terrains meubles des os de chevaux et de sangliers; les premiers accompagnent presque toujours les éléphans fossiles, et se sont trouvés avec les mastodontes, les tigres, les hyènes et les autres os fossiles découverts dans les terrains d'alluvions; mais il n'a point été possible de renconnoître si ces os appartenoient à une espèce de cheval différente de notre espèce domestique. Les os de sangliers ont été tirés pour la plupart des tourbières et n'offrent aucun caractère qui les distingue des os du sanglier commun.

On a encore trouvé d'autres os que M. Cuvier a reconnus avoir appartenu à une espèce inconnue de lamantin. Ils ont été découverts dans les couches de calcaire marin grossier qui bordent les rives du Layon dans les environs d'Angers, et ils étoient mêlés à d'autres os, dont les uns paroissent provenir d'une grande espèce de phoque et les autres d'un dauphin.

Les squelettes de trois espèces de quadrupèdes ovipares fossiles, conservés dans des schiste calcaires, ont aussi fait l'objet des recherches de M. Cuvier.

Le premier a été trouvé dans les schistes d'Oeningen, situés sur la rive droite du Rhin, à sa sortie du lac de Constance. Il avoit été décrit et figuré comme le squelette d'un homme antediluvien; mais cette erreur avoit été réfutée. M. Cuvier a recherché le genre auquel il appartenoit, et il a prouvé, par une suite d'observations ostéologiques, que ce reptile avoit de l'analogie avec les salamandres, et qu'il devoit entrer dans le genre protée.

Le second, trouvé également dans les schistes d'Oeningen, paroît avoir appartenu au genre crapaud et se rapprocher du *bufo calamita*.

Le troisième, et le plus singulier, qui a été découvert dans les carières de l'Altmulh, près d'Aichtedt et de Pappenheim en Franconie, et qui avoit été décrit et figuré par Colini, dans les Mémoires de l'Académie de Manheim, est regardé, par M. Cuvier, comme ayant appartenu à une espèce de saurien. La longueur de son cou, celle de sa tête, son long bec, armé de dents aiguës, ses longs bras, indiquent que cet animal se nourrissoit d'insectes et qu'il les attrapoit au vol; enfin la grandeur de ses orbites doit faire supposer qu'il avoit de très-grands yeux et qu'il étoit un animal nocturne. Il n'existe actuellement, sur le globe, aucun reptile, connu des naturalistes, qui ait le moindre rapport avec cet habitant de l'ancien monde.

M. Cuvier a publié en outre un supplément à ses mémoires sur les fossiles de Montmartre, dans lequel il donne la figure et la description d'un ornitholithe beaucoup plus complet que ceux qui ont été publiés jusqu'à présent. Il

est probable qu'il appartenoit à la classe des gallinacées, et l'espèce de ce pays-ci, avec laquelle il a le plus de ressemblance par la grandeur, est la caille commune.

M. Sage nous a donné la description de quelques carpolites ou fruits pétrifiés. L'un étoit une amande de noix devenue calcaire, et trouvée à Lons-le-Saulnier; une autre paroît avoir été le fruit d'un muscadier sauvage qui croît à Madagascar et dans quelques-unes des Moluques, sa substance étoit aussi devenue calcaire; le troisième paroît avoir appartenu à un genre voisin du durion; il s'est transformé en jaspe. A ces faits nouveaux, M. Sage joint quelques-unes des observations qui avoient dèjà été faites sur les carpolites, et il conclut que les fruits pétrifiés qu'on trouve dans nos climats sont exotiques. Il entre de plus dans des détails chimiques au moyen desquels il explique comment ces pétrifications se sont opérées.

BOTANIQUE.

L'ordre et la méthode seront toujours en histoire naturelle, et particulièrement en botanique, deux objets de la plus grande importance : ils servent, à-la-fois, à établir les rapports que les êtres ont entre-eux et à guider l'observateur au milieu des productions innombrables de la nature. Les naturalistes les plus profonds en ont fait le sujet spécial de leurs études, et les connoissances que la science des méthodes exige ne pourront même jamais être embrassées que par eux.

M. de Jussieu qui peut, à si juste titre, être considéré

comme le législateur des méthodes en botanique a formé un nouvel ordre de plantes sous le nom de monimiées; les genres dont il le compose sont le *ruizia*, le *monimia*, l'*ambora* et peut-être le *citrosma*, le *pavonia* et l'*atherosperma*. Cet ordre devra être placé immédiatement avant la famille des urticées; mais à la suite des monimiées, M. de Jussieu place le *Calycanthus* réuni jusqu'alors aux rosacées; il le considère comme le type d'un nouvel ordre qui servira de passage entre les nominiées et les urticées.

M. Palisot-Beauvois a porté ses recherches sur l'ordre des graminées; il en a étudié les organes de la fructification plus exactement qu'on ne l'avoit fait avant lui, a fondé sur l'organisation de chacune de leurs parties les caractères qui doivent distinguer les graminées entre elles, et obtenu les moyens de diviser les espèces nombreuses de cet ordre en genres beaucoup plus naturels que ceux qui avoient été adoptés jusqu'à présent.

M. Labillardière nous fait connoître une plante nouvelle de la famille des palmiers dont il a fait un genre, sous le nôm de *ptychosperma*, voisin des élates et des arecas. Cette plante a été découverte par l'auteur à la Nouvelle-Irlande; elle s'élève souvent à plus de soixante pieds, et son tronc n'a cependant que deux à trois pouces de diamètre. Ces proportions lui ont fait donner le nom de *gracilis*. Il est étonnant, comme l'observe M. Labillardière, qu'un arbre aussi frêle puisse se soutenir lui-même; mais on sait que dans tous les monocotylédons la partie ligneuse la plus dure est à l'extérieur, et cette

structure donne aux plantes de cette classe une force que ne peuvent avoir celles dont les fibres les plus solides sont au centre.

M. Lamoureux a présenté à la classe un travail très-étendu sur les plantes marines. On s'étoit à peine occupé de ces singuliers végétaux; ils étoient généralement réunis d'une manière peu naturelle, et M. Lamoureux, en formant un seul groupe de toutes les plantes qui habitent les mers, paroît avoir opéré un changement utile. Le peu de progrès qu'on avoit fait dans l'étude des algues étoit cause du peu d'accord qui régnoit entre les botanistes sur les organes qui servent à la reproduction de ces cryptogames. M. Correa, dans un travail spécial sur cette matière, avoit reconnu des organes mâles et des organes femelles dans les tubercules placés aux extrémités des ramifications de ce ces plantes. C'est cette opinion que M. Lamoureux partage; mais il caractérise avec précision les différentes parties de ces organes, et répand ainsi beaucoup de clarté sur l'étude de ces singuliers végétaux. Cet auteur a de plus observé que les espèces d'algues qui croissent sur le granit ne sont jamais les mêmes que celles qui se trouvent sur la pierre calcaire ou sur les sables, et réciproquement. Quant à leur organisation intérieure, M. Decandole avoit reconnu qu'elle étoit dépourvue de vaisseaux et entièrement formée de tissu cellulaire. M. Lamoureux distingue deux sortes de cellules, les unes hexagones très-allongées, qui forment les tiges et les nervures des ramifications; les autres de la même forme que les pré-

cédentes, mais à côtés presque égaux et qui constituent la substance membraneuse ou foliacée.

M. Lamoureux pense que les premières pourroient être analogues aux vaisseaux, et les secondes au tissu utriculaire des végétaux plus parfaits. Ces travaux généraux ont conduit l'auteur à former dans cette famille plusieurs genres nouveaux qu'il a également présentés à la sanction de la classe.

M. Mirbel a continué ses recherches sur la physiologie végétale. Jusqu'à présent on avoit bien reconnu que l'albumen des graines, servoit ordinairement à nourrir la jeune plante après la germination; mais cette opinion avoit peut-être encore besoin d'être appuyée sur des observations positives, et M. Mirbel, au moyen d'une expérience aussi simple qu'ingénieuse, paroît avoir levé tous les doutes sur cette question. L'embrion contenu dans la graine de l'*allium cæpa*, se recourbe, en se développant, de manière à former un coude qui sort de terre, tandis que la plumule et la radicule y restent cachées. Si à ce point de la végétation l'on fait une marque quelconque et à égale hauteur sur les deux branches du germe, on verra la tache la plus voisine de la radicule s'élever seule dans le cas où la plante ne recevroit d'alimens que par les sucs de la terre : si au contraire, elle n'est entretenue que par l'albumen de la graine, la tache de la plumule s'élevera au dessus de l'autre; enfin, les taches s'éleveront à peu près également, si la terre et la graine concourent au développement du germe. C'est ce dernier phénomène qui a lieu;

il cesse lorsque l'albumen est entièrement absorbé : alors la jeune plante a assez de force pour puiser dans la terre ou dans l'atmosphère la nourriture dont elle aura désormais besoin.

Ce mémoire est accompagné d'observations intéressantes sur la germination de l'asperge, et sur la manière dont les feuilles de cette plante, d'abord engaînantes comme toutes celles des monocotylédons, deviennent, par l'accroissement de la tige, latérales et opposées, et ensuite latérales et alternes.

Dans un autre mémoire, M. Mirbel a entrepris de nouvelles recherches sur la germination du Nélumbo. Les botanistes n'étoient point d'accord sur la classe à laquelle cette plante devoit être rapportée, et sur la nature des deux lobes charnus au milieu desquels elle prend naissance. Les uns n'observant point de radicules se développer dans la germination de cette plante, croyoient qu'elle en étoit entièrement dépourvue; d'autres regardoient les lobes dont nous venons de parler, comme des racines, et d'autres comme des organes particuliers et analogues au vitellus. C'est au moyen d'observations anatomiques, que M. Mirbel cherche à lever les doutes que font naître ces diverses opinions. Il reconnoît d'abord au Nélumbo tous les caractères qui distinguent les plantes à plusieurs cotylédons, des plantes à un seul cotylédon. Il trouve ensuite dans les lobes de cette plante des vaisseaux analogues à ceux des cotylédons, et il observe au point où ces lobes se joignent, d'autres vaisseaux qui se réunissent de la même manière

que ceux qui caractérisent les radicules dans les embrions pourvus de cet organe ; et il conclut que le Nélumbo ne diffère point essentiellement des autres plantes de sa classe.

M. Corréa, en regardant avec M. Mirbel le Nélumbo comme une plante à deux cotylédon, ne partage point son opinion sur la nature des lobes ; il croit, avec Gaertner, que ces organes ont beaucoup d'analogie avec le vitellus, et il les compare aux tubercules charnus des racines des orchis. Les plantes, comme l'observe ce savant botaniste, ont une organisation double et relative, d'une part, à la terre où elles doivent s'enraciner, et de l'autre, à l'air où leur feuillage se développe. Les racines sont destinées à la végétation descendante, et c'est au point où ces deux systèmes d'organisation se réunissent, que les cotylédons sont ordinairement placés : or, les lobes du Nélumbo sont à la partie la plus inférieure de la plante, et conséquemment dans le système de la végétation descendante ou des racines. Cette manière d'envisager le Nélumbo, ôteroit, à la vérité, les moyens d'y reconnoître les cotylédons ; mais l'exemple de beaucoup d'autres plantes privées de ces organes, montre qu'ils ne sont point du tout essentiels à la végétation, et que les caractères qu'on en a tirés pour partager le règne végétal en trois divisions, sont insuffians, et qu'ils doivent être remplacés par ceux que donnent la direction des vaisseaux et les rayons médullaires.

C'est aussi dans la vue de détruire les doutes que font

naître les différentes opinions de plusieurs savans botanistes, que M. Poiteau a entrepris un travail qu'il a soumis à la Classe, sur la germination des graminées. On n'étoit pas d'accord sur la partie de la graine de ces plantes, qui devoit être regardée comme le cotylédon : mais observant que l'écusson, que Gaertner prenoit pour un vitellus et M. Richard pour le corps de la radicule, étoit placé dans le point où la plumule et la radicule se séparent, il considère cet organe comme un véritable cotylédon. Ces recherches ont, en outre, conduit M. Poiteau à une observation qui, pour être accidentelle n'en est pas moins intéressante, puisqu'elle se lie à un des phénomènes les plus généraux de la végétation. Au moment où la radicule des graminées se développe, elle prend la figure d'un cône et représente la racine principale ou le pivot des autres plantes; mais bientôt, et dès que les racines latérales ont un certain accroissement, ce cône s'oblitère et se détruit, de sorte qu'aucun plant de cette famille n'a de pivot. Et comme M. Poiteau a fait la même observation sur plusieurs autres plantes à un seul cotylédon, on peut supposer que cette substitution de racines nombreuses et secondaires à une principale a lieu, parce que chaque faisceau de fibre des monocotylédons à sa racine propre : ce qui rappelle naturellement la belle observation de M. du Petit-Thouars, sur l'accroissement en grosseur du Dracena, dont il a déjà été question dans les rapports des années précédentes.

ZOOLOGIE.

Les recherches de M. Cuvier sur les animaux fossiles ont ordinairement exigé des discussions préliminaires, sur les espèces admises par les naturalistes, qui ont presque toujours été la source de quelques observations utiles à l'avancement de la Zoologie proprement dite. C'est ainsi que dans son Mémoire sur l'ostéologie du lamantin, en considérant l'organisation des mammifères amphibies, il est conduit à séparer des phoques et des morses, les dugons, les lamantins et l'espèce décrite par Steller, qui avoit été confondue avec ces derniers animaux. Ces trois genres forment une famille qui se distingue entre autres par l'absence totale des extrémités postérieures et par des dents d'herbivores: il réduit à deux les quatre espèces de lamantins établies par Buffon, et donne des caractères exacts à celles qu'il admet dans ces différens genres.

Dans un autre Mémoire sur les chats, le même auteur donne les caractères ostéologiques de la tête des principales espèces de ce genre, et il en fait connoître une qui n'avoit point été reconnue par les naturalistes modernes. Cette nouvelle espèce a reçu le nom de Léopard, qui étoit devenu synonyme de Panthère, faute de pouvoir en faire une application exacte. Elle diffère de cette dernière espèce par une taille moindre et des taches plus nombreuses.

M. Geoffroy avoit depuis long-temps formé sous le

nom d'Atèles, une division particulière des singes dépourvus de pouces aux mains, que jusqu'alors on avoit confondu avec les Sapajous, par la considération de la queue prenante qui est commune à tous ces animaux. Il en a ajouté deux espèces nouvelles à celles qu'il avoit déjà fait connoître, et en a donné des figures et des descriptions. L'une, à laquelle il donne le nom d'*Aracnoïde* et qui est fauve, avoit seulement été indiquée par Edwards et Brown. L'autre nommée *Encadrée* est entièrement nouvelle; elle est noire avec de poils blancs autour de la face.

Le même membre a donné la description de deux oiseaux, l'un mal connu, l'autre tout-à-fait nouveau: celui-ci a des rapports avec le *Corvus nudus* et avec le *Corvus calvus;* mais ils diffèrent assez pour former trois genres distincts, que M. Geoffroy établit sous les noms de *Céphaloptère* qu'il donne à sa nouvelle espèce, de *Gymnoderus* qu'il applique au *Corvus nudus*, et de *Gymnocephalus*, par lequel il distingue le *Corvus calvus.*

Le *Céphaloptère* est noir, avec une huppe très-élevée qui retombe en avant sur le bec, et une sorte de fanon aussi couvert de plumes. Les unes et les autres de ces plumes sont d'un violet métallique.

Le second oiseau, qui est du Mexique comme le précédent, avoit été décrit, mais imparfaitement par Marcgrave, sous le nom de *Cariama*. M. Geoffroy l'avoit considéré, d'après cette description, comme voisin de l'Agami; mais aujourd'hui, qu'il se trouve dans la collection du Museum d'Histoire naturelle, ce naturaliste le regarde

comme devant former un genre à part, auquel il donne le nom de *Microdactilus*.

Les tortues ont aussi fait pour M. Geoffroy le sujet d'un mémoire intéressant. Ayant observé en Egypte la tortue du Nil, indiquée par Forskal, il a été conduit à former un genre particulier de toutes les autres tortues qui, comme celle-ci, ont l'extrémité des côtes libres et une carapace molle. Il les a nommées *trionix*, et en a ajouté plusieurs espèces nouvelles à celles qui étoient déjà connues. M. Brongniart, dans son beau travail général sur les reptiles, avoit joint celles-ci à ses *Émydes*, en observant toutefois les caractères qui les distinguoient des autres espèces de ce genre, dont la carapace est complète et recouverte d'écailles. M. Geoffroy réunit en outre au genre chelys de M. Duméril, la tortue décrite par Bartram sous le nom de tortue aux grandes écailles molles, et découverte par ce voyageur dans l'Amérique septentrionale.

Ces animaux offrent un exemple frappant des progrès de la zoologie dans ces derniers temps. Le nombre des tortues connu il y a vingt ans, étoit à peine de trente, et aujourd'hui il est au moins du double plus grand. C'est ce que nous apprend, entre autres choses, le travail de M. Schweiger, dans lequel il a entrepris de donner une monographie générale de toutes les tortues. Ce bel ouvrage, accompagné de descriptions exactes d'une synonymie très-étendue, et de figures dessinées avec beaucoup de soin par M. Oppel, a été soumis à l'examen de l'Institut, dont il a obtenu les suffrages.

La classe des poissons s'est aussi enrichie de beaucoup

d'espèces nouvelles. MM. Risseau et Delaroche, qui sont particulièrement occupés de cette branche de zoologie, nous ont communiqué leurs observations. Le premier les a faites sur les poissons du golfe de Nice, et l'autre sur les poissons de la mer qui environne les îles Baléares.

M. Delaroche a fait des recherches intéressantes sur la profondeur à laquelle chaque espèce de poisson vit habituellement, sur la pêche de ces animaux et sur la vessie natatoire. Nous parlerons bientôt plus en détail de cette dernière partie de son travail.

PHYSIOLOGIE.

Les expériences physiologiques sont sans contredit celles qui exigent le plus de loisirs, le plus de patience, et où il est plus d'ifficile d'apporter cette exactitude rigoureuse, si importante et si nécessaire dans les sciences. Cependant M. de Humboldt, au milieu d'un voyage où les obstacles et les dangers se renouveloient chaque jour, s'est occupé d'expériences délicates sur plusieurs des phénomènes de la vie. Il nous a communiqué les recherches qu'il a faites en Amérique sur la respiration du crocodile à museau aigu; elles l'ont conduit à reconnoître, « que cet animal, malgré le volume de ses bron-
» ches et la structure de ses cellules pulmonaires,
» souffre dans un air qui ne se renouvelle pas; que sa
» respiration a beaucoup de lenteur; dans l'espace d'une
» heure et quarante-trois minutes, un jeune individu
» de trois décimètres de longueur n'a enlevé, dans

» l'air ambiant, qu'à peu près vingt centièmes cubes » d'oxigènes ».

Depuis son retour en France, M. de Humboldt, conjointement avec M. Provençal, a fait d'autres recherches sur la respiration des poissons. Les expériences de ces savans, qui sont nombreuses, et qui ont une exactitude que comportent rarement de tels sujets, les ont conduits à des résultats assez importans.

Les expériences de Spallanzani et celle de notre confrère M. Sylvestre, avoient démontré que ce n'est point en décomposant l'eau que les poissons respirent, comme quelques physiciens l'avoient cru, mais en enlevant l'oxigène mêlé ou dissous dans ce liquide, ou en venant à la surface de l'eau le recueillir immédiatement dans l'atmosphère. C'étoit à ces observations que se bornoient nos connoissances sur cette matière : on n'avoit point encore établi la nature et la quantité des gaz qui étoient absorbés par ces animaux dans l'acte de la respiration, ni les resultats de ces phénomènes. Les expériences de MM. de Humboldt et Provençal, ont pour but principal ces questions encore indécises. Pour cet effet, ils considèrent les poissons dans leur état naturel respirant l'eau des rivières; puis ils examinent l'action des branchies sur l'eau ambiante imprégnée d'oxigène et d'azote, d'acide carbonique, ou d'un mélange d'hydrogène et d'oxigène, et ils traitent ensuite des changemens que produisent les poissons sur les différens fluides aériformes dans lesquels on les plonge.

Sept tanches (*cyprinus tinca*) ont été placées sous une

cloche remplie d'eau de rivière, et qui en contenoit 4000 centimètres cubes; après huit heures et demie de respiration les poissons ont été retirés de cette eau, et l'analyse qu'on a faite de l'air qui s'y trouvoit encore, a montré que dans cet espace de temps les poissons avoient absorbé 145.4 d'oxigène, 57.6 d'azote; et que 132 d'acide carbonique avoit été produit; d'où il résulte, comme l'observent nos auteurs, « que dans la respiration des pois-
» sons soumis à cette expérience, le volume de l'oxigène
» absorbé excédoit seulement de deux tiers le volume de
» l'azote disparu, et que plus d'un huitième du premier
» n'avoit pas été converti en acide carbonique ».

Les poissons souffrent dans l'eau entièrement purgée d'air; et après une vingtaine de minutes, ils tombent au fond du vase sans mouvement. Dans l'oxigène pur, ces animaux paroissent respirer avidement et écarter davantage leurs branchies. Dans l'azote et l'hydrogène, ils tiennent leurs branchies fermées, semblent craindre le contact de ces gaz, et meurent bientôt après avoir été plongés dans l'eau qui les contient. L'acide carbonique enfin les tue en peu de minutes; mais les poissons n'absorbent pas seulement par leurs branchies l'oxygène et l'azote; toute la surface de leur corps a la faculté d'agir sur ces gaz et de se les assimiler. Après avoir retiré les poissons de l'eau saturée des gaz délétères et en avoir fait l'analyse, on a trouvé dans ce liquide quelques portion d'acide carbonique; mais comme il n'y avoit point eu d'oxigène absorbé, il est vraisemblable, comme l'observent MM. de Humboldt et Provençal, que cet acide

n'étoit point le résultat de la respiration, mais qu'il avoit été exhalé par la surface du corps. Tels sont les points principaux de ce travail, qui contient beaucoup d'autres observations utiles et d'aperçus intéressans sur la physiologie des poissons, que les bornes de cette notice ne nous permettent point de rapporter.

Nous ne pouvons cependant, en parlant de la respiration, passer sous silence un Mémoire que M. Provençal a lu à la classe, sur la respiration des mammifères auxquels on a coupé les nerfs de la huitième paire. Nous avons déjà parlé des expériences qui ont été faites pour constater l'influence de ces nerfs sur la respiration; elles démontrent cette influence : mais il restoit des doutes sur la manière dont elle s'exerce. M. Provençal a voulu reconnoître si l'animal auquel on a coupé les nerfs de la huitième paire absorbe autant d'oxigène, et produit la même quantité d'acide carbonique avant qu'après l'opération. De nombreuses expériences, faites avec soin, ont montré que l'animal, après la section des nerfs, absorboit moins d'oxigène, et produisoit moins d'acide carbonique qu'avant cette section; mais ces changemens ne se produisent que par gradation. D'abord, la respiration ne paroît point affoiblie; bientôt elle s'exécute avec moins de force; enfin, ces phénomènes cessent tout à fait, mais vraisemblablement par la cessation des fonctions mécaniques de la poitrine. Il étoit intéressant de vérifier si la chaleur animale diminueroit dans les mêmes proportions que la respiration; aussi M. Provençal a-t-il fait toutes les expériences nécessaires pour résoudre cette

question ; et il paroît qu'en effet la température diminue bientôt après que les nerfs ont été coupés, et que la respiration est ralentie.

Les fonctions des organes dont l'action vient de nous occuper sont bien connues ; mais il existe chez les animaux un certain nombre d'autres organes dont les fonctions ne sont point évidentes, et sur l'usage desquels les opinions des physiologistes sont encore partagés. De ce nombre est la vessie natatoire des poissons. Cet organe singulier, qui ne se trouve que dans cette classe d'animaux, ne se rencontre cependant pas dans toutes les espèces ; et il montre tant de variétés dans son organisation, qu'au premier aperçu on pourroit croire que sa destination chez les unes n'est pas la même que chez les autres. Généralement cette vessie est remplie d'air et composée de deux membranes. Quelquefois elle communique avec l'estomac par un canal ; d'autrefois, elle n'a aucune communication apparente, et dans ce cas, elle contient un organe particulier d'une couleur rouge et d'une structure lamelleuse, suivant les observations de M. Duvernoy. Cependant il y a des vessies qui sont pourvues de ces corps rouges, et qui ont un canal ; et quelques-unes, mais en plus petit nombre, ont des muscles propres. Les opinions des auteurs varient sur le but de cet organe et de ses différentes parties : en général on a pensé qu'il servoit à faire changer la pesanteur spécifique des poissons, et que, pour cet effet, l'animal, au moyen de ses muscles, comprimoit cet organe et en faisoit varier les dimensions, sui-

vant qu'il avoit besoin de rester en équilibre, de monter ou de descendre dans le milieu où il se trouvoit. Quant à la manière dont l'air y arrive, on a cru que c'étoit au moyen du canal, dans les vessies qui en sont pourvues, et au moyen des glandes par sécrétion, dans celles qui n'ont point de communication au dehors. De plus, on sait, par les expériences de M. Biot, que cet air est un mélange d'oxigène et d'azote, et que sa nature varie suivant que le poisson vit à des profondeurs différentes; de sorte que les espèces qu'on retire du fond de la mer, contiennent une fort grande proportion d'oxigène, tandis que celles qui viennent de la surface donnent plus d'azote. M. Delaroche ayant recueilli un très-grand nombre de poissons dans la Méditerranée, a examiné leur vessie natatoire et en a décrit plusieurs qui ne l'étoient point encore; il a vérifié les expériences de M. Biot, et a été conduit, sur les usages de la vessie, à peu près aux mêmes résultats que les naturalistes qui s'en étoient occupés avant lui.

Cette vessie a aussi fait le sujet de quelques recherches pour MM. de Humboldt et Provençal. Ils ont voulu voir quels étoient les rapports de cet organe avec la respiration. Les résultats principaux de leurs expériences sont que l'air contenu dans la vessie natatoire, ne dépend point de l'air mis en contact avec les branchies; que l'absence de cet organe ne nuit point à la respiration, mais qu'elle paroît nuire à la production du gaz acide carbonique. Enfin, ils ont vu des tanches auxquelles la vessie natatoire avoit été enlevée, nager, s'élever et s'en-

foncer dans l'eau avec autant de facilité que celles qui en étoient pourvues.

Ces travaux ont donné lieu à un rapport très-détaillé de M. Cuvier, où il fait connoître toutes les recherches qui ont été entreprises sur la vessie natatoire des poissons, et où il traite de nouveau les diverses questions qu'a fait naître ce sujet. Après une discussion approfondie, il arrive aux résultats généraux dont nous avons parlé plus haut, montre tout ce qui reste encore de douteux sur cette matière.

Il est encore d'autres expériences dont les physiologistes pourroient tirer le plus grand parti. Ce sont celles qui auroient pour but l'action qu'exerceroient les substances des divers règnes sur le corps des animaux, lorsqu'on les introduiroit dans la circulation. La médecine, à la vérité, offre beaucoup d'observations de ce genre; mais elles sont encore peu nombreuses en comparaison de celles qui pourroient être tentées.

MM. Magendie et Delisle ont fait part à la classe d'expériences faites sur les animaux, au moyen de la matière avec laquelle les naturels des îles de Java et de Borneo empoisonnent leurs flèches. Cette substance est extraite de l'*Upas tieute*, plante voisine des Apocins. Les expériences de ces jeunes médecins ont été nombreuses, et la plupart faites sur des chiens. Soit qu'on ait introduit ce poison dans le corps de l'animal par les vaisseaux absorbans; soit qu'on l'ait versé dans des plaies ou dans les intestins, les mêmes phénomènes ont eu lieu : les animaux sont morts dans des convulsions

générales. Cette substance paroît exciter particulièrement la moële épinière, et ne pénétrer dans le corps que par la circulation ; elle ne semble agir que très-indirectement sur le cerveau, et elle donne ainsi la preuve qu'il existe entre ces deux parties essentielles du système nerveux une indépendance que l'anatomie ne démontroit point.

M. Vauquelin a fait aussi quelques expériences de ce genre : à la suite de son analyse chimique du suc de la belladone, il parle de l'effet de cette substance sur les animaux. Ceux auxquels il en avoit fait avaler, tomboient dans une ivresse, dans un délire absolument semblable à celui que produit l'opium.

M. Sage a rapporté, sur le même sujet, d'autres expériences que le hazard lui a procurées ou qu'il a recueillies dans les auteurs, et qui confirment l'action de ce suc sur le système nerveux, et particulièrement sur le cerveau.

Un jeune médecin, dont nous avons déjà eu occasion de parler dans nos rapports annuels, M. Nysten, a cherché à reconnoître l'effet de différens gaz injectés dans les vaisseaux sanguins des animaux ; il a mis en usage la plupart de ceux qui sont connus : l'air atmosphérique, le gaz oxigène, les gaz oxidulé d'azote, acide carbonique, oxide de carbone, phosphoré, hydrogéné, etc., ne sont nullement délétères. Les gaz muriatique oxigéné, acide nitreux et ammoniac, semblent agir en irritant très-violemment l'oreillette droite et le ventricule pulmonaire. Les gaz hydrogène sulfuré, oxide

d'azote, azote, nuisent à la contractilité de ces parties; d'autres enfin changent tellement la nature du sang, que la respiration ne peut plus le convertir de veineux en artériel, etc., etc.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

M. Desessarts a lu l'histoire d'une maladie épidémique, qui a régné en même temps dans trois villages voisins. Quoique dépendante généralement de l'intempérie des saisons et de la mauvaise qualité des fruits, cette épidémie présenta une variété sensible dans la nature et dans l'intensité des symptômes, ce qui nécessita des modifications essentielles dans le traitement. L'auteur fait voir que ces différences dépendoient de l'exposition particulière à chacun de ces villages, de la qualité de leur terrain respectif, de leurs productions et du genre de vie de leurs habitans.

M. Sage a présenté à la classe des réflexions sur les moyens de remédier à la piqûre faite par l'aiguillon de la vive, et une description des effets du venin de la tarentule, avec l'exposé des moyens employés en Espagne, pour y remédier. L'un et l'autre de ces moyens consiste à faire usage de l'alkali volatil, intérieurement et extérieurement.

M. Tenon continue d'enrichir la chirurgie des observations de sa pratique. Il a communiqué à la classe trois mémoires, l'un sur l'exfoliation des os, le second, sur un trépan au crâne, et le troisième sur quelques hernies.

Dans le premier, il recherche si les os des grandes extrémités du corps s'exfolient à la suite de l'amputation; et il résulte de ses nombreuses expériences sur des chiens, des lapins et des moutons, qu'à la suite de toutes les amputations, l'extrémité dénudée des os longs s'exfolie ainsi qu'il arrive aux os plats dénudés, avant qu'ils soient revêtus d'une cicatrice. Dans le second, il donne la description de tous les phénomènes qui se sont passés dans la guérison d'une plaie à la tête, à la suite de laquelle le trépan fut appliqué, et qui exigea cent cinquante-un jours de traitement.

Dans le troisième, il décrit un moyen ingénieux qu'il a mis en usage pour la réduction de deux hernies crurales, et fait des observations sur l'opération d'une hernie inguinale. Pour parvenir à la réduction de ces deux hernies crurales, « je fis monter, dit M. Tenon, sur le lit » le chirurgien herniaire, le fis placer entre les genoux » du malade, les lui fis élever le plus haut qu'il put; les » oreillers étant retirés, j'employai une autre personne » à tenir la jambe et les pieds, du côté de la hernie étendus, et à déverser le gros orteil fortement en dedans, » ainsi que le genou et la cuisse. » Quand les choses furent arrivées à cet état, M. Tenon parvint par degré, à faire rentrer dans le ventre les intestins; de sorte que le malade fut dispensé de supporter l'opération et M. Tenon de la faire.

M. Pelletan nous a fait part d'intéressantes observations sur les anévrismes et les opérations chirurgicales que ces maladies exigent.

M. Larrey a soumis à la classe un Mémoire sur lequel il a été fait un rapport, et qui a pour objet la nécessité, dans les plaies d'armes à feu, suivies de gangrène des membres, de ne pas attendre que la gangrène soit bornée pour faire l'opération.

AGRICULTURE ET ÉCONOMIE.

Il a été fait à la classe, au nom d'une commission, par M. Sylvestre, un rapport sur l'ouvrage de M. Yvart, intitulé : *Moyens d'améliorer l'agriculture par des assolemens.* « La science des assolemens a pour objet, dit » le rapporteur, de rendre, un terrain susceptible de » produire constamment de la manière la plus profi- » table et sans détériorer. Cet ouvrage, ajoute-t-il, rem- » plit le but important que l'auteur s'est proposé, et » mérite l'approbation de la classe ».

M. de Cubière a lu un Mémoire sur le cyprès-chauve; il a pour objet d'éclairer les propriétaires cultivateurs, de leur donner des idées sur la végétation de ce bel arbre, et de leur faire connoître tous les avantages qu'ils pourroient retirer de sa culture. Le rapport qui a été fait de ce travail, par notre confrère M. Mirbel, vote pour M. de Cubière les encouragemens de la clase.

M. Leblanc qui a passé plusieurs années en Amérique, nous a communiqué ses vues sur la facilité de naturaliser la vigogne dans les Alpes et dans les Pyrénées, et sur l'emploi qu'on pourroit faire de la laine de cet animal.

M. Poyféré-de-Ceré nous a lu une notice sur le lavage des laines superfines en Espagne, et sur le lavoir d'Alfaro près de Ségovie; on y trouve une méthode prompte, facile et économique de laver les laines, et de construire les lavoirs.

Enfin, notre confrère M. Percy, ayant recueilli, en Espagne, des observations curieuses sur la fabrication des amphores et des alkarazas, dont les Espagnols se servent pour conserver leurs liquides, ou pour faire rafraîchir leurs boissons, il nous les a communiquées en ajoutant des réflexions importantes sur l'utilité que nous pourrions retirer de ces vases, et sur l'influence qu'ils exercent sur les liquides qu'ils contiennent.

PRIX

PROPOSÉ AU CONCOURS POUR L'ANNÉE 1812,

Le 2 janvier 1810.

LA Classe propose, pour le sujet du prix de mathématiques qu'elle décernera dans la séance publique du mois de janvier 1812, la question suante :

Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur, et comparer le résultat de cette Théorie à des expériences exactes.

Le prix sera une médaille de la valeur de 3,000 francs.

Le terme du concours est fixé aux premier octobre 1811.

Le résultat en sera publié le premier lundi de janvier 1812.

Les Mémoires devront être adressés, francs de port, au secrétariat de l'Institut, avant le terme prescrit, et porter chacun une épigraphe ou devise qui sera répétée, avec le nom de l'auteur, dans un billet cacheté joint au Mémoire.

DISTRIBUTION DE PRIX.

PRIX DE MATHÉMATIQUES.

La Classe avoit proposé en 1808, pour sujet du prix de Mathématiques qu'elle devoit adjuger cette année, la question suivante :

Donner, de la double réfraction que subit la lumière en traversant diverses substances critallisées, une théorie mathématique vérifiée par l'expérience.

La classe a décerné le prix, valeur d'une médaille d'or de 3,000 francs, au Mémoire enregistré sous le nº 3, portant cette épigraphe :

Ita res accendunt lumina rebus.
Lucrèt, lib. I.

L'auteur de ce Mémoire est M. Malus, lieutenant-colonel au Corps impérial du Génie, membre de l'Institut d'Egypte.

La classe, en couronnant ce Mémoire, a cru devoir

distinguer honorablement le Mémoire n° 1, ayant pour devise ce vers d'Horace :

Indiciis monstrare recentibus abdita rerum.

L'auteur de ce Mémoire est M. Kramp, doyen de la Faculté des Sciences à l'Académie de Strasbourg.

PRIX DE GALVANISME.

La classe a partagé le prix annuel de 3,000 francs, fondé par S. M. l'Empereur et Roi, pour la meilleure expérience qui sera faite dans le cours de chaque année sur le fluide galvanique, entre MM. Gay-Lussac, membre de l'Institut, et Thenard, professeur au collége de France, à cause des nombreuses expériences qu'ils ont faites en commun.

PRIX D'ASTRONOMIE.

La médaille, fondée par M. Lalande pour être donnée annuellement *à la personne qui*, *en France ou ailleurs*, *les seuls membres de l'Institut exceptés*, aura fait l'observation la plus intéressante, ou le Mémoire le plus utile aux progrès de l'Astronomie, vient d'être décernée à M. Gauss, correspondant de l'Institut, auteur d'un savant ouvrage sur *la Théorie des Planètes*, et les moyens d'en déterminer les orbites dès la première apparition, d'après trois observations, et sans aucune connoissance préliminaire d'aucun des élémens.

FIN DE L'HISTOIRE.

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE VOLUME.

HISTOIRE.

MÉMOIRES.

MÉMOIRES

DE LA CLASSE

DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

RECHERCHES

Sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon,

Par M. Biot.

Lu le 8 août 1808.

Les physiciens et les astronomes ont depuis long-temps remarqué que les objets qui sont vus très-près de l'horizon envoient quelquefois à l'observateur deux images, l'une directe, l'autre renversée. Personne n'est plus à portée que les marins d'observer ce phénomène; aussi est-il bien connu d'eux, et ils le désignent par un nom très-expressif, en l'appelant le *mirage*, parce qu'en effet il semble alors que les objets se réfléchissent comme sur un miroir. Picard décrit quelques apparences de ce genre dans

son voyage à Uranibourg. On en trouve aussi quelques-unes dans les mémoires des premiers Cassinis, mais il ne paroît pas qu'on en ait fait un objet spécial de recherches avant un mémoire de M. Huddart, inséré dans les *Transactions philosophiques* de 1797. M. Huddart rapporte qu'il a observé dans certaines circonstances que des vaisseaux à la voile présentoient, outre leur image directe, une image renversée. Il a vu aussi des sommets de collines qui paroissoient détachés de leur base, et suspendus dans l'air. Il attribue ce phénomène à l'évaporation qui, rendant les couches inférieures de l'air plus humides et par conséquent moins denses que les couches supérieures, doit, selon lui, faire prendre aux rayons lumineux une courbure convexe vers la terre, et par conséquent produire une seconde image de l'objet. Mais M. Huddart ne faisoit pas attention que la différence des densités ne suffit pas pour déterminer cette courbure. La condition réellement nécessaire est la différence des pouvoirs réfringens. Or, le pouvoir réfringent des gaz ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi de leur nature et de leur composition chimique. D'après les expériences que l'on a faites sur la réfraction de l'eau, soit à l'état liquide, soit à l'état de vapeur, soit enfin à l'état de décomposition en la réduisant à ses gaz constituans, on doit conclure que le pouvoir réfringent de la vapeur aqueuse est, à force élastique égale, très-peu différent de celui de l'air; même s'il falloit assigner le sens de la différence, il seroit assez probable qu'il le surpasse d'une petite quantité. L'introduction de la vapeur aqueuse

dans l'air atmosphérique paroîtroit donc propre à augmenter le pouvoir réfringent plutôt qu'à le diminuer ; par conséquent ce n'est pas à cette cause que l'on doit attribuer les phénomènes du mirage, et les images renversées des objets.

Il existe aussi dans les Transactions philosophiques pour 1789, un mémoire de M. Vince, où l'on trouve décrits un grand nombre de phénomènes de ce genre, des plus singuliers que l'on ait jamais vus. Le jour où l'auteur les aperçut avoit été très-chaud ; le soir le temps fut très-lourd ; le ciel étoit clair avec quelques nuages. En regardant des vaisseaux à la voile à diverses distances, M. Vince s'aperçut que quelques-uns d'entre eux présentoient des images renversées. Il les observa avec un télescope, et reconnut bientôt qu'en raison de leur éloignement et du côté de la mer où ils se trouvoient, ils présentoient des apparences très-diverses et très-variables d'un instant à un autre. Il vit parfois trois images, une renversée et deux droites, quelquefois deux seulement, et l'image renversée au-dessous de l'autre ou au-dessus. Toutes ces apparences changeoient à mesure que les vaisseaux s'approchoient ou s'éloignoient des limites de l'horizon. M. Vince cherche à expliquer ces phénomènes par des variations multipliées de densité dans les différentes couches d'air ; et, en effet, s'il ne s'agissoit que d'expliquer la possibilité de la formation des images, on trouveroit une infinité de lois qui rempliroient cette condition. Mais cela ne suffit pas pour faire connoître la véritable cause du phénomène ; car on peut mener de l'objet à

l'observateur, une infinité de trajectoires, qui toutes lui amèneront les rayons sous l'inclinaison où ils arrivent, et dont aucune ne sera la trajectoire véritable. Le caractère d'une véritable théorie doit être d'expliquer les rapports de position de ces diverses images, et les mouvemens simultanés qu'on y remarque lorsque l'objet s'avance ou s'éloigne. C'est à quoi j'espère être parvenu. M. Vince se représente toutes les trajectoires comme concaves vers la surface de la mer, et en cela analogues à la réfraction ordinaire. Il est au contraire extrêmement probable que leur courbure n'étoit pas dirigée du même côté dans toute l'étendue de leur cours; car, dans les phénomènes de ce genre, il arrive que le rayon lumineux suit une courbe sinueuse et serpentante, comme on le verra par plusieurs expériences que je rapporterai dans la suite de ce mémoire.

Il est fâcheux que M. Vince se soit contenté d'observer ces curieux phénomènes avec le télescope sans les mesurer, sans prendre, avec des instrumens, la dépression des images et celles de l'horizon de la mer.

Le phénomène du mirage le plus apparent, le mieux constaté, et qui a le plus attiré l'attention générale, est celui que M. Monge a décrit et expliqué dans les mémoires de l'Institut du Caire. Lorsque les soldats Français entrèrent dans le désert de l'Egypte, toute l'armée fut témoin d'un effet d'optique aussi nouveau que remarquable. Le pays qui forme une vaste plaine horizontale, parut tout couvert d'eau. Les villages bâtis sur de petits tertres paroissoient au-dessus de cette inondation, et

présentoient de loin, outre leur image directe, une image renversée. Les soldats séduits par l'illusion, couroient vainement vers cette eau imaginaire pour étancher la soif qui les dévoroit. Le rivage fuyoit devant eux; et l'image de l'eau reculant sans cesse, leur laissoit voir à sa place un sol aride et desséché.

M. Monge attribue ce phénomène à l'excessive chaleur du sol qui, dilatant les couches inférieures de l'air contiguës à sa surface, fait que la densité de l'air va en croissant de bas en haut jusqu'à une certaine hauteur au lieu d'aller en diminuant suivant la loi ordinaire de superposition des couches, et comme il conviendroit pour l'équilibre dans une température uniforme. On ne peut nier en effet que ce ne soit la véritable cause du phénomène. Les rayons lumineux infléchis dans ces couches inférieures de densités variables y donnent des trajectoires convexes vers la surface du sol, et produisent des images renversées. M. Monge compare cette inversion à celle que produit la réflexion intérieure dans les milieux transparens homogènes. En effet, cette comparaison rend la chose sensible, et elle seroit tout-à-fait exacte si les couches de densité variable n'avoient qu'une épaisseur infiniment petite. Quant à l'apparence d'une surface d'eau, M. Monge l'explique très-bien par la réflexion du ciel ou, pour parler exactement, de toutes les particules de l'atmosphère, qui se trouvant très-près de l'horizon, envoient aussi à l'observateur leurs images renversées comme feroient des objets terrestres, et en se réfléchissant autour de ces objets comme si c'étoit sur une eau

tranquille, concourent à compléter l'illusion. Nous verrons bientôt que le calcul confirme cette explication en y faisant quelques modifications très-légères; mais surtout il ne sauroit lui enlever une de ses particularités les plus remarquables qui est d'avoir été trouvée à la vue même du phénomène, au milieu d'un camp, parmi les hasards de la guerre et d'une vie pleine de dangers.

Dans le même temps que M. Monge expliquoit le mirage en Egypte, M. Wollaston en Angleterre publioit un très-beau travail sur le même sujet. Cet excellent physicien attribue aussi les doubles images à une densité de l'air croissante de bas en haut par l'effet de la chaleur du sol, et il prouve par des expériences thermométriques très-bien faites, que dans les circonstances où l'on observe de doubles images, cet état de l'air a toujours lieu. Il imite ces phénomènes et les agrandit en les observant sur des corps échauffés, à travers des liquides de densité inégale, et même sur la surface d'un fer rouge. Et non-seulement il décrit leurs apparences, leurs variétés, mais il les mesure avec des instrumens, et donne dans plusieurs cas les réfractions que les rayons éprouvent. Ces résultats sont très-précieux pour vérifier la théorie mathématique du phénomène, et l'on verra bientôt que j'en ai fait usage. Quant à cette théorie, M. Wollaston ne l'a point donnée. A la vérité, il prouve bien que les trajectoires décrites par les rayons lumineux doivent être convexes vers la surface du corps échauffé, mais comme il n'avoit point l'équation de ces trajectoires, il n'a pas discuté la manière dont elles se coupent, et la nature des caustiques

qui peuvent résulter de leurs intersections ; or, c'est de là que dépend la multiplicité des images, leur situation et les rapports de ce phénomène avec la position de l'objet. Mais sous le rapport de la physique, son travail ne laisse rien à desirer, il est rempli d'expériences imaginées avec toute la sagacité, et exécutées avec toute l'adresse, qui distinguent cet habile physicien. Enfin, il a parfaitement atteint le but de l'auteur, qui étoit surtout de prouver que ce phénomène des doubles images dans l'air atmosphérique est dû à une variation de densité contraire à celle qui existe ordinairement.

Trois ans après, en 1803, M. Wollaston publia encore un autre mémoire sur le même objet. Ici il avoit surtout en vue de donner aux marins des procédés pour éviter l'influence des réfractions extraordinaires lorsqu'ils prennent hauteur ; à cette occasion il rapporte un assez grand nombre d'observations faites par lui-même sur la Tamise, relativement à l'inversion des objets. Ceux qu'il a le plus ordinairement observés étoient les rames inclinées de quelques barques que le hasard amenoit sur la Tamise, et qui en effet étoient favorables pour l'observation à cause de leur obliquité. La méthode de M. Wollaston consistoit à mesurer l'angle entre le point où l'image renversée paroissoit plongée dans l'eau, et le point de l'image directe qui se trouvoit dans la même verticale. Malheureusement on voit par la théorie que cet angle est variable avec la distance de l'objet et la hauteur de l'œil, deux élémens que M. Wollaston n'a point observés, ou du moins dont il n'a pas donné les valeurs. Aussi les changemens acciden-

tels qui ont dû nécessairement y survenir, jettent-ils dans les observations de si grandes irrégularités que l'auteur en a été extrêmement surpris, sans savoir à quoi les attribuer. Mais un fait important qui est commun à toutes ces observations, c'est que toutes les fois que M. Wollaston a ainsi observé le mirage, la température de l'eau étoit plus chaude que celle de l'air : ce dont il a eu soin de s'assurer par des observations thermométriques qui sont consignées dans son mémoire.

Il arrive aussi quelquefois que des objets éloignés paroissent simplement suspendus en l'air; leur image est droite et n'est pas accompagnée, du moins en apparence, d'une seconde image renversée. On a donné à ce phénomène le nom de *suspension*, pour le distinguer du mirage. M. Monge l'attribue encore à la réflexion du ciel; mais il n'a pas dit pourquoi, dans ce cas, on n'aperçoit pas de seconde image, et je ne sache pas que personne ait donné l'explication de ce phénomène. Le fait est que la seconde image existe même dans ce cas, mais elle est extrêmement applatie et réduite à une dimension infiniment petite, ce qui empêche de l'apercevoir. C'est ce que je prouverai par la théorie et par l'expérience dans le cours de ce mémoire, en montrant par le calcul et par l'observation directe, comment se fait le passage du mirage à la suspension.

On trouve sur ces phénomènes un mémoire intéressant de M. Woltman dans les Annales de Gilbert. Il renferme un grand nombre d'observations que l'auteur a faites à Cuxhaven. L'objet observé étoit une maison située à une

grande distance. Le rayon visuel rasoit la surface de l'Elbe dans toute l'étendue de son cours. Malheureusement M. Woltmann n'avoit pas à sa disposition d'instrument divisé, et il y a suppléé par un appareil plus propre à indiquer les variations de la réfraction qu'à en donner la mesure bien précise. Mais ce qui rend ce travail précieux, c'est que l'auteur ayant suivi ces phénomènes pendant plus d'une année, en a bien constaté les résultats généraux, et même plusieurs particularités intéressantes. Ainsi il a constamment observé que, lorsqu'il y avoit deux images distinctes ou même simple suspension, la température de l'eau étoit au moins de deux degrés de Farenheit plus haute que celle de l'air; et qu'au contraire il n'y avoit jamais ni suspension ni double image lorsque la température de l'eau étoit au-dessous de celle de l'air seulement de deux degrés de Farenheit. Quand la différence des températures étoit moindre que cette limite, le phénomène n'étoit pas constant. Quelquefois il avoit lieu, d'autres fois il ne se produisoit pas; et cela se conçoit très-bien, puisqu'une si foible différence peut n'être pas générale, et que la plus petite cause accidentelle, le moindre mouvement de l'air ou de l'eau peut la détruire et la faire passer en sens contraire. M. Woltmann a aussi observé la suspension et le mirage sur la neige, et même sur la glace, lorsque la température de ces corps s'est trouvée plus haute que celle de l'air, ce qui arrive souvent en hiver, et l'on voit encore par là qu'il ne faut pas chercher à ces phénomènes d'autres causes que l'inégalité des températures.

M. de Humboldt, à qui aucun genre de recherches n'échappe parmi celles qui sont utiles aux sciences, a fait aussi des observations de suspension et de mirage pendant son voyage aux Tropiques ; mais habitué à connoître le prix des données exactes, il ne s'est pas contenté d'une simple description. Il a mesuré les dépressions des objets et celles de l'horizon de la mer avec un quart de cercle de Bird bien rectifié. Il a noté soigneusement la température et toutes les circonstances météorologiques; enfin, ce qui est le talent d'un bon observateur, quoiqu'il ne connût pas la théorie mathématique de ces faits, il n'a rien omis de ce qui pouvoit servir à l'établir ou à la vérifier. Aussi ses observations qu'il a bien voulu me communiquer m'ont-elles été fort utiles.

On doit encore ranger dans la même classe de phénomènes les apparences très-singulières que Legentil a observées à l'instant du lever du soleil pendant son séjour dans l'Inde, et qu'il a revues ensuite au coucher de cet astre sur les côtes de Normandie. Il les a consignées avec beaucoup de détail dans les mémoires de l'Académie des Sciences pour les années 1774 et 1789. Ces phénomènes qui n'avoient pas encore été expliqués, se déduisent très-simplement de la théorie ; et en comparant les particularités qu'elle indique avec celles que Legentil a observées, on les trouvera d'accord en tout point.

Ce sont là les seules données que j'aie pu tirer des recherches des physiciens. On trouve encore dans les Annales de chimie et dans celles de Gilbert quelques autres observations des mêmes phénomènes; mais comme

elles sont faites sans instrumens, ou par des procédés très-inexacts, ou enfin sans aucune mesure précise, elles ne peuvent servir qu'à constater le fait en lui-même, sans offrir les moyens de le calculer.

Au reste, depuis la première lecture de mon mémoire j'ai été assez heureux pour faire moi-même sur ce sujet, toutes les observations que j'ai pu désirer. L'occasion s'en est présentée, pendant le séjour que j'ai fait à Dunkerque dans l'hiver de 1808, avec M. Mathieu, pour la vérification de la latitude à l'extrémité boréale de la méridienne. Nous avions entrepris, M. Mathieu et moi, de profiter du voisinage de la mer, pour observer fréquemment avec un cercle répétiteur la dépression de l'horizon, en nous plaçant successivement à diverses hauteurs connues, ce qui devoit nous déterminer la forme de la trajectoire décrite par les rayons lumineux, suivant les diverses modifications de température que l'air et la mer éprouvent. Dans le cours de ces expériences, que nous rapporterons à la suite de ce mémoire, et qui contribueront peut-être à jeter quelque jour sur les variétés et les bizarreries des réfractions terrestres, nous découvrîmes sur la laisse de basse mer, un lieu où la suspension et le mirage étoient sensibles tous les jours. Le rayon visuel, après avoir rasé pendant long-temps cette surface sablonneuse et prolongée se terminoit à une foule d'objets, tels que des clochers, des maisons, des collines, des arbres, etc. qui paroissant suspendus en l'air et sans base, présentoient au-dessous d'eux leurs images renversées. Ces images situées aussi en l'air et au-dessus de l'horizon apparent, ressembloient parfai-

tement aux images réfléchies par l'eau; et l'illusion étoit si forte que nous-mêmes ne pouvions nous en défendre, quoiqu'il nous fût bien facile de nous convaincre de notre erreur, puisque le bord de cette eau apparente n'étoit pas quelquefois à 200 mètres de nous. Nous avons souvent pris plaisir à y envoyer des hommes munis de perches qui nous servoient de signaux. A mesure qu'ils s'éloignoient de nous, on les voyoit s'enfoncer successivement dans cette mer apparente, et enfin s'y plonger entièrement, ainsi que leur image réfléchie. Rien n'égale, en apparence, les variétés et les bizarreries de ces phénomènes. Ils changent selon la hauteur des objets, selon leur distance, selon la nature du sol qui vous en sépare, surtout selon sa forme et selon la hauteur de l'observateur; de sorte que vous ne pouvez faire le moindre mouvement sans modifier toutes les apparences que vous observiez. Bien plus, la moindre variation de température les altère, et il suffit d'un simple rayon de soleil pour faire naître ou disparoître le prestige.

Mais toutes ces bizarreries même n'ont été pour nous qu'un aiguillon de plus. Nous les avons suivies avec plus de soin, d'opiniâtreté et de constance à mesure qu'elles sembloient se multiplier davantage. Guidés par la théorie, nous marchions toujours avec certitude; et chaque apparence nouvelle avoit pour nous un nouvel intérêt. Pour profiter complétement d'une occasion aussi favorable, nous avons eu soin de prendre des mesures exactes de tous les phénomènes avec le cercle répétiteur. Nous avons noté soigneusement les températures à di-

verses hauteurs au-dessus du sol, les dépressions de l'horizon apparent et celles des objets, leur distance, leur configuration et les rapports de leur forme réelle avec celle des images réfléchies. Nous avons déterminé la forme des trajectoires et celle des caustiques qui les limitent, au moyen d'expériences directes, et pour ainsi dire, par des sondes faites dans la mer apparente, produite par la réflexion du ciel. Enfin nous avons étudié par des nivellemens exacts, la forme du terrain rasé par le rayon visuel, forme qui est ici d'une extrême importance, puisqu'elle détermine la direction des couches d'égales densités. Il nous a été facile de voir que la fréquence et l'intensité du phénomène dans le lieu où nous l'avons observé, étoit due à une configuration particulière de la surface sablonneuse, résultat que la théorie nous avoit fait prévoir d'après les seules apparences observées avant que nous l'eussions vérifié par les nivellemens; de sorte qu'en réunissant toutes les occasions que nous avons eu alors d'examiner en détail les variétés de ces phénomènes, telles que nous les rapporterons dans ce mémoire, nous croyons qu'on ne les a jamais observés si complétement, même en Egypte.

Je ferai mention ici d'un autre phénomène que nous avons observé, Arago et moi, en Espagne, et qui, au premier coup d'œil, paroîtra peut-être bien éloigné des précédens, quoiqu'il s'explique très-facilement par la même théorie. Il ne s'agit plus seulement ici de deux images, comme dans le mirage, ou de trois, comme dans les phénomènes observés par M. Vince, mais d'une

multitude qui apparoissent les unes au-dessus des autres en nombre indéfini. Lorsque nous observâmes ce curieux phénomène, nous étions stationnés sur la montagne de Desierto de las Palmas, élevée de 727 mètres sur le bord de la mer, dans le royaume de Valence. Nous observions de nuit, au cercle répétiteur, les réverbères allumés dans l'île d'Yviza, sur la montagne de Campvey, élevée de 420^m et distante de 161008^m ($41\frac{1}{3}$ lieues). C'étoit là un des côtés de notre grand triangle. Nous vîmes d'abord la lumière de Campvey simple, et semblable à une très-petite étoile, comme elle paroissoit ordinairement, et nous fîmes ainsi trois couples d'observations. Mais au quatrième couple, nous commençâmes à voir à Campvey deux lumières exactement dans la même verticale, et distantes d'une quantité que, sur le fil, nous estimâmes au moins de trois minutes. La vraie lumière, du moins celle que nous jugeâmes telle, étoit à sa place ordinaire. L'autre, que nous crûmes être la lumière factice, étoit plus élevée dans le ciel en réalité; ce qui la mettoit plus bas dans nos lunettes qui renversent. Elle étoit aussi plus grosse que l'autre, plus dilatée et un peu irisée. Nous la prîmes d'abord pour une étoile, bien étonnés d'en rencontrer une précisément dans le vertical des réverbères de Campvey. Mais enfin cette prétendue étoile ne changeant point de place, il fallut bien y reconnoître une image extraordinaire. Bientôt nous ne vîmes pas seulement deux lumières, mais trois, quatre ou davantage. Elles se formoient et disparoissoient ensuite sans que le nombre de celles qui paroissoient ensemble eût

rien de déterminé. Cependant on remarquoit que les plus basses, les plus voisines de ce que nous croyons être l'image ordinaire, paroissoient plus tôt que les autres et plus facilement; mais nous remarquâmes que les plus hautes en réalité, paroissoient toujours les plus larges et les plus brillantes. Cette formation successive a beaucoup d'analogie avec un autre phénomène que nous avons observé plusieurs fois dans d'autres stations. On voyoit le point lumineux s'allonger comme une petite colonne de feu sous le fil vertical de la lunette, et s'étendre ainsi jusqu'à une certaine longueur, après quoi la colonne se rompoit tout à coup et formoit deux images dont la plus basse étoit sensiblement rouge, et la supérieure sensiblement verte; ou bien elle se concentroit de nouveau sur elle-même; et redevenoit un point lumineux unique, de dimension insensible, comme auparavant. L'allongement de la lumière équivaut à une multitude infinie d'images contiguës, au lieu que dans l'oservation du Désierto, la lumière de Campvey avoit toutes ses images séparées et distinctes.

Le lendemain de cette observation, à la pointe du jour, la mer parut au loin couverte de masses de brouillard, noires, arrondies, moutonnées et agglomérées, de manière à représenter parfaitement des montagnes. En dirigeant les lunettes sur Yviza, on ne voyoit point cette île ni ses montagnes, mais seulement des masses de brouillard qui en imitoient la forme, et qui auroient pu nous tromper, si nous avions été moins habitués à reconnoître Yviza et surtout Campvey. Ces brouillards n'existoient

point sur la surface de la mer à la chute du jour, ils s'y étoient précipités pendant la nuit. Nous avons depuis constamment observé cette circonstance toutes les fois que nous avons vu des phénomènes de réfraction extraordinaire. Ces masses de brouillard ainsi affaissées, étoient pour nous l'indice le plus certain d'un temps parfaitement calme. Au Desierto de las Palmas nous les avons revues ainsi pendant plus de quinze jours consécutifs, couvrant la surface de la mer à la pointe du jour, s'élevant et se dissipant par l'effet de la chaleur du soleil, puis retombant de nouveau pendant la nuit. Ce jeu alternatif continuoit jusqu'à ce qu'un vent du nord vînt les chasser. Je ne crois pas cependant que ce phénomène contribue à produire les réfractions extraordinaires ; mais comme il indique le calme parfait de l'atmosphère, il doit en accompagner fréquemment l'apparition. On a comparé le phénomène des doubles images à celui de la réflexion intérieure dans une glace. Le phénomène des images multipliés en nombre indéfini, peut se comparer de même à celui des réflexions intérieures qui se font successivement sur les deux faces opposées d'une glace, lorsqu'on regarde un point lumineux à travers elle, dans le sens de son tranchant; mais cette manière d'expliquer le phénomène, ne doit être considérée que comme approchée. La réflexion des trajectoires ne peut pas se faire dans l'air atmosphérique, comme dans les milieux de densité uniforme, où les trajectoires n'ont qu'une portion curviligne infiniment petite, près de la surface de ces milieux; et quoique l'on puisse donner une idée de quelques phénomènes du

mirage, en les rapportant à cette limite, il est vrai de dire aussi qu'un grand nombre, et surtout ceux qui présentent des images multiples, ne peuvent nullement se représenter ainsi, parce qu'ils dépendent de la multiplicité des branches de la caustique sur laquelle se fait la réflexion, caustique qui dans le cas des milieux de densité constante, n'a qu'une seule branche concave vers leur surface, et infiniment applatie.

Pour avoir la véritable théorie de ces phénomènes, il faut considérer le mouvement de la lumière dans les milieux, dont le pouvoir réfringent est variable selon les différentes couches. C'est ce que j'ai tâché de faire; et comme le problème pris dans toute cette généralité est insoluble dans l'état actuel de l'analyse, j'ai cherché à distinguer, autant qu'il m'a été possible, les résultats généraux qui conviennent à toutes les lois de réfraction de ceux qui dépendent nécessairement de la loi particulière suivant laquelle on fait varier les pouvoirs réfringens; et les résultats qui sont dans ce dernier cas étant très-multipliés, j'ai choisi pour exemples quelques-unes des lois de réfraction les plus simples, les plus approchées de la nature, et j'en ai développé les conséquences; c'est ainsi que l'on apprend à discuter les équations de toutes les courbes, en en discutant quelques-unes, quoique leurs propriétés particulières soient variées à l'infini.

Examen des trajectoires décrites par les molécules lumineuses, dans un milieu diaphane composé de couches planes et parallèles, dont la densité et la nature chimique sont supposées variables.

Supposons que les couches dans lesquelles le pouvoir réfringent est constant soient horizontales ; ce seroient les couches d'égale densité, si le milieu étoit homogène. Plaçons l'origine des coordonnées au point où se trouve l'observateur ; prenons l'axe des x horizontal, l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut.

Soit n la vitesse de la lumière dans le vide ; nommons K la force réfringente d'une couche quelconque, ρ sa densité. Les molécules lumineuses en pénétrant dans cette couche, n'ayant traversé que des faces planes, auront la même vitesse que si elles y avoient pénétré directement. On aura donc dans toute l'étendue du milieu

$$\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = n^2 + 4\,K.\,\rho$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut maintenant éliminer dt : or cela est très-facile, car les couches étant planes et parallèles, leurs actions attractives dans le sens de leur longueur se contrebalancent mutuellement, et par conséquent la vitesse dans cette direction est constante, et la même que dans la couche supérieure. Or, en nommant I l'inclinaison à l'horizon de la tangente extrême de la trajectoire, ou l'angle TOX, *fig.* 1, on a dans la couche supérieure

$$\frac{dx}{dt} = n. \cos. I. \sqrt{1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)}$$

Cette valeur est donc la même pour toutes les couches; ainsi en l'employant pour éliminer dt on trouve

$$n^2.\,\cos^2.\,I.\left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right]$$
$$+ n^2.\,\cos^2.\,I.\left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right]\frac{dz^2}{dx^2} = n^2 + 4\,K.\,\varrho$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{\sin^2.\,I.\left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right] - 4.\left[\frac{(K)}{n^2}.\,(\varrho) - \frac{K}{n^2}\,\varrho\right]}{\cos^2.\,I.\left[1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)\right]}$$

Le pouvoir réfringent $\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)$ de la couche supérieure où l'observateur se trouve, est supposé donné par l'observation immédiate. Le pouvoir réfringent $\frac{4\,K}{n^2}.\,\varrho$, variable dans les différentes couches, est une fonction de z dépendante de la loi suivant laquelle varie la densité des couches et leur composition chimique. Si cette loi est connue et donnée, l'équation différentielle précédente ne dépend plus que des quadratures, et son intégrale donnera en quantités finies l'équation du rayon lumineux.

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho) = (P); \quad m = \frac{\frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)}{1 + \frac{4\,(K)}{n^2}.\,(\varrho)} = \frac{(P)}{1 + (P)}$$

(P) est le pouvoir réfringent de la couche où se trouve l'observateur; P est celui d'une couche quelconque. Et prenons la valeur de $\frac{dz}{dx}$, nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\sqrt{sin^2. I - m. \left[\frac{(P) - P}{(P)}\right]}}{cos. I}$$

Les deux signes du radical se rapportent aux deux branches symétriques de la trajectoire. Nous considérerons d'abord la première branche, et par conséquent nous prendrons le signe supérieur du radical, puisque x croît en même temps que z; nous aurons ainsi

$$dx = \frac{cos. I. dz}{\sqrt{sin^2. I - m. \left[\frac{(P) - P}{(P)}\right]}}$$

La différence $\frac{(P) - P}{(P)}$ est une fonction de z qui est nulle au niveau de l'observateur, et qui devient égale à l'unité dans le vide. Soit donc

$$\frac{(P) - P}{(P)} = \varphi. (z)$$

La fonction φ variera entre o et $+$ 1, et sa forme dépendra de la loi suivant laquelle le pouvoir réfringent varie dans les différentes couches. On aura ainsi:

$$dx = \frac{cos. I. dz}{\sqrt{sin^2. I - m\varphi}}$$

et en représentant par Z_z l'intégrale du second membre,

la valeur de x aura cette forme $x = Z_z - Z_o$, Z_o représentant la valeur de cette intégrale quand z est nul.

Le nombre et la position des images visibles dépend des intersections des différentes trajectoires parties du même point. Nous allons donc discuter la forme de ces trajectoires.

Discussion de la première branche des trajectoires, et de la position de leurs minima *sous diverses inclinaisons.*

Examinons d'abord dans quel sens elles tournent leur convexité. Pour cela élevons la valeur de $\frac{dz}{dx}$ au carré, nous aurons :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = tang^2.\ I - \frac{m\varphi}{cos^2.\ I}$$

différenciant, il vient

$$2.\ \frac{dz}{dx}.\ \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{m\varphi'}{cos^2.\ I}.\ \frac{dz}{dx}.$$

φ' est le coefficient différentiel de la fonction φ. Supprimant le facteur $\frac{dz}{dx}$ qui est inutile dans cette circonstance, puisqu'il ne convient qu'à une trajectoire horizontale, l'autre facteur donne

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{m\varphi'}{2.\ cos^2.\ I}$$

ou, en mettant pour φ_1 sa valeur qui est $-\frac{1}{(P)}.\ \frac{dP}{dz}$,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{m}{2\ (P)\ cos^2.\ I}.\ \frac{dP}{dz}$$

Si le pouvoir réfringent P décroît à mesure que l'on s'enfonce dans le fluide, dP sera le signe contraire à dz, et alors la courbe sera concave vers l'axe des x, c'est-à-dire vers la couche dans laquelle se trouve l'observateur. Si, au contraire, P va croissant en même temps que z, $\frac{dP}{dz}$ sera positif, et la courbe sera convexe vers cette couche. Partout elle suivra les inflexions du pouvoir réfringent, en tournant sa concavité du côté où il est moindre.

La tangente des trajectoires devient horizontale lorsque $\frac{dz}{dx}$ est nul; ce qui donne

$$sin^2. I = m\varphi \quad \text{ou} \quad sin. I = \pm \sqrt{m. \frac{(P) - P}{(P)}}$$

Les deux valeurs de $sin. I$ répondent aux deux inclinaisons égales et opposées des deux branches de chaque trajectoire, lesquelles sont symétriques autour de leur *minimum*.

Quand (P) sera donné ainsi que I, cette équation déterminera le pouvoir réfringent P de la couche fluide dans laquelle la tangente de la trajectoire est horizontale.

Si le pouvoir réfringent va décroissant à mesure que l'on s'enfonce dans le fluide, P y sera toujours moindre que (P) : ainsi les valeurs de $sin. I$ seront réelles. Les minima des trajectoires seront donc situés dans ces couches. Dans ce cas les plus grandes valeurs de $sin. I$ répondent aux plus petites valeurs de P, c'est-à-dire que les rayons lumineux qui en partant de l'observateur fe-

ront les plus grands angles avec l'horizon, pénètreront le plus avant dans le fluide et auront le minima de leurs trajectoires aux points les plus bas.

Si au contraire P va croissant dans les couches inférieures, la valeur de $sin. I$ sera imaginaire dans ces couches, et par conséquent les minima des trajectoires n'y seront pas situés, mais ils se trouveront dans les couches supérieures. Généralement ce cas rentre dans l'autre en changeant z en $-z$. C'est pourquoi le premier sera le seul que nous considérerons.

Pour avoir la loi suivant laquelle la hauteur des minima varie, il faut différencier par rapport à I et z l'équation

$$sin^2. I = m\varphi$$

et en désignant par δ ce genre de différentielles, on aura

$$\delta z = \frac{2. \frac{\varphi}{\varphi'}}{tang. I} \delta I$$

ou, en exprimant δI en secondes,

$$\delta z = \frac{2. \frac{\varphi}{\varphi'}. sin. 1''}{tang. I}. \delta I$$

et comme $\frac{\varphi}{\varphi'} = -\frac{[(P) - P]}{\frac{dP}{dz}}$, on voit que δz est de signe contraire à δI, c'est-à-dire que le *minimum* s'abaisse dans le fluide quand l'inclinaison de la trajectoire augmente; résultat conforme à ce que l'on a vu plus haut.

Pour interpréter complètement cette expression, construisons la courbe qui représente la suite des pouvoirs réfringens à diverses profondeurs. Soit NX, *fig.* 1, cette courbe, dont les valeurs de z comptées sur l'axe AZ seront les abscisses, et dont les valeurs de P seront les ordonnées. Si par le point X où cette courbe coupe l'axe des x, on mène la verticale XZ', la courbe NX rapportée à cet axe représentera la suite des valeurs de $(P) - P$, et sa soutangente représentera $\frac{\varphi}{\varphi'}$. Or, plus la densité variera rapidement, plus la courbe NX sera applatie vers l'axe AX, et par conséquent plus sa soutangente sera petite. D'où l'on voit que, à incidence égale, la valeur de δz est d'autant moindre que le pouvoir réfringent varie avec plus de rapidité.

Si cette variation étoit infiniment rapide, la courbe NX deviendroit une ligne droite perpendiculaire à l'axe AZ; la soutangente $\frac{\varphi}{\varphi'}$ seroit constamment nulle, et l'on auroit alors

$$\delta z = o$$

Tous les *minima* des trajectoires se trouveroient donc sur une même ligne horizontale, quelque fût l'inclinaison I. Ce cas est celui de la réflexion au contact de deux milieux homogènes, de densités ou de nature diverses, qui se touchent par une face plane.

Mais toutes les inclinaisons ne sont pas propres à donner des trajectoires qui aient leur minimum dans le fluide, car la plus petite valeur que P puisse avoir, c'est d'être égal à zéro; ainsi la plus grande valeur de *sin.* I est

sin. $I = \sqrt{m}$; d'où l'on tire *tang.* $I = \sqrt{(P)}$

Les valeurs de I qui excéderoient cette limite exigeroient que le pouvoir réfringent P pût diminuer jusqu'à devenir négatif, c'est-à-dire que le milieu fluide repoussât la lumière au lieu de l'attirer, ce qui ne sauroit avoir lieu dans les cas que nous considérons.

Cette valeur de *sin.* I donne

$$\cos. I = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4.(K)}{n^2}.(\varrho)}}$$

Sous cette forme on reconnoît que I est l'angle sous lequel un rayon lumineux cesse de se réfléchir dans un milieu diaphane dont le pouvoir réfringent est $\frac{4(K)}{n^2}.(\varrho)$. Les rayons menés sous une inclinaison plus grande donneroient encore des trajectoires curvilignes; mais ces trajectoires sortiroient du fluide avant d'avoir atteint leur *minimum*.

Dans l'air atmosphérique, si l'on suppose que (ϱ) soit la densité à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^{m}76$, j'ai trouvé par des expériences directes qui sont rapportées dans les *Mémoires de l'Institut* pour 1807,

$$\frac{4.(K)}{n^2}.(\varrho) = 0.0005883641$$

ce qui donne

$$m = 0.0005880200$$

et l'on trouve par l'équation précédente

$$I = 1^{\circ}\ 23'\ 22''$$

Telle est la limite de la réflexion intérieure dans l'air atmosphérique, et il s'ensuit qu'à travers des couches d'air planes et parallèles, la vision par des secondes branches de trajectoires ne peut jamais avoir lieu que sous des inclinaisons moindres que la précédente.

Les inclinaisons possibles dans chaque cas seront même fort au dessous de cette limite ; car, en supposant P nul, on suppose qu'il y a le vide dans la couche inférieure, et c'est ce qui n'a jamais lieu dans les observations. La densité de la couche inférieure, loin d'être nulle, est au contraire le plus souvent peu différente de (ρ), surtout dans les phénomènes produits par la seule chaleur naturelle du soleil, comme sont ceux qui s'observent à la mer ou dans les plaines sablonneuses. Alors, en nommant ρ_1, la densité de l'air à la surface du sol, la limite de I pour la réflexion sera donnée par la formule

$$\sin.\ I = \sqrt{m.\ \frac{(\rho) - \rho_1}{(\rho)}}$$

car des trajectoires menées sous des inclinaisons plus grandes entreroient nécessairement dans le sol avant d'avoir atteint leur minimum. Si l'on représente par (p) et (t) la pression et la température dans la couche supérieure où l'observateur se trouve, et par p' et t' les quantités analogues dans la couche qui repose sur le sol, la for-

mule précédente donnera d'une manière très-approchée

$$\sin^2. I = (m). \left[\frac{(p)}{0.76. [1 + (t) 0.00375]} - \frac{p'}{0.76. [1 + t' 0.00375]} \right]$$

(m) étant la valeur de m donnée ci-dessus pour la température de la glace fondante et la pression de $0^m 76$, si l'observateur est assez peu élevé au-dessus du sol pour que la variation du baromètre dans cet intervalle soit insensible, on aura $(p) = p'$, et la valeur précédente deviendra

$$\sin^2. I = \frac{(m). (p)}{0.76}. \frac{[t' - (t)]. 0.00375}{[1 + (t). 0.00375]. [1 + t'. 0.00375]}$$

Supposons, par exemple, que la température à la surface du sol soit de 55° du thermomètre centésimal, et qu'elle soit de 25 dans la couche supérieure où l'observateur se trouve, et prenons le baromètre à 0.76 dans les deux couches; ces différences sont bien les plus grandes que la chaleur du soleil puisse produire même sous les tropiques. Dans ce cas on trouve

$$I = 24' \; 20''$$

Si, pour prendre un autre extrême, on suppose que la température de l'air dans la couche supérieure soit — 10° et qu'elle soit + 10° dans la couche inférieure, ce qui peut arriver, quoique bien rarement, dans nos climats lorsqu'on observe sur la surface de la mer en hiver, on aura

$$I = 22' \; 51''$$

Telles sont donc les limites extrêmes de la réflexion dans

l'air atmosphérique lorsque les différences de température seront le résultat d'un état naturel de l'atmosphère.

Il seroit bien intéressant de comparer la valeur de *sin. I* à des expériences exactes faites sur des plaques métalliques parfaitement planes, et chauffées à des degrés déterminés. Ce seroit un moyen de savoir si le coefficient de la dilatation de l'air 0,00375 donné par Gay-Lussac, est encore exact à de hautes températures, en supposant toutefois que la force réfringente de l'air, à ces températures, restât encore proportionnelle à sa densité; ce qui est extrêmement probable d'après les expériences que nous avons faites, Arago et moi, sur l'air raréfié. Mais, à défaut d'expériences de ce genre, nous nous contenterons d'appliquer la formule à quelques autres cas, qui pourront servir à en montrer l'usage.

Je choisirai d'abord une observation faite par M. Wollaston, sur un grand chemin sablonneux.

Le thermomètre plongé dans le sable marquoit .	38°3 Divis. centésim.
A quatre pouces anglais au-dessus du sol, ou environ 1 décimètre	27°8
A un pied anglais ou à trois décimètres au-dessus du sol	24°5

Nous supposerons qu'à cette dernière hauteur l'influence du sol étoit déjà insensible, ensorte qu'au-dessus de cette couche, le rayon poursuivoit sa route en ligne droite jusqu'à l'observateur, que je suppose aussi au-dessus de cette limite. Dans ces circonstances, la réfraction observée par M. Wollaston étoit d'environ 9'; mais comme la surface du sol n'est jamais parfaitement plane,

on n'a pas ici l'avantage de savoir si la trajectoire observée est la trajectoire limite qui est tangente à la surface du sol. On doit même remarquer à ce sujet que les plus petites inégalités du sol ont une influence très-sensible sur le phénomène, en interceptant les trajectoires les plus basses, avant ou après leur *minimum*, et ne laissant passer que celles dont le *minimum* surpasse ces inégalités. Alors, soit que vous observiez la réflexion du ciel ou l'image renversée d'un objet, vous ne pouvez l'apercevoir que dégagée de ces ondulations, et les trajectoires plus basses ne font que continuer l'image du sol plus loin qu'elle ne devroit l'être si sa surface étoit parfaitement plane. Or ces variations de hauteur, quoique fort petites, en introduisent de très-grandes dans la température des couches où se fait le *minimum*. Enfin il est très-probable que le thermomètre placé sur la surface d'un sol échauffé ou très-près de cette surface, indique toujours une température plus haute que celle de l'air qui repose sur le sol, à cause de la rayonnance qui agit sur la boule du thermomètre, tandis qu'elle n'affecte point l'air d'une manière sensible; et aussi parce que l'air échauffé, s'échappant par l'excès de sa légèreté spécifique, se refuse ainsi à prendre toute la chaleur que le sol pourroit lui communiquer. Par ces raisons il sera plus sûr de parler de ne point faire de supposition relativement à la hauteur de la trajectoire que M. Wollaston a observée, et de partir au contraire de cette réfraction comme d'une donnée pour calculer les différences de température entre la couche supérieure et celles

du minimum de la trajectoire. Regardons donc I et (t) comme données, et cherchons la différence $t' - (t)$ des températures extrêmes, nous trouverons ainsi

$$t' - (t) = \frac{\sin^2. I. [1 + (t). 0.00375]^2}{0.00375. \left[\frac{(m). (p)}{0.76} - \sin^2. I. [1 + (t). 0.00375]\right]}$$

En substituant dans cette formule les nombres donnés par M. Wollaston, c'est-à-dire supposant $I = 9'$, et prenant $(t) = 24.5$ pour la température dans la couche où se trouvoit l'observateur, nous aurons

$$t' - (t) = 3.8$$

et comme on a $(t) = 24.5$, il en résulte

$$t' = 28.3$$

Telle étoit donc la température de l'air au point le plus bas de la trajectoire. Elle est fort au-dessous de celle qu'indiquoit le thermomètre plongé dans le sable, et nous avions prévu cet effet. Si l'on devoit l'attribuer tout entier aux inégalités du terrain, on voit, d'après la progression des températures observées, que la trajectoire passoit à moins de 1 décimètre du sol, distance que l'on peut en effet regarder comme la moindre possible parmi toutes celles qui sortent des inégalités inévitables d'un grand chemin. Si le *minimum* eût été placé à la surface même du sol, la réfraction eût été de 17'; mais le moindre obstacle, la plus petite pierre placée sur le sol auroit suffi pour l'intercepter, et on n'auroit pu l'apercevoir que sur un corps uni comme un miroir, ou sur la surface des eaux.

Nous avons fait, M. Mathieu et moi, des observations de ce genre à Dunkerque sur la laisse de basse mer, et, pour plus d'exactitude, nous avons nivelé soigneusement le terrain, afin d'en connoître les ondulations; car ces ondulations déterminant la direction des couches, leur communiquent leur propre inclinaison qu'il faut aussi ajouter ou ôter aux dépressions apparentes conclues des distances au zénith. Voici, d'après nos expériences, la série des températures à diverses hauteurs, observée le 8 mars 1809.

Le thermomètre, placé sur le sable et au soleil, marquoit.	13°5
Sur le sable et à l'ombre	11.0
A 3 centimètres et à l'ombre	9.5
A 15 centimètres	7.0
A 65 centimètres	6.3
A 93 centimètres	6.1

Au-dessus de cette limite la température devenoit sensiblement constante; le centre du cercle étoit placé un peu au-dessus, à $1^m\,17$. La dépression de l'horizon apparent sur le sable, par six observations au cercle répétiteur, fut trouvée de $8'\,15''46$; l'inclinaison propre du terrain la diminuoit de $1'\,18''$: donc on l'a augmentée. Avec ces valeurs on trouve

$$t' - (t) = 2.76 \quad \text{et par suite} \quad t' = 8.86$$

Le *minimum* de la trajectoire qui paroissoit être la trajectoire limite, passoit donc à très-peu près à 3 centimètres du sol, si toutefois l'infériorité de la température calculée doit être attribuée entièrement à cette cause; et l'on voit que cette hauteur étoit à peine suffisante pour

dégager la trajectoire des petites ondulations, et, si je puis le dire, des petites rides imprimées sur la surface du sable par le mouvement alternatif des vagues au moment du reflux. Or telle étoit la disposition du terrain que, malgré cette foible différence des températures extrêmes, le phénomène des doubles images et celui du renversement étoient extrêmement sensibles.

Nous avons réuni dans le tableau suivant les résultats des observations du même genre faites à différens jours.

Dépressions de l'horizon apparent, observées à Dunkerque sur la laisse de basse mer, à l'ouest et au pied du Risban.

Jours des observations.	Baromètre.	Dépression apparente, corrigée de l'inclinaison du terrain.	Thermomètre de l'air au niveau de l'objectif de la lunette.	Thermomètre sur le sable et au soleil.	Température au *minimum* de la trajectoire calculée.	Différence des températures extrêmes, calculée.	ÉTAT DE L'ATMOSPHÈRE.
	M.		D.	D.	D.	D.	
7 mars •	0•7744	8′ 0″7	+ 6•3	+ 11•5	8•90	2•60	Beau ciel; vent N. foible.
8••••••	0•7693	8 15•5	6•1	13•5	8•86	2•76	Beau ciel; v. N. N. E. foible.
10 •••••	0•7699	5 14•2	5•5	7•5	6•57	1•07	Point de soleil; temps couvert et froid.
11•••••••	0•7700	6 57•9	6•1	10•3	8•00	1•90	Ciel nuageux; v. N. E. foible.
19••••••	0•7647	5 45•2	11•3	13•4	12•62	1•32	Ciel couvert; soleil par intervalles; vent E. fort.
23••••••	0•7625	4 26•0	13•3	14•3	14•13	0•83	Ciel vaporeux; vent S. S. E.

Dans toutes ces observations, la température de l'air, calculée pour le *minimum* de la trajectoire, est toujours moindre que la température indiquée par le thermo-

mètre appliqué sur la surface du sol. Cela peut, comme nous l'avons dit, résulter des petites inégalités du terrain; mais une autre cause qui y contribue aussi très-probablement, c'est que l'air inférieur s'échappant dès qu'il s'échauffe, en vertu de sa légèreté spécifique, ne peut pas acquérir toute la température du sol, à moins qu'il ne soit retenu par quelque obstacle. D'après cette considération on voit que la température de l'air dans la couche inférieure, doit participer de celle des couches supérieures qui, descendant vers le sol, viennent sans cesse la renouveller. Ainsi lorsqu'une barre métallique a une de ses extrémités plongée dans la glace et l'autre dans l'eau bouillante, les températures réelles de ces extrémités ne sont ni celle de l'eau bouillante ni celle de la glace; mais elles participent de l'une et de l'autre, suivant des lois que le calcul et l'expérience s'accordent également à déterminer. La preuve que les inégalités du sol ne produisent pas seules ce phénomène, c'est que nous le concluons également d'un grand nombre d'observations que nous avons faites de la dépression de l'horizon sur la surface de la mer à laquelle on ne sauroit attribuer de semblables inégalités. Dans les expériences faites sur le sable, on peut remarquer que la différence réelle des températures est justement la moitié de celle que les thermomètres indiquent. Les observations que nous avons faites sur la surface de la mer ne s'écartent pas beaucoup de cette loi. Seroit-ce une propriété générale qui tînt à la manière dont l'air s'échauffe? Nous l'ignorons; cependant cela paroît peu

probable : il semble plutôt que l'étendue de cette différence doit varier selon les rapports de température de l'air extérieur et du corps échauffé, selon la forme de ce corps, et surtout selon la facilité plus ou moins grande que sa position donne à l'air échauffé pour s'échapper de sa surface. Quoi qu'il en soit, ces résultats montrent que dans les observations barométriques, où l'on a besoin de connoître la température propre de l'air ambiant, il ne faut point placer le thermomètre très-près de terre, mais l'élever à la plus grande hauteur où on puisse le lire, afin de le dégager de l'action rayonnante du sol et le mettre au-dessus des variations rapides que la chaleur communiquée immédiatement par le contact, introduit dans la température des couches inférieures. C'est ce que M. Ramond a toujours pratiqué.

Parmi les expériences de M. Wollaston sur la même matière, on en trouve une qui est surtout faite dans des circonstances très-favorables. M. Wollaston observa le renversement des images sur une barre de bois exposée au soleil. Le décroissement des températures étoit très-rapide; car, en les mesurant avec un très-petit thermomètre, on avoit

Sur la surface de la barre, le thermomètre en contact avec elle . . . . 35.6 centigrade.

A la distance de $\frac{1}{4}$ de pouce anglais, ou environ 6 millimètres 22.8

La réfraction observée surpassoit 20'.

Ici nous ne connoissons point la température de l'air ambiant, il est seulement probable qu'elle étoit plus

basse que celle qui avoit lieu à $\frac{1}{4}$ de pouce de la barre. Prenons donc pour donnée la température t' à la surface même de la barre, et cherchons la valeur de (t); nous aurons d'abord

$$t'-(t)=\frac{sin^2.\ I.\ (1+t'\ 0.00375)^2}{0.00375.\left[\frac{(m).\ (p)}{0.76}+sin^2.I.(1+t'.0.00375)\right]}$$

et en y mettant les nombres donnés par Wollaston, on trouvera

$$t-(t)=18.5$$

on a d'ailleurs

$$t'=35.6\quad \text{Donc}\quad (t)=17.1$$

Telle devoit donc être alors la température de l'air ambiant selon notre théorie, et cette valeur est très-vraisemblable; car, la véritable valeur étoit nécessairement moindre que 22.8 qui avoit lieu à $\frac{1}{4}$ de pouce de la barre, et cependant elle devoit différer peu de cette quantité, à peu près comme le thermomètre à l'ombre diffère du thermomètre au soleil.

Enfin, dans la dernière observation de M. Wollaston que nous allons calculer, les rayons visuels passoient sous la surface d'une plaque de fer rouge, et très-près de cette surface, de sorte que dans ce cas la légèreté spécifique de l'air échauffé s'opposoit à sa dissipation. La plus grande réfraction a été, selon cet habile physicien, jusqu'à 1° 15'. Il ne nous a point donné les températures extrêmes ni la hauteur du baromètre relative à cette observation; mais cette dernière ayant peu d'in-

fluence peut être encore supposée sans erreur sensible égale à $0^{m}76$; et quant aux températures, comme à des degrés de chaleur si élevés la réflexion approche du *maximum* qu'elle peut atteindre dans l'air, une petite erreur dans les degrés est beaucoup moins sensible que dans les expériences précédentes. Nous pouvons donc supposer que la température de la plaque de fer est celle qu'ont assignée De Luc et Watt pour la chaleur du fer rouge, c'est-à-dire de 1277 degrés de Fareinhet, ou 692 du thermomètre centésimal; de plus, nous prendrons la température de l'air égale à 12°, ce qui est à peu-près sa valeur moyenne à Paris et à Londres. En calculant avec ces données la valeur de *sin. I* d'après la formule, on trouve

$$I = 1^\circ\ 9'\ 7''$$

Cette valeur s'écarte peu de la limite extrême 1° 15′ fixée par Wollaston; et l'on peut bien pardonner cette différence quand on songe à l'incertitude qui reste encore dans les données dont nous avons fait usage, et à celle de l'observation même dans laquelle Wollaston n'a probablement pas cherché à mettre toute l'exactitude qu'exige une expérience calculée. On l'élèveroit à 1° 11′ en supposant que l'observation a été faite à la température de o, et l'on satisferoit facilement à l'observation, si elle étoit parfaitement sûre en modifiant la valeur adoptée pour la température de la plaque rouge, valeur qui au reste étoit probablement plus forte que nous ne l'avons supposé, puisque Saussure et Watt ont dû l'indiquer dans son *minimum*.

Il existe encore des expériences de ce genre faites en Allemagne par M. Gruber de Berlin ; mais la plaque de fer échauffée sur laquelle ce physicien observoit n'étoit pas parfaitement plane, ainsi qu'il en fait lui-même la remarque : elle étoit concave vers le rayon lumineux, ce qui empêchoit les trajectoires de toucher la surface du fer ; et de là il résulte que toutes les réfractions observées par M. Gruber sont plus petites que la plus grande qui auroit pu avoir lieu, d'après la différence des températures extrêmes, ce dont je me suis assuré par le calcul.

Nous venons de déterminer la limite de la réflexion intérieure dans des milieux quelconques. Lorsque l'inclinaison des trajectoires excédera ces limites, la trajectoire sortira du milieu avant d'avoir atteint son *minimum*; de là, en entrant dans le vide, elle poursuivra son cours en ligne droite suivant la direction de sa dernière tangente, de sorte que, si l'on veut seulement considérer sa marche dans le milieu réfringent où elle est courbe, il faudra la terminer brusquement.

Cependant, pour examiner complétement les propriétés géométriques des trajectoires, et suivre avec facilité la marche de leurs intersections successives, il seroit utile d'éviter cette interruption brusque de leur marche qui jette une discontinuité inévitable dans les considérations. A la vérité, on y parviendroit en continuant, par le calcul, le cours des trajectoires au-delà de ces limites, ce qui exigeroit que l'on employât dans le calcul analytique des valeurs négatives du pouvoir réfringent ; mais cette supposition qui suffit au calcul, ne

présente aucune idée physique satisfaisante. Voici un moyen très-simple d'y suppléer.

L'équation générale des trajectoires est

$$\cos. I. \frac{dz}{dx} = \sqrt{\sin^2. I - m\varphi}$$

dans laquelle on a

$$m\varphi = \frac{4. \frac{(K)}{n^2}. (\varrho) - 4. \frac{K}{n^2}. \varrho}{1 + 4. \frac{(K)}{n^2}. (\varrho)}$$

Dans un autre milieu diaphane dont l'action sur la lumière seroit représentée par K' et la densité par ϱ', on auroit de même

$$\cos. I. \frac{dz}{dx} = \sqrt{\sin^2. I - m'\varphi'}$$

$$m'\varphi' = \frac{4. \frac{(K)'}{n^2}. (\varrho)' - 4. \frac{K'}{n^2}. \varrho'}{1 + 4. \frac{(K)'}{n^2}. (\varrho)'}$$

Je suppose maintenant que la nature de ce second milieu et la densité de ses couches soit telle que l'on ait en général

$$K' = \frac{K}{1 - \frac{4a}{n^2}}; \quad \varrho' = \varrho + \frac{a}{K}$$

a étant une quantité constante et positive, ce qui donnera dans la couche supérieure

$$(K)' = \frac{(K)}{1 - \frac{4a}{n^2}}; \ (\varrho)' = (\varrho) + \frac{a}{(K)}$$

Cette supposition n'entraîne aucune impossibilité physique, elle ne fait qu'augmenter dans un certain rapport, l'action du fluide sur la lumière et la densité. On aura ainsi dans ce nouveau milieu

$$m'\varphi' = \frac{4 \cdot \frac{(K)}{n^2} \cdot \left[(\varrho) + \frac{a}{(K)}\right] - \frac{4\,K}{n^2} \cdot \left(\varrho + \frac{a}{K}\right)}{\left(1 - \frac{4\,a}{n^2}\right) \cdot \left\{1 + \frac{4 \cdot \frac{(K)}{n^2} \cdot \left[(\varrho) + \frac{a}{(K)}\right]}{1 - \frac{4\,a}{n^2}}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{4\,(K)}{n^2} \cdot (\varrho) - \frac{4\,K}{n^2} \cdot \varrho}{1 + \frac{4\,(K)}{n^2} \cdot (\varrho)} = m\varphi$$

La quantité $m'\varphi'$ sera donc égale à la quantité $m\varphi$; ainsi l'équation différentielle des trajections sera la même pour les deux milieux, et par conséquent la forme de ces trajectoires sera aussi la même lorsqu'elles seront menées du même point sous d'égales inclinaisons.

Mais par l'introduction de la constante indéterminée a, il arrive que lorsque les densités et les pouvoirs réfringens deviennent nuls ou négatifs dans le premier milieu, ils ont encore des valeurs positives dans le second, d'où il suit que la limite de la réflexion intérieure y est plus éloignée, et par conséquent des trajectoires qui ne pouvoient pas atteindre leur *minimum* dans l'autre milieu l'atteindront dans celui-ci. En effet, en y supposant ϱ' nul, ce qui répond à des valeurs négatives de ϱ, la limite de la réflexion intérieure est donnée par la formule

$$sin.\ I = \sqrt{m'} \quad \text{ou} \quad sin.\ I = \sqrt{\frac{(P)'}{1 + (P)'}}$$

Or, d'après les relations que nous venons d'établir, on a

$$(P)' = \frac{4\,(K)'}{n^2} \cdot (\varrho)' = \frac{\frac{4\,(K)}{n} \cdot \left[(\varrho) + \frac{a}{K}\right]}{1 - \frac{4\,a}{n^2}}.$$

Cette valeur de $(P)'$ sera donc toujours plus grande que (P). La différence dépendra de la constante a, et elle sera d'autant plus considérable que l'on donnera à cette constante une valeur plus approchée de $\frac{n^2}{4}$. On pourra donc imaginer ainsi une infinité de milieux où les trajectoires seront absolument les mêmes que dans le milieu proposé, et dans lesquels la limite de la réflexion intérieure sera aussi éloignée que l'on voudra. On pourra même en faisant a très-peu différent de $\frac{n^2}{4}$, amener la valeur de $sin.\ I$ jusqu'à l'unité, ce qui rendra la réflexion possible sous toutes les inclinaisons. Au moyen de ces suppositions, on pourra suivre la marche des trajectoires dans toute l'étendue que leur donnent les formules analytiques, et lorsqu'on voudra ensuite particulariser ces résultats pour un milieu donné, dans lequel la limite de la réflexion intérieure sera connue et déterminée, il suffira d'exclure toutes les parties des trajectoires qui excèdent cette limite en les coupant par une droite horizontale, menée dans la couche où le fluide se terminera, et alors il deviendra facile de voir quelles sont les bran-

ches ou les portions de caustiques que cette suppression fait disparoître.

Ainsi dans l'air atmosphérique même où les réflexions se font toujours sous des inclinaisons très-petites, on décrira toutes les trajectoires dans toute l'étendue de leur cours, et avec la forme qui résulte de la loi que l'on aura choisie pour le décroissement des densités, puis en élevant successivement le sol à diverses hauteurs, on interceptera successivement les trajectoires les plus basses, et l'on verra ainsi disparoître par degrés et s'évanouir avec elles les phénomènes qu'elles produisoient.

Examinons maintenant la manière dont les *minima* des diverses trajectoires se suivent dans le sens horizontal. Le *minimum* de la trajectoire plus basse sera-t-il en avant de l'autre ou en arrière, et en général quel sera le lieu des *minima* des trajectoires consécutives?

Ces résultats dépendront de la loi que suivront les pouvoirs réfringens du fluide dans les différentes couches, et de la hauteur des trajectoires que l'on considère, car on peut assigner des lois dans lesquelles les *minima* des trajectoires situées à certaines profondeurs se rapprocheront de l'observateur à mesure que l'angle I augmente, tandis que dans d'autres lois elles s'éloigneront de lui; et souvent même ces deux effets pourront avoir lieu successivement à diverses profondeurs dans le même décroissement.

Pour confirmer ceci par des exemples, nous supposerons d'abord que les pouvoirs réfringens des couches décroissent en progression arithmétique, en sorte qu'on ait

$$K\rho = (K).(\rho).(1 - Az)$$

On aura donc alors

$$\varphi = Az$$

et l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos. I. dz}{\sqrt{\sin^2. I - mAz}}$$

elle a pour intégrale

$$x = -\frac{2. \cos. I}{mA}. \sqrt{\sin^2. I - mAz} + const.$$

Nous devons déterminer la constante de manière que l'origine de l'intégrale soit à l'observateur même; ce qui donne

$$const. = \frac{2 \sin. I. \cos. I}{mA}$$

et par conséquent

$$x = \frac{2 \cos. I}{mA}. [\sin. I - \sqrt{\sin^2. I - mAz}]$$

Le *minimum* des trajectoires a lieu lorsque le radical est nul, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\sin^2. I = mAz$$

ce qui donne

$$x = \frac{\sin. 2 I}{mA}$$

Ces deux équations déterminent les coordonnées du *minimum* de chaque trajectoire dont l'inclinaison est I. En éliminant cet angle on a

$$x^2 + 4. \left(z - \frac{1}{2 mA}\right)^2 = \frac{1}{m^2 A^2}$$

C'est le lieu de tous les *minima*, et l'on voit que ce lieu est une ellipse qui a son centre sur l'axe des z au-dessous de l'observateur, à une distance de l'origine égale à $\frac{1}{2\,mA}$, distance qui est aussi son demi petit axe; l'autre est horizontal et double du précédent. On voit donc que, pour les petites inclinaisons, les *minima* des trajectoires s'éloignent de l'observateur, à mesure que I augmente, qu'ensuite leur marche devient stationnaire lorsque l'angle I est de 45°, et qu'enfin depuis cette valeur jusqu'à 90° ils vont continuellement en se rapprochant de la verticale, par conséquent de l'observateur.

On peut remarquer que le mouvement de la lumière, dans le cas que nous venons d'examiner, est assujéti aux mêmes lois que le mouvement des projectiles dans le vide. Cela tient à ce que l'expression de la force accélératrice est en général

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2.\,(K).\,(\varrho).\,\varphi'$$

expression qui, dans le cas de la progression arithmétique, devient constante et égale à $-2\,A.\,(K).\,(\varrho)$.

Prenons maintenant pour exemple un décroissement plus rapide, par exemple proportionnel au carré des profondeurs, nous aurons alors :

$$\varphi = Az^2$$

et l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos.\,I.\,dz}{\sqrt{\sin^2.\,I - mAz^2}}$$

dont l'intégrale est

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{mA}} \text{ arc. sin. } \frac{z\sqrt{mA}}{\sin. I}$$

Je n'ajoute point de constante, afin que l'intégrale commence à l'observateur. Au *minimum* on a

$$\sin^2. I = mAz^2; \quad x = \frac{q. \cos. I}{\sqrt{mA}}$$

q étant le quart de la circonférence ou un quadrans.

Le lieu des *minima* sera donc

$$mAx^2 + mAq^2z^2 = q^2$$

équation d'une ellipse qui a son centre à l'observateur même, et son petit axe vertical, l'autre horizontal. Le premier a pour valeur $\frac{2}{\sqrt{mA}}$ le second $\frac{2q}{\sqrt{mA}}$. Dans cette loi les *minima* des trajectoires se rapprochent constamment de l'observateur, à mesure que l'angle I augmente, du moins en ne considérant que les trajectoires situées du côté des z positifs, c'est-à-dire au-dessous de l'observateur. Les trajectoires menées du côté des z négatifs présenteroient des résultats analogues, et la trajectoire, menée sous l'inclinaison $I = 0$, se confondroit avec l'axe des x. Tout cela tient à ce que, d'après la forme actuelle de la fonction φ, le pouvoir réfringent est le plus grand possible sur cet axe, et va ensuite en décroissant au dessus comme au dessous. Ces résultats sont fort différens de ceux que la progression arithmétique nous a présentés.

Je considèrerai encore un cas qui a l'avantage de se rencontrer fréquemment dans la nature, surtout quand la variation du pouvoir réfringent est très-rapide; c'est celui où l'on a

$$\varphi = \Psi - A$$

A étant une constante et Ψ une quantité telle qu'elle soit égale à A quand z est nulle, et de plus qu'en nommant Ψ' son coefficient différentiel relatif à z, la fonction $\frac{\Psi}{\Psi'}$ soit exactement ou à très-peu près constante. En effet, d'après cette valeur, l'équation différentielle devient

$$dx = \frac{\cos. I.\, dz}{\sqrt{\sin^2. I + mA - m\Psi}}$$

Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\frac{\sin^2. I}{\sin^2. I + mA} = \alpha^2$$

cette équation deviendra

$$dx.\ \text{tang}.\ I = \frac{\alpha.\, dz}{\sqrt{1 - \frac{m\alpha^2\Psi}{\sin^2. I}}}$$

et elle peut se mettre sous la forme

$$dx.\ \text{tang}. I = \alpha.\, dz + \alpha.\frac{\Psi}{\Psi'}.\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\alpha^2.\,\Psi}{\sin^2. I}}} - 1\right\}.\frac{d\Psi}{\Psi}$$

La partie de cette équation qui n'est point multipliée par $\frac{\Psi}{\Psi'}$ est intégrable et donne

$$x.\ \text{tang}.\ I = \alpha.\ z$$

C'est l'équation d'une ligne droite qui seroit la tangente initiale de la courbe en faisant Ψ égal à zéro. L'autre terme n'est pas intégrable en général, mais il le devient quand $\frac{\Psi}{\Psi'}$ est une quantité constante ou dont les variations sont assez petites pour que leur influence sur la valeur de ce terme puisse être négligée. Alors l'intégrale ne dépend plus que des quadratures, et l'on a

$$x.\,tang.\,I = \alpha.\,z - \alpha.\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,\Psi}{sin^2.\,I}}\right)^2}{\frac{m\alpha^2}{sin^2.\,I}} + const.$$

On détermina la constante par la condition que x, z et φ soient nuls en même-temps, ce qui donne $\Psi = A$, et par suite

$$0 = -\alpha.\,\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\,\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,A}{sin^2.\,I}}\right)^2}{\frac{m\alpha^2}{sin^2.\,I}} + const.$$

car, par notre précédente supposition $\frac{\Psi}{\Psi'}$ doit être traitée comme constante. D'après cela on a

$$x.\,tang.\,I = \alpha.\,z. - 2\,\alpha\,\frac{\Psi}{\Psi'}.\,log.\,\frac{1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,\Psi}{sin^2.\,I}}}{1+\sqrt{1-\frac{m\alpha^2.\,A}{sin^2.\,I}}}$$

Examinons maintenant les circonstances dans lesquelles cette intégrale peut être appliquée.

Son cas rigoureux seroit celui où les pouvoirs réfrin-

gens des couches décroîtroient suivant une exponentielle, ce qui donneroit pour φ une expression de la forme

$$\varphi = Ae^{az} - A$$

car on auroit alors

$$\Psi = Ae^{az}; \quad \frac{\Psi}{\Psi'} = \frac{1}{a}$$

En plaçant un thermomètre à diverses distances d'un plan échauffé plongé dans l'air atmosphérique, on trouve que les densités des couches sont très-bien représentées par cette loi, elle doit donc se retrouver fréquemment dans les phénomènes de mirage produit par la raréfaction de l'air à la surface de la terre ou de la mer. Dans ces phénomènes il arrive communément que la densité de l'air croît jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle elle devient sensiblement constante, ce qui est analogue avec la loi que nous examinons; car même dans les couches supérieures où z est négatif, et P plus grand que (P), la plus grande valeur de $-\varphi$ ou de $\frac{P-(P)}{(P)}$ est d'être égale à A, et cette valeur, qui répond à $z = -\infty$, n'arrive que par degrés insensibles.

Dans cette loi le *minimum* de chaque trajectoire est donné par la combinaison des deux équations

$$\sin^2. I = m\alpha^2. \Psi$$

$$x. \tang. I = \alpha. z + \frac{2}{a}. \alpha. \log. \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m\alpha^2. A}{\sin^2. I}}\right)$$

dans lesquelles on a

$$\alpha^2 = \frac{\sin^2. I}{\sin^2. I + mA}$$

En mettant pour α^2 sa valeur, ces équations donnent

$$sin^2.\ I = mA.\ (e^{az} - 1)$$

$$x = \frac{cos.\ I}{\sqrt{sin^2.\ I + mA}} . \left[z + \frac{2}{a} . \ log. \left(1 + \frac{sin.\ I}{\sqrt{sin^2.\ I + mA}}\right)\right]$$

On voit d'abord que $I = 0$ donne $x = 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire que la trajectoire menée sous une inclinaison nulle, a son *minimum* placé à l'origine des coordonnées qui est aussi le lieu de l'observateur. Par conséquent la courbe des *minima* finit par se rapprocher de l'observateur dans les petites inclinaisons, et coincide avec lui quand I est nul.

En faisant $mA = n$, les valeurs précédentes de x et de z peuvent être mises sous la forme

$$z = \frac{2}{a} . \ log. \ \frac{sin.\ I}{\alpha \sqrt{n}}$$

$$x.\ tang.\ I = \frac{2}{a} . \ \alpha.\ log. \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} . \ \frac{sin.\ I}{\sqrt{n}}\right)$$

en les regardant comme des fonctions de I. Par la différentiation on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-sin.\ 2\ I}{2 . \left[(1 + n).\ \alpha.\ log. \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} . \ \frac{sin.\ I}{\sqrt{n}}\right) - cos^2.\ I\right]}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{a.sin^2.I.\left\{(1+n).(cos^2.I - n).\alpha^3.\ log.\left[\frac{(1+\alpha)}{\alpha}.\frac{sin.\ I}{\sqrt{n}}\right] - \left[1 + (1+n).\alpha^2\right].\ cos^2.\right.}{2\ \alpha^2.\ \left\{(1+n).\ \alpha.\ log.\left[\frac{(1+\alpha)}{\alpha}.\ \frac{sin.\ I}{\sqrt{n}}\right] - cos^2.\ I\right\}^3}$$

ou, en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{sin.I}{\sqrt{n}} = \frac{sin.\ I}{\sqrt{mA}} = K$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\sin. 2I}{2\left[\frac{(1+n).K}{\sqrt{1+K^2}}.\log.(K+\sqrt{1+K^2}) - \cos^2 I\right]}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{an.\left[(1+n).(\cos.2I-n)\frac{K^3}{\sqrt{1+K^2}}.\log.(K+\sqrt{1+K^2}) - [1+(2+n).K^2].\cos^2 I\right]}{2\left[\frac{(1+n).K}{\sqrt{1+K^2}}.\log.(K+\sqrt{1+K^2}) - \cos^2. I\right]}$$

La première fait connoître l'inclinaison de la tangente à chaque point de la courbe des *minima*, la seconde indique la direction de la courbure relativement à l'axe des x.

La valeur de $\frac{dz}{dx}$ devient nulle quand I est égal à zéro ou à 90°, parce que son numérateur devient nul dans ces deux circonstances, son dénominateur ne l'étant point. Il est facile de voir qu'aucun des coefficiens différentiels des ordres supérieurs ne s'évanouit ni ne devient infini par cette supposition. Ainsi la courbe a deux tangentes horizontales correspondantes à ces deux inclinaisons.

Si maintenant nous considérons le dénominateur de $\frac{dz}{dx}$, nous verrons que, des deux termes qui le composent, le premier est nul quand I est nul, et va continuellement en augmentant jusqu'à $I = 90$, en restant toujours positif, tandis qu'au contraire le second terme $-\cos^2. I$ va continuellement en diminuant dans le même intervalle en restant toujours négatif, jusqu'à ce qu'il devienne nul quand $I = 90°$. Il y aura donc entre $I = 0 = I$ et 90 une valeur pour laquelle ces deux termes seront égaux, et il n'y en aura qu'une seule. Alors le dénominateur

de $\frac{dz}{dx}$ deviendra nul, et par conséquent $\frac{dz}{dx}$ sera infini.

Supposons n fort petit; la valeur de K, qui satisfait à cette condition, est, en négligeant le carré de n,

$$K = 1.66 - 6.23.\ n$$

et par conséquent la valeur correspondante de $sin.\ I$ est

$$sin.\ I = 1.66.\ \sqrt{mA} - 6.23.\ mA.\ \sqrt{mA}$$

Cette valeur de K rend $\frac{d^2z}{dx^2}$ infinie. Il est d'ailleurs aisé de voir que le dénominateur commun de ces deux expressions, est positif pour des valeurs de $sin.\ I$ plus grandes que la précédente, et négatif pour des valeurs moindres. Ainsi, le sens de la concavité de la courbe change au point où il devient nul. De plus, le signe de l'inclinaison de la tangente change aussi, c'est-à-dire que la courbe après s'être éloignée jusqu'à ce point de l'axe des z s'en rapproche ensuite constamment jusqu'à ce qu'elle vienne se terminer à l'observateur. Le point où le dénominateur devient nul, est donc un point de rebroussement, ou, pour parler plus exactement, c'est une limite de la courbe dans le sens horizontal.

Généralement on voit que $\frac{d^2z}{dx^2}$ est négatif lorsque I approche de 90° : la courbe tourne donc alors sa concavité vers l'axe des x. Au contraire, quand z est nul ou fort petit, $\frac{d^2z}{dx^2}$ est positif, et la courbe tourne sa con-

vexité vers le même axe. Entre ces deux limites elle peut avoir encore plusieurs points d'inflexion, et le sens de la courbure peut varier avec la valeur de n, mais d'après l'expression générale de $\frac{dz}{dx}$ on voit que la direction de la tangente ne change pas, dans les mêmes circonstances ; par conséquent le point de rebroussement sera unique, et c'est tout ce qu'il nous importe de savoir, car c'est de là que dépend le nombre et la position des images. Ainsi, en général, la courbe des *minima* aura une forme ovale, rentrante sur elle-même, et analogue en cela à celle que la progression arithmétique nous a présentée.

Les coordonnées du point de rebroussement déduites des équations précédentes sont

$$x = \frac{2 \cos^3. I}{a. (1 + mA). \sin. I}$$

$$z = \frac{2}{a}. \log. \sqrt{1 + \frac{\sin^2. I}{mA}}$$

On a de plus

$$\sin. I = 1.66. \sqrt{mA} - 6.23. mA. \sqrt{mA}$$

D'après ces expressions on voit que mA diminuant, le point de rebroussement s'éloigne de l'observateur dans le sens horizontal, et se rapproche de son niveau. Ainsi la seconde branche comprise entre $I = 0$ et I égal à la valeur précédente, se trouve resserrée entre des limites continuellement moindres. Enfin, si mA devient nul, le point de rebroussement s'éloigne à l'infini, et la seconde branche ne convient plus qu'à une seule trajec-

toire qui est la ligne droite horizontale menée par l'observateur.

Deux circonstances peuvent concourir à diminuer le produit mA. La première est la petitesse du nombre m, c'est-à-dire du pouvoir réfringent du milieu, la seconde est la petitesse de A, c'est-à-dire l'élévation de l'observateur dans les couches supérieures où la force réfringente n'éprouve que de très-petites variations; en effet, dans la loi que nous examinons en nommant P le pouvoir réfringent de la couche dont la hauteur est z, on a

$$\frac{(P) - P}{(P)} = A e^{az} - A$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{(P)} \cdot \frac{dP}{dz} = A a e^{az}$$

Si l'observateur est assez élevé pour que les variations du pouvoir réfringent soient presque nulles dans les couches où il se trouve, alors A devra aussi être presque nul, et quel que soit le pouvoir réfringent du milieu la dernière branche s'évanouira, ou pour parler plus exactement, se confondra avec l'axe des x.

A parler à la rigueur, la valeur de A ne peut devenir ainsi nulle que pour un observateur placé à une hauteur infinie au-dessus des couches où les forces réfringentes varient sensiblement; car ce n'est qu'à une pareille hauteur que la logarithmique qui représente la valeur de φ se confond avec son asymptote verticale. Mais si l'on supposoit une variation de force réfringente infiniment rapide, cette dégénération de la logarithmique en une

ligne droite, auroit déjà lieu à une hauteur finie au-dessus des couches où se font les variations sensibles des pouvoirs réfringens. La valeur de A seroit donc déjà nulle pour un observateur qui seroit placé à cette hauteur, et par conséquent la contraction de la dernière branche sur l'axe des x, et l'éloignement indéfini du point de rebroussement auroient lieu pour lui. C'est le cas de la réflexion intérieure dans les milieux homogènes. L'action d'un pareil milieu sur la lumière est sensiblement constante dans tout son intérieur. Elle ne varie qu'à la sortie de la molécule lumineuse, tout près de la surface du milieu; et ses variations, renfermées dans une étendue presque insensible, ont une extrême rapidité.

Généralement plus la valeur de mA sera petite, plus celle de $\frac{dz}{dx}$ sera petite aussi, et par conséquent plus la courbe des *minima* s'applatira et approchera de se confondre avec une ligne droite horizontale; ce qui arrivera enfin si A est nul, c'est-à-dire si la hauteur de l'observateur au-dessus des couches où la réfraction éprouve des variations sensibles, est infinie par rapport à l'épaisseur des couches dans lesquelles ces variations ont lieu. C'est encore le cas de la réflexion intérieure dans les milieux homogènes, comme on l'a vu précédemment.

Pour considérer séparément la branche supérieure de la courbe, qui a lieu pour les plus petites valeurs de z, il n'y a qu'à considérer $sin^2. I$ comme très-petit par rapport à mA ou à n; alors $\frac{sin^2. I}{mA}$ ou K^2 sera une quantité

fort petite dont nous pourrons négliger les puissances supérieures ; et en développant d'après cette supposition les valeurs générales de x et de z qui conviennent au *minimum*, on trouve qu'elles se réduisent aux expressions suivantes :

$$z = \frac{\sin^2. I}{m A a}; \quad x = \frac{2 \sin. 2 I}{m A a}.$$

c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes que pour une progression arithmétique dont la raison seroit mAa. Ainsi, dans les inclinaisons extrêmement petites, la branche que nous considérons se confond avec une ellipse dont le centre est au-dessous de l'observateur à une distance $\frac{1}{2\,m A a}$; distance qui est aussi égale au petit axe de cette ellipse, l'autre étant horizontale et double du précédent. De plus, à cause de la petitesse de la quantité mAa, on voit que les dimensions de cette ellipse sont très-considérables, et comme elle a son sommet à l'observateur, on voit que la branche qu'elle représente est très-peu courbe, ce qui devoit être d'après la petitesse des valeurs de $\sin. I$.

Si au contraire on veut considérer la branche inférieure de la courbe des *minima*, il n'y a qu'à regarder $\sin^2. I$ comme une quantité fort grande par rapport à mAa, ce qui pourra s'étendre encore à de très-petits angles si mAa est une fort petite quantité ; alors il suffira de faire $\alpha = 1$ dans les expressions générales de x et de z qui conviennent au *maximum*, et elles deviendront

$$z = \frac{2}{a}. \log. \frac{\sin. I}{\sqrt{n}}; \quad x. \tan g. I = \frac{2}{a}. \log. \frac{2 \sin. I}{\sqrt{n}}$$

Il est maintenant facile d'éliminer I entre ces deux équations.

Ces mêmes résultats auront lieu encore, sinon d'une manière exacte, au moins d'une manière approchée dans beaucoup d'autres lois; par exemple toutes les fois que la valeur de φ pourra être exprimée par une suite de termes de la forme

$$\varphi = A.(e^{az}-1) + A_1.(e^{a_1z}-1) + A_2.(e^{a_2z}-1) + \text{etc.}$$

$a\ a_1\ a_2$ étant de grands nombres, et $A\ A_1\ A_2$ des constantes arbitraires. En effet on aura alors

$$\frac{\Psi}{\Psi'} = \frac{A + A_1e^{(a_1-a)z} + A_2e^{(a_2-a)z}}{aA + a_1A_1e^{(a_1-a)z} + aA_2e^{(a_2-a)z}}$$

Rigoureusement parlant $\frac{\Psi}{\Psi'}$ sera une quantité variable, mais cette variation sera fort petite si les exposans a; a_1; a_2; sont de grands nombres comme nous l'avons supposé, et si l'on a pris pour a le plus grand d'entre eux. L'erreur que l'on commettra sur $\frac{\Psi}{\Psi'}$ perdra encore de son influence, si le pouvoir réfringent du milieu est très-foible, comme cela a lieu pour l'air atmosphérique; car alors, la trajectoire sera très-peu courbe, et nous avons vu que l'erreur de $\frac{\Psi}{\Psi'}$ ne porte que sur la différence des ordonnées de la courbe et de sa tangente extrême, différence qui sera encore très-petite au *minimum* même où elle atteint sa plus grande valeur.

Maintenant quelque soit la nature de la fonction φ qui représente la suite des pouvoirs réfringens des couches, on peut toujours en assigner une de la forme

$$\varphi = A . [e^{-a.(Z-z)} - 1] + A_1 . [e^{-a.(Z_1-z)} - 1] + A_2 . [e^{-a.(Z_2-z)} - 1] + \text{etc.}$$

qui coincidera avec elle dans tel nombre de points que l'on voudra, et qui en approchera de si près dans toute l'étendue du milieu donné, que la différence de leurs valeurs, dans cet intervalle, sera presque insensible et pourra être négligée. Cette fonction pourra donc être substituée à la fonction φ pour la commodité du calcul sans qu'il en résulte aucune erreur sensible dans les résultats physiques, pourvu que l'on se borne à la partie des deux courbes où l'on a déterminé le rapprochement des deux fonctions. Alors, si cette détermination donne pour l'un des exposans a a_1 a_2 un nombre très-considérable, l'intégrale que nous venons de trouver dans cette hypothèse pourra être employée comme une approximation de l'intégrale rigoureuse. Si plusieurs des exposans a a_1 a_2 étoient de grands nombres, on choisiroit le plus considérable, en ayant aussi égard aux valeurs des quantités A A_1 A_2 : généralement l'approximation sera d'autant plus grande que la variation des pouvoirs réfringens des couches sera plus rapide, et qu'elle donnera pour a a_1 a_2 des exposans plus considérables et plus différens entre eux.

Considérons enfin le cas général dans lequel les pouvoirs réfringens des couches décroissent suivant une loi quelconque. Mais supposons que cette variation n'ait lieu que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle le pouvoir réfringent reste toujours le même, et plaçons l'observateur dans les couches de réfraction constante. Ce cas est ordinairement celui de la nature lorsqu'on observe dans l'air atmosphérique, ou dans des fluides superposés. S'il n'est plus alors possible de déterminer généralement la courbe qui est le lieu des *minima* de toutes les trajectoires, on peut cependant découvrir l'influence que produit sur elle l'élévation de l'observateur, ce qui nous sera par la suite de la plus grande utilité.

Pour représenter d'une manière générale la loi de variation des pouvoirs réfringens dans les couches inférieures, supposons que, pour un observateur placé précisément à la limite où cette variation cesse, le lieu des *minima* fût donné par les équations

$$z = \pi\,(I)\,; \quad x = \Psi\,(z)$$

π et Ψ étant des fonctions quelconques, nous ne considérerons ici que le cas où la force réfringente des couches décroît continuellement à mesure que la profondeur augmente : dans ce cas $\frac{dz}{dI}$ ou π' sera une quantité positive dans toute l'étendue du fluide au-dessous de l'observateur ; mais $\frac{dx}{dz}$ ou Ψ' pourra devenir positif ou négatif, nul ou infini, ou même passer succes-

sivement par ces différens états, selon la loi du décroissement.

Maintenant, sans changer l'origine des coordonnées, plaçons l'observateur sur l'axe des z à une hauteur H au-dessus de la ligne où finit la variation des pouvoirs réfringens. Une trajectoire partie de son œil, sous une inclinaison I quelconque, sera rectiligne pendant toute la hauteur H, après quoi elle se courbera en entrant dans les couches de réfraction variable; mais sa première tangente sera la droite elle-même menée de l'observateur avec l'inclinaison I. L'élévation de l'observateur, au-dessus des couches variables, ne fait donc que transporter horizontalement chaque trajectoire d'une quantité égale à $\frac{H}{tang.\, I}$, et par conséquent le lieu de leurs *minima* sera donné par l'élimination de I entre les deux équations

$$z = \pi\ (I); \qquad x = \frac{H}{tang.\, I} + \Psi z$$

En différenciant ces équations, et y faisant varier I, x et z on en tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\Psi' - \frac{H}{\pi'.\, sin^2.\, I}} \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour un observateur placé sur la limite même de la réfraction constante, H seroit nulle et l'on auroit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\Psi'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Suivons les modifications produites par l'introduction de la quantité H.

Quelque soit la loi de variation des pouvoirs réfringens, la trajectoire menée sous l'inclinaison de 90 degrés perpendiculairement aux couches, se confond avec l'axe des z; et, en partant de cette valeur, les *minima* des trajectoires commencent par s'éloigner de cet axe; la valeur de Ψ' est donc nécessairement négative pour des valeurs de I peu différentes de 90 degrés; la courbe représentée par l'équation (2) commence donc par s'éloigner de l'axe des z, mais pour des valeurs de dz égales, elle s'en éloigne moins vite que la courbe (1) à cause du terme $-\frac{H}{\pi'.\sin^2.I}$ qui est du même signe que Ψ'.

Si la loi de variation des pouvoirs réfringens est telle que Ψ' soit constamment négatif dans toutes les couches variables, la marche de la courbe (1) se continuera dans ce sens indéfiniment; mais si Ψ' après avoir été nul devenoit positif, c'est-à-dire si la courbe (2) après avoir eu une tangente verticale revenoit sur elle-même en se rapprochant de l'axe des z, la marche de la courbe (1) se rallentiroit pareillement; et si Ψ' venoit à surpasser $\frac{H}{\pi'.\sin^2.I}$ elle se rapprocheroit aussi de l'axe des z; mais cet effet se rallentiroit continuellement à mesure que I deviendroit moindre à cause de l'accroissement continuel du terme négatif $\frac{-H}{\pi'.\sin^2.I}$. On voit même qu'en augmentant suffisamment H, le retour de la courbe (1) sur elle-même n'auroit jamais lieu. Enfin, ce terme devenant infini, quand I est nul, donne à la courbe une

asymptote horizontale qui est l'axe des x lui-même, limite des variations des forces réfringentes.

En résumant ces considérations, on voit qu'en partant de $I = 90°$ la courbe (1) commence par s'éloigner de l'axe des z, qu'ensuite, selon la loi de décroissement des forces réfringentes, elle peut subir des inflexions ou des rebroussemens qui tour à tour l'éloignent ou la rapprochent de cet axe; mais que dans toutes les lois possibles, elle finira toujours par une branche convexe vers la couche de réfraction constante, et qui aura pour asymptote la ligne horizontale par laquelle cette couche est limitée inférieurement. On voit de plus que cette dernière branche, exempte d'inflexions et de rebroussemens, commence sous des inclinaisons d'autant plus grandes que l'observateur est plus élevé au-dessus des couches variables. Ce sera donc elle seule que l'on devra le plus souvent apercevoir dans l'air atmosphérique où les réflexions ne sont possibles que sous de très-petites inclinaisons, surtout lorsque l'observateur sera fort élevé au-dessus de la couche variable, comme cela a souvent lieu dans les observations faites sur la mer où cette couche a presque toujours une épaisseur très-petite.

On peut vérifier ces considérations en les appliquant au cas particulier de la progression arithmétique où les coordonnées du *minimum* sont:

$$sin^2. I = mAz; \quad x = \frac{sin. 2I}{mA}$$

Pour un observateur élevé de la hauteur H au-dessus des couches variables, ce sera

$$\sin^2. I = mAz; \quad x = \frac{H}{\text{tang.}\, I} + \frac{\sin.\, 2\, I}{mA}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sin.\, 2\, I}{2\cos.\, 2\, I - \frac{mAH}{\sin^2.\, I}}$$

Il est facile de voir que la courbe a deux tangentes verticales correspondantes aux deux valeurs de I données par l'équation

$$\sin^2.\, I = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} - \frac{mAH}{4}}$$

et dont l'une est plus grande, l'autre plus petite que 30 degrés. A chacune de ces valeurs le signe de $\frac{dz}{dx}$ change, et avec lui le sens de la concavité ou de la convexité de la courbe : il en résulte qu'elle a la forme représentée par la *fig.* 2. Si H est nul, une des deux valeurs de I devient nulle ; le point M' se confond avec le point A, et la branche $M'H$ s'évanouit : la courbe est alors fermée et forme une ellipse. A mesure que H augmente, les deux points MM' se rapprochent l'un de l'autre, ils coincident lorsqn'on a

$$H = \frac{1}{4.\, mA}$$

Ce qui répond à une inclinaison de 30 degrés. Pour des valeurs de H plus grandes, la courbe revient sur elle-même et s'éloigne continuellement de l'axe des z.

Si l'on nomme e l'épaisseur des couches variables, depuis la surface du sol jusqu'à la hauteur où la réfraction devient constante; et que l'on désigne par I' l'inclinaison de la trajectoire tangente au sol, on aura

$$\sin^2. I' = mAe$$

Dans l'air atmosphérique la valeur de $\sin. I'$ est toujours extrêmement petite. Si l'on veut alors que le point de rebroussement le plus élevé se trouve à la surface du sol même, il faut que I' satisfasse à l'équation

$$2 \sin^2. I. \cos. 2 I - mAH = 0$$

ce qui donne

$$H = 2 e. \cos. 2 I'$$

ou pour des valeurs de I fort petites, comme cela a lieu dans l'air atmosphérique,

$$H = 2 e$$

c'est-à-dire que dans cette loi, lorsque la hauteur de l'observateur au-dessus du sol surpassera trois fois l'épaisseur des couches de densité variable, la partie de la courbe des *minima* qui s'élevera au-dessus du sol, et qui appartiendra à des tangentes visibles, sera toute convexe vers le sol et n'aura plus de point d'inflexion.

Tout ce que nous venons de dire sur la manière dont se termine la courbe des *minima* peut se confirmer encore très-simplement par quelques considérations géométriques. Elles ont ici cet avantage qu'elles permettent

de supposer la variation des densités, non seulement arbitraire, mais entièrement discontinue.

D'abord on peut prouver que quelque soit la loi des densités, pourvu que l'observateur soit placé tant soit peu au-dessus des couches variables, la courbe des *minima* finira toujours dans les petites inclinaisons par s'éloigner continuellement de l'observateur, en se rapprochant de son niveau de manière à avoir une asymptote horizontale, qui sera la ligne par laquelle les couches variables sont terminées. En effet, concevons une trajectoire quelconque menée de l'œil de l'observateur sous une inclinaison arbitraire. Cette trajectoire sera rectiligne jusqu'au moment de son entrée dans les couches variables; alors elle commencera à devenir courbe, et après avoir atteint son *minimum*, elle se réfléchira en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, puis enfin elle sortira des couches variables, sous la même inclinaison qu'elle y est entrée. Par ce point de sortie et par l'œil de l'observateur, menons une nouvelle trajectoire, celle-ci aura par construction son *minimum* plus éloigné de l'observateur que la précédente : elle l'aura aussi plus élevé ou plus rapproché de l'axe des x, puisqu'elle est nécessairement menée sous une plus petite inclinaison. On peut faire le même raisonnement sur la trajectoire suivante et le continuer ainsi indéfiniment à partir d'une inclinaison quelconque; et comme il n'y a de limite à ce rapprochement que quand la dernière trajectoire devient parallèle aux couches, et entièrement rectiligne, il s'ensuit que dans tous ces cas la courbe des *minima* ne

peut jamais se terminer autrement que par une branche très-applatie qui se rapproche insensiblement de l'axe des x, et finit par se confondre avec cet axe dans les plus petites inclinaisons.

Discussion de la seconde branche des trajectoires ; examen de leurs intersections.

Après avoir discuté tout ce qui concerne les premières branches des trajectoires depuis leur origine, qui est l'œil de l'observateur jusqu'à leur *minimum*, il est facile de conclure tout ce qui concerne leurs secondes branches, car les trajectoires étant nécessairement symétriques autour de leur *minimum*, puisque les couches d'égales densités sont planes et horizontales, il s'ensuit que les formes des deux branches sont en tout semblables. Mais de plus, les secondes branches, par la différence de leur position, pourront se couper entre elles et avec les premières, de manière à donner des images multiples, c'est ce qu'il faut examiner.

Pour cela considérons deux trajectoires OM, OM' *fig.* 3, parties du même point O sous les angles I et $I + \Delta I$ ΔI pouvant avoir une valeur finie. D'après ce que nous avons démontré précédemment, le *minimum* M' de la seconde sera placé plus bas que le *maximum* M de la première, mais il pourra se trouver plus rapproché de l'observateur comme dans les *fig.* 3 et 6, ou plus éloigné comme dans la *fig.* 4, ou enfin sur la même verticale comme dans la *fig.* 5, cela dépendra de la loi que suivront les pouvoirs réfringens des couches.

Dans tous ces cas, les premières branches des trajectoires qui se coupent déjà mutuellement au point O ne pourront pas s'entrecouper une seconde fois avant d'avoir obtenu leur *minimum*. Pour le faire voir reprenons la valeur générale de $\frac{dz}{dx}$ qui représente l'inclinaison de la tangente; cette valeur étant élevée au carré peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = tang^2. I. (1 - m\varphi) - m\varphi$$

D'après cette expression, lorsque deux trajectoires parties du même point O pénètrent dans la même couche, auquel cas $m\varphi$ est le même, l'inclinaison de la tangente est la plus grande pour celle qui a la plus grande valeur de I. Mais celle-ci étoit en arrière de l'autre à l'origine, elle se maintiendra donc en arrière jusques dans la couche où la première atteint son *minimum* : alors elle pénétrera plus avant dans le milieu réfrigent, et aura son *minimum* plus bas. Ainsi les deux premières branches qui s'entrecoupoient déjà à l'origine, ne pourront pas se rencontrer une seconde fois.

Mais les deux trajectoires auxquelles ces premières branches appartiennent, auront encore nécessairement un autre point d'intersection, soit entre la première branche de la trajectoire supérieure, et la seconde branche de la trajectoire inférieure comme dans la *fig.* 3, soit entre les deux secondes branches comme dans les *fig.* 4, 5 et 6, et selon que le *minimum* de la trajectoire inférieure précédera ou suivra l'autre dans le sens horizon-

tal, le point d'intersection sera au-dessous de l'observateur comme dans les *fig.* 3 et 6, ou à son niveau comme dans la *fig.* 5, ou enfin au-dessus de lui comme dans la *fig.* 4.

Ces résultats supposent seulement que les pouvoirs réfringens des couches suivent une loi continuellement décroissante au-dessous de l'observateur, et continuellement croissante au-dessus. Alors les secondes branches des courbes sont indéfinies; l'horizontalité des couches les rend nécessairement symétriques autour de l'ordonnée verticale qui passe par leur *minimum*. Leur amplitude OB; OB' est donc double de l'abscisse OP; OP' de ce *minimum;* de là il suit que si ce point se trouve sur la même verticale dans les deux trajectoires comme cela arrive dans la *fig.* 5, les amplitudes des deux courbes seront égales, et par conséquent leurs secondes branches se couperont sur la ligne horizontale qui passe par l'observateur; au contraire, dans la *fig.* 6 l'amplitude OB' de la trajectoire la plus basse est moindre que l'amplitude OB de la trajectoire la plus haute. Il y a donc nécessairement au-dessous de l'observateur un second point d'intersection qui peut être entre les deux secondes branches comme dans la *fig.* 6, ou entre la première branche de la trajectoire la plus haute et la seconde branche de la trajectoire la plus basse comme dans la *fig.* 3. Enfin si l'amplitude OB' est plus grande que OB comme cela arrive dans la *fig.* 4, il n'y aura nécessairement point d'intersection au-dessous de l'observateur, à cause de la symétrie des deux courbes; mais il y en aura au-dessus, car si

on les considère toutes deux à partir de l'axe horizontal OX où elles sont éloignées l'une de l'autre dans le sens horizontal de la quantité finie BB', les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{d^2z}{dx^2}$ pour la trajectoire OM' qui est la plus basse, seront plus grandes que pour la trajectoire OM. Par conséquent la première aura sa tangente au point B plus inclinée sur l'axe OX que la seconde, et en outre elle se relevera plus rapidement. Il en sera de même dans toutes les couches au-dessus de la ligne OX; par conséquent les courbes convergeront; l'intervalle horizontal qui les sépare dans chaque couche diminuera continuellement, et comme il est fini et que les courbes sont indéfinies, il s'ensuit qu'elles se rencontreront inévitablement.

Il est encore facile de prouver que le second point d'intersection sera unique. D'abord dans le cas des *fig.* 4, 5, 6 où deux branches de même nom se coupent, nous avons démontré précédemment, d'après l'équation différentielle, qu'elles ne peuvent se couper qu'en un point; car à cause de la symétrie des trajectoires, ce que nous avons dit des premières branches s'applique également aux secondes, et dans le cas de la *fig.* 3 où l'intersection a lieu entre deux branches de nom différent, si la branche MB en se prolongeant pouvoit aller rencontrer la branche $M'B'$, il est évident que dans le point où elle la couperoit, elle auroit sa tangente plus inclinée sur l'axe XO; or, cela est impossible puisque son *minimum* est plus élevé.

Les propriétés précédentes n'ont lieu qu'en supposant

le milieu indéfini et les pouvoirs réfringens continuellement décroissant de haut en bas. Si ces conditions n'étoient pas remplies, et si les pouvoirs réfringens après avoir augmenté jusqu'à une certaine limite, venoient ensuite à diminuer, il en résulteroit dans les trajectoires des inflexions au moyen desquelles les points de rencontre pourroient être plus nombreux. On ne peut pas soumettre ces effets à un calcul général puisque les élémens qui les déterminent sont tout à fait arbitraires, mais en décomposant le fluide en zônes où les valeurs des pouvoirs réfringens soient continuellement croissantes ou décroissantes suivant une même loi, on pourra dans chaque zône suivre la marche des trajectoires par les mêmes principes, et leur appliquer les mêmes raisonnemens.

Examinons maintenant la manière dont se suivent les intersections des différentes trajectoires. Cette recherche est très-intéressante, car c'est de là, comme on le verra tout à l'heure, que dépendent le nombre et la situation des images qui peuvent être reçues par l'observateur. Mais pour ne pas nous perdre dans des généralités inutiles en discutant des résultats qui peuvent être vus de mille manières, et même tout à fait arbitrairement, choisissons un cas particulier, par exemple, celui de la progression arithmétique; et les phénomènes qui se présenteront dans ce cas très-simple, nous serviront de guide dans tous les autres.

Lorsque les pouvoirs réfringens décroissent en progression arithmétique, nous avons vu que l'équation des premières branches des trajections est

$$x = \frac{2\cos. I}{mA}. (\sin. I - \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

les coordonnées X et Z du *minimum* sont données par les équations

$$X = \frac{2\cos. I. \sin. I}{mA};\quad \sin^2. I = mAZ$$

Les courbes étant symétriques autour de l'ordonnée verticale qui passe par leur *minimum*, l'équation des secondes branches sera la même que celle des premiers en changeant dans celle-ci l'abscisse x en $2X - x$, ce qui donne pour ces secondes branches,

$$x = \frac{2\cos. I}{mA}. (\sin. I + \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

En faisant évanouir le radical, on aura l'équation suivante qui comprend les deux précédentes,

$$mAx^2 - 2x.\sin. 2I + 2.(1 + \cos. 2I).z = 0 \ldots\ldots (1)$$

On voit que ces trajectoires sont des paraboles dont l'axe est vertical. Cherchons maintenant le lieu de leurs intersections, ou, ce qui revient au même, cherchons la courbe qui les toucheroit toutes. Pour cela, il faut égaler à zéro la différentielle de l'équation précédente par rapport à I seul, et éliminer ensuite I entre les deux équations; la différentiation donne

$$x. \cos. 2I + z. \sin. 2I = 0$$

la valeur de z en x étant substituée dans l'équation (1), celle-ci devient

$$mAx^2 - 2x.\sin.2I - 2.\frac{x.(1+\cos.2I).\cos.2I}{\sin.2I} = 0$$

Une de ses racines est $x = 0$, ce qui rend z nul; mais ces valeurs ne peuvent convenir qu'aux premières branches et non pas aux secondes comme il est facile de le voir d'après leurs équations. Elles signifient que les premières branches ne peuvent se couper ainsi qu'à l'origine des coordonnées, qui en effet est leur point commun de départ. Supprimant ce facteur, l'autre donne

$$x = \frac{2}{mA}.\frac{1}{\text{tang}.I}; \quad z = -\frac{2}{mA}.\left(\frac{1}{2\sin^2.I} - 1\right);$$

d'où l'on tire, en éliminant I,

$$z = \frac{1}{mA} - \frac{mAx^2}{4}$$

L'intégrale particulière cherchée est donc aussi une parabole dont l'axe coincide avec l'axe des z, et dont le sommet est placé sur cet axe au-dessous de l'observateur, à une distance $\frac{1}{mA}$ de l'origine des coordonnées. En sorte qu'il coincide avec le point le plus bas de l'ellipse qui est le lieu de tous les *minima* des trajectoires.

Ces résultats sont tracés dans la *fig.* 7. O est l'observateur, l'ellipse OSZ est le lieu des *minima*, et la parabole $ZMFT$ représente l'intégrale particulière des trajectoires que nous venons de déterminer. Examinons maintenant les conséquences qui résultent de cette disposition.

D'abord on voit que les trajectoires menées sous une

direction presque verticale, ont leurs intersections consécutives très-près de leur *minimum*. Cela devoit être, puisque Z étant un des sommets de l'ellipse, tous ces *minima* sont presque à la même hauteur. Les intersections des autres trajectoires consécutives s'éloignent continuellement du *minimum* à mesure que l'angle I diminue, et leur point de tangence avec la parabole $ZMFT$ s'éloigne aussi et s'élève indéfiniment sur cette courbe. La limite de ces contacts est donnée par la trajectoire OT' qui a son *minimum* au point O, et qui se confond à l'infini avec ZT. Cette trajectoire n'est autre chose que la parabole ZT dont le sommet est transporté de Z en O.

Il suit de là que toutes les trajectoires qui peuvent être menées du point O dans le milieu réfringent, sont entièrement comprises dans l'intérieur de la parabole OZT, par conséquent aucun objet situé hors de cet espace ne pourra être vu de l'observateur. A cause de cette propriété, nous appellerons la courbe ZFT *courbe limite*, ou *caustique*.

Considérons maintenant un objet AB situé dans la partie de l'espace visible qui est comprise entre la trajectoire OT' et la courbe limite OZT. Par son extrémité A on pourra mener deux trajectoires $At'O$ $At''O$ dont les secondes branches toucheront la courbe limite, l'une au-dessus du point A, l'autre au-dessous. Les premières branches de ces deux trajectoires se réuniront au point O où est placé l'observateur, et par conséquent celui-ci recevra deux images du point A. On peut également mener deux trajectoires par l'extrémité supérieure

B de l'objet et deux par chacun de ses points intermédiaires, de sorte que chacun de ces points enverra ainsi à l'observateur deux images; mais avec cette différence que les trajectoires dont le point de tangence est supérieur à l'objet se couperont au-dessus de lui, et au-delà relativement à l'observateur, tandis que les autres trajectoires qui sont les plus basses, et dont le point de tangence est inférieur à l'objet, se couperont entre l'objet et l'observateur, comme le représente la figure.

L'observateur recevra donc deux images de l'objet, l'une supérieure $A'B'$ qui sera droite, l'autre inférieure $A''B''$ qui sera renversée.

Si la partie inférieure *A* de l'objet étoit placé sur la courbe limite elle-même, par exemple au point *F*, les deux trajectoires AA', AA'' se réduiroient à une seule, et l'intervalle $A'A''$ des deux images deviendroit nul, ensorte qu'elles paroitroient reposer l'une sur l'autre en se touchant par leurs extrémités.

Si l'objet *AB* au lieu d'être situé au-dessous de la trajectoire OT' étoit situé au-dessus entre cette trajectoire et l'axe *OV*, les deux trajectoires supérieures AA', BB', ne pourroient plus aller toucher la courbe limite au-dessus de *A* et de *B* dans la branche *FT*; mais elles seroient remplacées par deux autres trajectoires qui auroient leur *minimum* de l'autre côté de l'axe *OV*, et qui viendroient toucher la courbe limite sur son autre branche $Z\Theta$. Ainsi, dans ce cas, il y auroit encore une image droite $A'B'$ au-dessus d'une image renversée : seulement les trajectoires qui donneroient la première auroient leur *minimum* situé

à gauche de l'axe, et celles qui donneroient la seconde auroient leur *minimum* du côté opposé.

Si dans l'équation des trajectoires on se donne x et y, et que l'on veuille déterminer I, on ne trouve généralement que deux valeurs qui donnent des trajectoires dirigées du même côté de la verticale, par conséquent chaque point situé dans l'espace visible ne peut envoyer à l'observateur que deux images au plus.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le milieu indéfini, et capable de produire la réflexion jusques dans les inclinaisons verticales; mais il n'en est pas ainsi dans la nature. Cette circonstance fera évanouir toutes les secondes branches dont l'inclinaison dépassera les limites de la réflexion intérieure dans le milieu que l'on aura considéré, et avec elles s'évanouiront pareillement les images qu'elles produisoient.

Dans ce cas les phénomènes seront les mêmes que si l'on élevoit dans le milieu à la hauteur du *minimum* de la trajectoire la plus basse que je nommerai la *trajectoire limite*, un plan solide qui absorbât tous les rayons. Par exemple, si ce plan est représenté par hSM', toutes les trajectoires plus inclinées que OS n'auront point de secondes branches; ainsi, les points contenus dans l'espace SKF, qui étoient précédemment visibles de deux manières, ne le seront plus du tout, et ils entreront dans l'espace invisible qui sera alors terminé de S en F par la trajectoire limite SF elle-même; et au-dessus du point F il le sera comme précédemment par la courbe limite FT qui ne change point de nature ni de situation. De plus,

en prolongeant indéfiniment la seconde branche FT'' de la trajectoire limite, on voit que les seuls points contenus dans l'espace $T''FT$ pourront envoyer de doubles images; car ce sont évidemment les seuls dont les deux trajectoires touchent la courbe limite FT au-dessus du point F, et par conséquent ce sont aussi les seuls dont les deux trajectoires aient leur *minimum* au-dessus de celui de la trajectoire limite. Pour tous les autres points situés dans l'espace visible, mais hors de l'espace $T''FT$, la trajectoire inférieure, celle qui donne le renversement, passera au-dessous du point S, et par conséquent disparoîtra.

Cet effet est précisément le même que celui que produit l'interposition du sol lorsqu'on observe dans l'air atmosphérique, ou en général la surface inférieure des vases quand on opère un des fluides limités. Mais ici la limite n'est plus celle de la réflexion intérieure, parce que la densité de la couche qui repose sur le sol ou sur le fond du vase n'est pas nulle, comme nous le supposions tout à l'heure, afin de pousser les considérations à l'extrême. La limite réelle pour chaque cas est donnée par la différence des pouvoirs réfringens du fluide dans les deux couches extrêmes, comme on l'a vu précédemment, et elle est la même que celle de la réflexion intérieure dans un fluide dont le pouvoir réfringent seroit égal à cette différence. En supposant donc, dans la figure, le sol élevé à la hauteur déterminée par cette nouvelle limite, on fera encore disparoître un plus grand nombre de trajectoires, et une nouvelle portion de la courbe limite; ce qui en restera servira comme tout à l'heure pour

séparer les points de l'espace qui seront encore visibles de ceux qui ne le seront plus, et les points qui peuvent encore envoyer deux images de ceux qui n'en peuvent plus envoyer qu'une seule directe.

Quoique tout ce que nous venons de dire convienne particulièrement à la progression arithmétique, cependant des résultats analogues ont lieu dans toutes les autres lois. Il existe toujours en avant de l'observateur, et au-delà de la trajectoire limite, un espace entièrement invisible; mais la caustique qui termine cet espace varie selon la loi de variation des pouvoirs réfringens.

On peut démontrer d'abord que cet espace commencera toujours au point de tangence de la trajectoire limite sur le sol, de sorte que tous les points du sol plus éloignés ne seront pas aperçus de l'observateur. En effet, les trajectoires menées de son œil sous une inclinaison moindre que la trajectoire limite, ayant leur *minimum* plus haut que ces points, ne pourront pas les atteindre, et les trajectoires menées sous une inclinaison plus grande seroient arrêtées et interceptées par le sol, en deçà du point de tangence.

Maintenant, la trajectoire limite menée sous l'inclinaison I, et la trajectoire infiniment voisine menée sous l'angle $I-dI$, se couperont dans leurs secondes branches, et *en général* à une distance finie de leur *minimum*. Il y aura donc toujours une première portion de la caustique, à partir du point de tangence, qui sera formée par la seconde branche de cette trajectoire, et qui remplacera la portion de caustique correspondante aux tra-

jectoires plus basses que l'interposition du sol a interceptées. Ce résultat s'est présenté dans la progression arithmétique, mais il est général et commun à toutes les autres lois : car, pour qu'il cessât d'avoir lieu, il faudroit que deux trajectoires consécutives pussent avoir leur *minimum* à la même hauteur, ce qui est impossible, comme on l'a vu précédemment. Seulement s'il arrivoit que la courbe des *minima* fût extrêmement applatie et partout peu différente de l'horizontale, alors deux trajectoires infiniment voisines se couperoient toujours très-près de leur *minimum*, la caustique formée par leurs intersections successives seroit aussi très-applatie, et n'auroit qu'une branche unique presque horizontale. Cela aura lieu en général lorsque les couches de densité variables n'auront qu'une épaisseur très-petite relativement à la hauteur de l'observateur supposé placé dans une couche de densité constante. Tel est particulièrement le cas de la réflexion intérieure dans les milieux diaphanes homogènes. Mais, en général, la caustique pourra avoir des formes beaucoup plus compliquées, comme nous le verrons par la suite ; elle pourra avoir des points de rebroussement qui tour à tour la rapprocheront et l'éloigneront de l'observateur.

Bornons-nous d'abord au cas simple et très-fréquent où elle ne seroit formée que d'une branche unique qui, commençant au point de tangence de la trajectoire limite sur le sol, iroit ensuite en s'élevant et en s'éloignant de l'observateur, cette première branche pouvant d'ailleurs être discontinue, voyez *fig.* 8. Maintenant si l'on sup-

pose qu'un objet mobile, de grandeur déterminée, qu'un homme, par exemple, s'éloigne de l'observateur en marchant sur la surface du sol, on devra observer les phénomènes suivans. Tant que l'objet sera situé entre l'observateur et le point de tangence S de la trajectoire limite, on le verra comme à l'ordinaire, son image sera droite et unique. Arrivé au point S l'objet semblera à l'horizon, et si c'est un homme, il paroîtra marcher dans l'eau. En s'éloignant davantage il paroîtra s'y plonger par sa partie inférieure qui deviendra invisible, mais si la distance SF est sensible, tant qu'il se trouvera entre les points S et F, il n'enverra point d'image renversée, seulement la partie inférieure de son corps paroîtra coupée par l'horizon. Au delà du point F, la partie comprise dans l'espace $T''FT$ paroîtra double, la partie supérieure continuera d'être vue droite et unique comme à l'ordinaire, et la partie inférieure étant de plus en plus invisible, le corps qui d'abord étoit vu tout entier, paroîtra maintenant réduit à son buste. Ces apparences continueront jusqu'à ce que le sommet de la tête atteigne la trajectoire limite, alors l'image renversée de la tête paroîtra à l'horizon; plus tard elle le quittera, et le haut du corps restant seul visible paroîtra avec son image renversée suspendu en l'air jusqu'à ce qu'enfin la partie visible et son image diminuant toujours par l'effet de l'éloignement se réduisent à un point unique qui s'évanouira sur le fond du ciel.

Ces phénomènes qui se déduisent rigoureusement de la théorie ne sont pas une simple spéculation mathéma-

tique. Nous les avons réellement observées M. Mathieu et moi à Dunkerque, et ils sont représentés dans la *fig.* 9, tels que nous les avons vus. L'homme qui nous servoit de signal portoit une grande règle de bois oblique, et le point où la règle paroît brisée, indique la hauteur de la caustique au-dessus du sol pour les divers éloignemens.

Ceci nous a servi pour déterminer exactement les ordonnées de cette caustique pour diverses distances, et celles de la trajectoire limite. L'expérience en est représentée dans la *fig.* 10. Un de nous restant au cercle répétiteur, regardoit avec la lunette une grande règle de bois divisée en centimètres que le second observateur lui présentoit verticalement à des distances connues. Il est clair que le renversement des divisions suffisoit pour faire connoître l'élévation de la caustique, mais comme le point précis de ce renversement étoit difficile à apercevoir à cause des ondulations excessives de l'air, le second observateur tenant un piquet à la main, indiquoit successivement sur la règle un décimètre, ou deux, ou trois ou davantage, et à chaque fois faisant un signal en élevant son autre main au-dessus des couches pour annoncer le changement de hauteur. Si le point marqué sur la règle tomboit au-dessous de la caustique on n'apercevoit pas la pointe du piquet dans la lunette, non plus que la main qui le tenoit. C'est ce que représente la première position de la figure, mais lorsque le piquet arrivoit sur la caustique, les deux images se touchoient par leur pointe, ou si la succession des hauteurs de décimètre en décimètre ne permettoient pas qu'il tombât exactement

sur cette position, on pouvoit estimer aisément d'après la série des apparences, la fraction de décimètre dont il falloit tenir compte. On avoit donc ainsi la hauteur de la caustique d'une manière très-approchée. Or, l'observateur qui faisoit ces signaux sur la règle, ignoroit absolument l'instant où il atteignoit le caustique de l'autre observateur; c'est pourquoi il la dépassoit bientôt par d'autres indications. Dans ce cas, le deux images du piquet se séparoient comme le représente la troisième position de la *fig.* 10, l'image supérieure s'élevant toujours, l'inférieure descendoit jusqu'à atteindre enfin l'horizon apparent. Alors la pointe du piquet tomboit évidemment sur la trajectoire limite, ce qui détermine l'ordonnée de cette trajectoire, ou sa hauteur au-dessus du sol. On doit remarquer que l'image inférieure descendoit par degrés inégaux, et de plus en plus petits à mesure qu'elle approchoit de l'horizon apparent, où ses abaissemens étoient presque insensibles quoique les élévations de l'image supérieure changeassent toujours de la même quantité. Cela prouve que les images renversées des objets devoient être plus courtes que leurs images directes, et d'autant plus que les objets étoient plus élevés au-dessus de la caustique. Nous avons en effet vérifié cette circonstance par des mesures précises, et la simple vue l'indiquoit assez, mais nous y reviendrons, et nous la démontrerons par le calcul plus loin, en traitant des dimensions relatives des images, ce qui nous conduira à expliquer le phénomène de la suspension.

Les procédés que je viens d'exposer nous ont fait con-

noître les ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite pour des distances connues, et pour un état donné du ciel; car on présume aisément que ces ordonnées sont très-variables d'un jour à l'autre. Nous eûmes même le soin de choisir pour les observer, un beau temps et un ciel sans nuages, car la seule apparition ou disparition d'un rayon de soleil, y cause de très-grandes modifications : mais cela ne suffisoit point encore pour construire nos deux courbes, il falloit connoître encore la surface du terrain sur laquelle on devoit les rapporter.

Cette surface n'étoit ni plane ni horizontale, deux circonstances bien singulières puisqu'elle étoit formée par la laisse de basse mer. En partant du point où nous observions, le terrain alloit toujours en s'élevant, d'abord avec assez de rapidité jusqu'à une petite distance, ensuite plus lentement suivant une pente douce qui se prolongeoit jusqu'aux objets dont nous observions les images à l'extrémité de la plaine sablonneuse. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que cette configuration nous fut indiquée par les observations avant que nous l'eussions vérifiée par le nivellement, car j'avoue que de nous-mêmes nous ne l'aurions pas soupçonnée, persuadés que la mer faisoit tous les jours le nivellement de cette surface. Mais le 10 mars, par un temps froid et couvert, le thermomètre centésimal étant à 7°,5 sur le sable, et à 5°,6 dans les couches de densité constantes, nous observâmes la dépression de l'horizon apparent de 3′ 56″,52, le centre du cercle étoit alors à $1^m,15$ au-dessus du sol. Nous observâmes ensuite ce même horizon en plaçant le cercle sur

le sable même, de manière que son centre étoit élevé de 0,61. Cette hauteur surpassoit encore de beaucoup celle des couches de densité variables qui n'avoient qu'une très-petite épaisseur au-dessus du sol. Dans cette seconde position, l'abaissement de l'horizon ne fut plus que de 30″. Cependant si la surface du terrain eût été plane, les densités extrêmes étant les mêmes, la dépression auroit dû être aussi la même que dans la première position du cercle. La grande différence de ces dépressions indiquoit donc que le terrain étoit inégal, et le sens de cette différence montroit qu'il alloit en s'élevant, d'abord d'une manière plus rapide, ensuite plus lente. Ces conjectures furent pleinement vérifiées, lorsque nous nous transportâmes au même lieu, à la mer descendante, pour examiner comment elle l'abandonnoit. Nous y reconnûmes l'inclinaison que nous avions présumée. D'après cela nous nous décidâmes à niveler exactement le terrain, dans la direction du rayon visuel, ce que nous fîmes avec beaucoup de soin, au moyen du cercle répétiteur transporté successivement à des stations éloignées les unes des autres de 185^m. Nous avons ainsi déterminé la coupe représentée dans la figure 11, où l'on a aussi tracé la caustique et la trajectoire limite résultante des mesures prises le 8 mars. Il est nécessaire de dire que l'échelle adoptée pour les abscisses, est 336 fois moindre que celle qui a servi pour les ordonnées. Il eût été impossible d'employer la mêm eéchelle pour les unes et pour les autres, sans étendre démesurément la longueur de la figure, et il en seroit de plus résulté que les ondulations du terrain et la cour-

bure de la caustique et des trajectoires, auroient été à peine sensibles. Voici au reste les mesures exactes de toutes les quantités employées dans cette construction.

Mesures des ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite, le 8 *mars* 1809.

Numéros des stations.	Abscisses ou distances à l'observateur, en prenant 36 mètres pour unité.	Ordonnées de la caustique en décimètres.	Ordonnées de la trajectoire limite en décimètres.
1	2	En deçà de l'horizon app.	. . . .
2	3.75 = 210 mètres	0	0 Horiz. appar.
3	4.75	0	0 Les pieds marchant dans l'eau.
4	5.75	Non observé.	0.2
5	6.75	Non observé.	0.5
6	7.75	1	2
7	8.75	1.5	Non observé.
8	9.75	1.8	4.2
9	10.75	2	Non observé.
10	11.75	2.5	8
11	12.75	3	10
12	13.75	3.3	10
13	14.75	3.5	12
14	15.75	3.5	11

Les valeurs des ordonnées de la trajectoire limite deviennent un peu incertaines lorsque cette trajectoire s'élève beaucoup au-dessus de la caustique comme dans les dernières observations; alors 1 ou 2 décimètres de variation dans la hauteur de l'image directe ne sont plus sensibles dans l'image renversée. Telle est probablement la cause des petites anomalies que l'on y remarque et que je n'ai pas voulu corriger.

Nivellement du terrain.

Différences de niveau en centimètres.		Distances des stations en mètres.	
	$P_1M_1 = 58$		$AP_1 = 185$
	$P_2M_2 - P_1M_1 = 7$		$P_1P_2 = 185$
	$P_3M_3 - P_2M_2 = 0$		$P_2P_3 = 185$
	$P_4M_4 - P_3M_3 = 10$		$P_3P_4 = 185$
	$P_5M_5 - P_4M_4 = 11.5$		$P_4P_5 = 185$
	$P_6M_6 - P_5M_5 = 13$		$P_5P_6 = 185$
	$P_7M_7 - P_6M_6 = 0.5$		$P_6P_7 = 185$
	$P_9M_9 - P_7M_7 = 15$		$P_7P_9 = 370$
Différ. totale . .	$P_9M_9 = 115.0$	Dist. totale. .	$AP_9 = 1665$

Je suis persuadé que cette élévation du terrain en pente douce est la cause déterminante qui rendoit la suspension et le mirage sensibles tous les jours, pour les plus légères différences de température, et par des temps où l'on n'auroit jamais espéré que ces phénomènes se montreroient. L'élévation rapide qui avoit lieu d'abord près du cercle produisoit le même effet que si l'on eût diminué sa hauteur au-dessus du sol, en laissant subsister les mêmes différences de températures extrêmes. Au-delà de cette première rampe, la pente plus douce du terrain, incliné seulement à l'horizon de 1′ 18″, permettoit aux trajectoires de tomber sur cette portion de la surface avec le degré d'obliquité nécessaire pour se réfléchir; alors la petite inclinaison 1′ 18″ diminuant d'autant leur dépression apparente, relevoit, pour ainsi dire, leurs secondes branches, et leur donnoit, indépendamment de la température, l'inclinaison nécessaire pour qu'elles pussent

se terminer à des objets terrestres éloignés, situés à une grande hauteur au-dessus du sol, par conséquent fort visibles et fort élevés au-dessus des couches de densité variable. Une autre conséquence résultante de cette disposition du terrain, c'est que les phénomènes n'étoient point réciproques pour deux observateurs qui se regardoient mutuellement. Par exemple, l'un étant en o, l'autre en o' à la même hauteur de 1^m16 au-dessus du sol, l'observateur o voyoit o' à moitié plongé dans l'eau avec une partie de son buste renversée, tandis que o' voyoit o seulement par vision directe comme à l'ordinaire. La raison en est que le premier étant abaissé par la pente rapide AM étoit favorisé par cette circonstance qui devenoit au contraire défavorable à l'autre observateur, parce qu'elle l'empêchoit de mener au premier une trajectoire curviligne qui auroit dû avoir son *minimum* dans cette partie si le plan M_1M_2 s'étoit prolongé sous la même inclinaison. Aussi pour observer o, il falloit que o' s'abaissât jusqu'au L_3 sur la trajectoire limite, afin de faire tomber le *minimum* sur M_1M_2', et pour le voir disparoître il falloit qu'il se baissât jusqu'au C^3 sur la caustique en se couchant sur le terrain.

Il existe un moyen facile de voir commodément ces phénomènes, même lorsqu'ils sont à peine sensibles. C'est d'adapter devant l'objectif d'une lunette un miroir plan incliné de 45°, alors en tenant la lunette verticale, le miroir donne l'image des objets situés à l'horizon, et en l'approchant plus ou moins du sol ou du corps échauffé on observe l'image droite et l'image renversée dans le champ de la lunette. Cet appareil a été imaginé

par M. Wollaston. Il y avoit placé un micromètre avec lequel il mesuroit la dimension des images, depuis le point où l'image renversée touchoit l'horizon apparent jusqu'au point correspondant de l'image droite. Mais il est facile de sentir que pour un même état de l'air, cet angle dépend de la distance de l'objet et de sa hauteur, même en supposant toujours l'œil à la même place; car la seconde branche de la trajectoire limite rencontre l'objet d'autant plus haut qu'il est plus éloigné. Supposons toujours l'observateur dans les couches supérieures où la densité est sensiblement constante : si le sommet de l'objet observé se trouve placé à la même hauteur que l'œil, l'intervalle observé par le moyen de M. Wollaston sera précisément égal à l'angle I ou à la dépression apparente de l'horizon. Si l'objet est plus bas que l'œil, l'intervalle observé sera moindre que I; il sera plus grand si l'objet est plus élevé que l'œil; et enfin si l'objet étoit infiniment éloigné, il seroit égal à $2I$ ou au double de la dépression apparente. De plus grandes variations encore auroient lieu si l'observateur pénétroit dans les couches de densité variables. Ces circonstances auxquelles M. Wollaston n'a point eu égard, sont très-probablement la cause des irrégularités qu'il a remarquées lui-même dans ses observations, et c'est ce qui m'a empêché de les calculer.

Les phénomènes que nous venons d'examiner ne supposent à la caustique qu'une branche unique, mais elle peut aussi en avoir plusieurs, et c'est ce qui produit la multiplicité des images extraordinaires. Pour en donner un exemple simple, il ne faut que modifier un peu le

cas de la progression arithmétique et supposer, qu'à une certaine hauteur le pouvoir réfringent ne varie plus. Cette supposition particulière a du rapport avec ce qui se passe généralement dans l'air atmosphérique lorsqu'il repose sur un corps échauffé. Dans ce cas, la forme des trajectoires sera la même que précédemment, tant qu'elles resteront dans les couches inférieures où le pouvoir réfringent est variable, mais au-dessus de cette limite, elles se changeront en des lignes droites indéfinies qui seront les prolongemens de leurs tangentes extrêmes. Cette modification devra nécessairement introduire aussi des changemens dans le nombre et dans la position des images qui pourront être reçues par l'observateur, c'est ce qu'il s'agit d'examiner.

Pour commencer par le cas le plus simple, nous placerons l'observateur sur la limite même qui sépare les couches variables de celles où le pouvoir réfringent est constant; nous chercherons, comme précédemment, la courbe limite de toutes les trajectoires non pas pour leur partie curviligne, car nous savons que sa limite est une parabole; mais pour leur portion rectiligne: et à cet effet nous allons d'abord déterminer l'équation des lignes droites dans lesquelles elles dégénèrent.

Cette équation se présente comme d'elle-même; car à cause de la symétrie des trajectoires, leurs secondes branches, lorsqu'elles reviennent au niveau de l'observateur en sortant des couches inférieures, ont des inclinaisons exactement contraires à celles que leurs premières branches avoient lorsqu'elles y sont entrées. Ces secondes

branches entrent donc dans les couches de réfraction constante avec une inclinaison I, de plus elles y entrent sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale au double de l'amplitude de la trajectoire, ainsi la ligne droite dans laquelle celle-ci dégénère, à partir de ce point, a pour équation

$$z = (2\,X - x).\ tang.\ I$$

Dans le cas particulier de la progression arithmétique on a

$$X = \frac{sin.\ 2\,I}{mA}$$

par conséquent

$$z = \frac{4\,sin^2.\ I}{mA} - x.\ tang.\ I. \qquad (1)$$

C'est l'équation particulière de toutes ces lignes droites. En prenant sa différentielle relative à I seul, et l'égalant à zéro, on aura

$$x = \frac{8\,sin.\ I.\ cos^3.\ I}{mA} \qquad (2)$$

c'est la condition des intersections successives. Il faut maintenant éliminer I entre cette équation et la précédente. Or celle-ci donne pour $sin^2.\ I$ deux valeurs, qui sont

$$sin^2.\ I = \frac{1 - \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}$$

$$sin^2.\ I = \frac{1 + \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}$$

En mettant successivement ces deux valeurs de $sin^2.\ I$

dans l'équation (2), après avoir élevé ses deux membres au carré, on trouve

$$\frac{m^2A^2x^2}{16} = (1 - \sqrt{1 + 2\,mAz}).\left(\frac{3 + \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}\right)^3$$

$$\frac{m^2A^2x^2}{16} = (1 + \sqrt{1 + 2\,mAz}).\left(\frac{3 - \sqrt{1 + 2\,mAz}}{4}\right)^3$$

Ce sont les deux branches de la courbe formée par les intersections successives de toutes les droites ; cette courbe est représentée dans la *fig.* 12.

La première de ses branches commence à l'origine même, car $z = o$ y donne $x = o$, elle ne s'étend que du côté des z négatives, c'est-à-dire au-dessus de l'observateur, car z positif donneroit x imaginaire ; si l'on suppose z fort petit, l'équation de cette branche se réduit à

$$z = -\frac{mAx^2}{16}$$

elle se confond donc alors avec une parabole, mais cette coincidence n'a lieu que pour de très-petites valeurs de z ; enfin cette branche s'arrête lorsqu'on a

$$1 + 2\,mAz = 0$$

ce qui donne

$$z = -\frac{1}{2.\,mA}; \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2.\,mA}$$

Ces valeurs de x et de z répondent à une valeur de $sin^2.\,I$ qui est

$$sin^2.\,I = \tfrac{1}{4}; \quad \text{d'où l'on tire} \quad I = 30°$$

Au-delà de ce terme la branche que nous discutons

devient imaginaire, mais c'est précisément alors que l'autre commence, et elle va continuellement en se rapprochant de l'observateur, et en s'abaissant vers l'axe des x qu'elle coupe enfin dans un point dont l'abscisse est

$$x = \frac{2}{mA}$$

Ce point répond à une valeur de $sin.\ I$ qui est

$$sin^2.\ I = \tfrac{1}{2}; \quad \text{ce qui donne} \quad I = 45^\circ$$

En effet, c'est alors que les intersections des trajectoires commencent à se faire dans les couches dont le pouvoir réfringent est variable.

Pour connoître maintenant le sens de la courbure de chacune des deux branches précédentes, pour le suivre dans toute leur étendue, et savoir si elles n'ont pas de points d'inflexion, il faudroit différencier les équations précédentes entre x et z, mais on y parviendra plus facilement au moyen des équations entre x et z et I.

En effet, les valeurs de x et de z résultantes des équations (1) et (2) peuvent être mises sous la forme

$$mA.\ x = 2.\ sin.\ 2\ I + sin.\ 4\ I$$
$$mA.\ z = 1 - 2.\ cos.\ 2\ I + cos.\ 4\ I$$

en faisant varier dans ces équations x, z et I, et prenant dx pour différentielle constante, on en tire

$$\frac{dz}{dx} = -\ tang.\ I$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{(1 + cos.\ 6\ I).\ tang^3.\ 3\ I}{2.\ (sin.\ 2\ I + sin.\ 4\ I)^3}$$

Ces valeurs s'appliquent également aux deux branches

de la courbe limite. La première, celle de $\frac{dz}{dx}$, nous apprend que cette courbe est partout tangente à quelqu'une des trajectoires, cela devoit être. La seconde, celle de $\frac{d^2z}{dx^2}$, nous fera connoître par son signe dans quel sens chacune des branches tourne sa convexité. Or le facteur $\frac{1 + \cos. 6 I}{2. (\sin. 2 I + \sin. 4 I)}$ est constamment positif depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 45°$, c'est-à-dire dans toute l'étendue des deux branches; mais le facteur $tang^3. 3 I$ est positif sur la première branche depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 30°$, et négatif sur la seconde depuis $I = 30°$ jusqu'à $I = 45°$. La première branche tourne donc sa concavité vers l'axe des x, et la seconde sa convexité : c'est ce que représente la *fig.* 12.

Dans cette figure O est l'observateur, et OX l'axe des x qui sépare les couches inférieures où la densité est variable, des supérieures où elle est constante. La parabole ZF est comme dans la *fig.* 7 la limite des intersections des trajectoires consécutives qui se coupent au-dessous de la ligne OX. Ces trajectoires s'étendent depuis les inclinaisons verticales jusqu'à celle de 45 degrés. Pour les trajectoires suivantes, depuis $I = 45°$ jusqu'à $I = 30$ degrés, les intersections successives se font sur la branche FR qui les touche toutes et leur sert de limite; enfin depuis $I = 30°$ jusqu'à $I = 0$, les intersections se font sur la branche RO qui, près du point O se confond avec une parabole.

Il résulte d'abord de cet arrangement que tous les

points contenus dans l'espace ZFX terminé par le prolongement de l'axe OX et la portion de parabole ZF seront tout-à-fait invisibles pour l'observateur.

Si par le point F on mène à la parabole ZF la tangente FT, qui fera avec l'axe des x un angle de 45°, tous les points compris dans l'espace indéfini $VOZFT$ pourront envoyer à l'observateur une trajectoire concave qui touchera la parabole ZF entre les deux points Z et F, et qui correspondra à une valeur de I comprise entre 90 et 45 degrés. Si le point donné est compris dans l'espace elliptique $OM'M''Z$, il sera vu ainsi par une première branche ; s'il est hors de cet espace, il sera vu par une seconde.

Si l'on prolonge indéfiniment les droites FT, RT' qui sont les tangentes extrêmes de l'arc FR, ce qui donnera l'angle TFT' qui sera de 15 degrés, tous les points compris dans cet angle pourront envoyer une tangente à l'arc FR, et par conséquent à l'observateur une trajectoire concave qui les rendra visibles par sa seconde branche, et qui répondra à une valeur de I comprise entre 45° et 30°.

De tous les points compris dans l'espace FtR on pourra mener deux tangentes à l'arc FR, et par conséquent envoyer à l'observateur deux trajectoires, qui correspondront aussi à des valeurs de I comprises entre 45 et 30 degrés et dont les secondes branches les rendront visibles.

Il n'en sera pas de même des points compris dans l'espace θtF ; ils ne pourront envoyer à l'arc FR qu'une seule tangente ; ils n'enverront donc à l'observateur

qu'une seule trajectoire dont l'inclinaison soit comprise entre 45 et 30 degrés.

Tous les points compris dans l'espace $O\theta R$ pourront envoyer à l'arc OR deux tangentes, et par conséquent à l'observateur deux trajectoires correspondantes à des valeurs de I comprises entre 0 et 30 degrés. Ces trajectoires parviendront encore à l'observateur par leurs secondes branches.

Tous les points compris dans l'espace indéfini $XORT''$, c'est-à-dire entre l'axe OX, la courbe OR et le prolongement de sa tangente extrême, pourront envoyer une tangente à l'arc OR, et par conséquent à l'observateur une trajectoire comprise entre les inclinaisons $I = 0$ et $I = 30$ degrés.

Enfin, tous les points situés au-dessus de l'axe OX dans les couches de réfraction constante peuvent envoyer directement au point O une trajectoire rectiligne; c'est celle qui les rend visibles ordinairement.

Maintenant si un point se trouve appartenir en même-temps à plusieurs de ces espaces, il cumulera les propriétés qui leur appartiennent, et de là résulteront pour l'observateur plusieurs images visibles d'un même objet.

Soit par exemple l'objet AB compris dans l'espace $OR\theta$, il pourra d'abord envoyer à l'observateur de ses extrémités A et B deux trajectoires rectilignes qui donneront l'image directe ab, puis deux AA', BB' tangentes à l'arc OR et se coupant entre l'observateur et l'objet, d'où résultera l'image renversée $B'A'$; puis deux autres trajectoires tangentes au même arc, mais se coupant en

arrière de l'objet d'où résultera l'image droite $A''B''$; et enfin deux trajectoires AA''', BB''' tangentes à la parabole ZF d'où résultera l'image renversée $B'''A'''$; en tout quatre images, deux droites et deux renversées alternant les unes avec les autres.

Si le point B étoit situé sur la courbe OR, les deux images $B'A'$, $A''B''$ se toucheroient et paroîtroient poser l'une sur l'autre. Si en même temps le point A reposoit sur l'axe θX, les points A' et a des deux images ab, $A'B'$ seroient aussi en contact; par conséquent les trois images ab, $B'A'$, $A''B''$ paroîtroient immédiatement superposées. Si l'objet étoit placé dans l'espace FTR, il pourroit encore envoyer à l'observateur quatre images alternées comme les précédentes; mais les angles sous lesquels ces images arriveroient à l'observateur seroient différens. L'image inférieure $B'''A'''$ ne seroit plus donnée par la parabole ZF, mais par la branche FR; il en seroit de même de l'image droite $B''A''$ qui seroit donnée par ce même arc au moyen de trajectoires qui se couperoient en arrière de l'objet. Il n'y auroit plus qu'une seule image donnée par l'arc OR; elle seroit analogue à $B'A'$ et renversée comme elle. La quatrième image ab seroit toujours droite et donnée par des rayons directs, comme précédemment.

Par des considérations semblables on verra facilement que les objets situés dans l'espace θtF enverront aussi à l'observateur quatre images, deux droites, l'une par des trajectoires rectilignes S, l'autre par l'arc FR, et deux renversées par les arcs OR et ZF. Au-dessous de OF les ob-

jets ne pourront envoyer que deux images, l'une droite et supérieure par des trajectoires tangentes en arrière à la parabole ZF ou aux branches FR, RO; l'autre par la parabole ZF inférieure et renversée. Pour tous les objets situés au-dessus de OX dans l'espace $XFRT$, il n'y aura que deux images, une droite et une renversée; enfin, comme nous l'avons déjà remarqué, dans l'espace ZFX il n'y en aura pas du tout.

Dans l'air atmosphérique, et même dans tous les liquides superposés, la limite des réflexions intérieures sera toujours bien inférieure à 45 degrés, par conséquent l'image renversée $B'''A'''$ la plus basse de toutes, et qui est donnée par la branche parabolique ZF, ne se formera point.

Il en sera de même dans l'air atmosphérique, et dans presque tous les liquides, des images données par l'arc FR, qui répondent à des réflexions intérieures de plus de 30 degrés, et elles ne se formeront pas non plus.

Mais les trajectoires données par la branche OR subsisteront toujours, quelque foible que soit le pouvoir réfringent du milieu, puisqu'elles s'étendent depuis 30 degrés jusqu'aux plus petites inclinaisons; d'où il suit que dans l'air atmosphérique et dans tous les fluides superposés, lorsque les pouvoirs réfringens des couches décroîtront en progression arithmétique, on pourra toujours voir trois images savoir, deux droites et une renversée placée entre les deux autres, lorsque les objets seront placés convenablement.

Dans l'air atmosphérique et dans tous les milieux où

la différence des pouvoirs réfringens seroit très-foible, la branche *OR* s'étendroit très-loin, et le point de rebroussement *R* seroit aussi extrêmement éloigné. Il suffiroit donc alors de considérer la branche *OR* comme une parabole à cause de la petitesse nécessaire des indications.

Supposons maintenant qu'en conservant la loi précédente d'un décroissement de pouvoirs réfringens en progression arithmétique, on élève l'observateur dans les couches de densité constante, et qu'on le place à une hauteur *H* au-dessus de la limite de ces couches représentées par l'horizontale *AX*. Examinons maintenant les modifications que cette circonstance introduit dans la figure des courbes limites, formées par les intersections successives de toutes les trajectoires.

Ces modifications sont faciles à prévoir, quant à leur marche générale, d'après celles que subit la courbe des *minima*; car en supposant la forme serpentante que nous avons vu lui appartenir, quand la hauteur *H* est moindre que $\frac{1}{4}$ de *MA*, on verra facilement à la seule inspection de la *fig.* 2 que les points les plus bas de la première branche *ZM* donneront des trajectoires qui se couperont dans les couches variables, et dont la limite pourra être représentée par *ZF*; mais la branche *MM'*, et même les points les plus hauts de la branche *ZM* donneront des trajectoires qui se couperont au-dessus de *AX*, et qui formeront une branche *FR* *fig.* 13 analogue à la branche *FR* de la *fig.* 12; les intersections s'élèveront ainsi jusqu'à une certaine limite, après quoi elles re-

descendront suivant une autre branche RR' analogue à la branche RO; mais ici elle coupera l'axe des X dans un point F' situé en avant de l'observateur, et se prolongera au-dessous jusqu'à une certaine limite R' qui sera déja donnée par des trajectoires appartenantes à l'arc $M'H$ de la *fig.* 2. Les trajectoires suivantes continuant toujours d'avoir leurs *minima* sur cette même branche, leurs intersections s'éloigneront de plus en plus de l'observateur jusqu'à l'infini, ce qui donnera pour dernière limite de la caustique une branche indéfinie $R'X'$ convexe vers l'axe des X, et qui appartiendra aux plus petites inclinaisons.

Pour confirmer ces considérations, nous allons d'abord démontrer un résultat qui y jetera beaucoup de lumière, et qui a l'avantage d'être général quelque soit la loi de variation des forces réfringentes; c'est que pour les trajectoires qui se coupent dans les couches de réfraction constante, la courbe limite est absolument la même, et placée de la même manière que pour un observateur qui seroit placé à l'origine des couches variables, à cela près qu'elle est plus enfoncée dans ces couches, de la quantité H, c'est-à-dire autant que l'observateur est élevé.

En effet, l'élévation de l'observateur ne fait que transporter chaque trajectoire dans le sens horizontal de la quantité $\frac{H}{tang.\ I}$; par conséquent si l'on nomme A l'amplitude propre à la trajectoire dont l'inclinaison est I, cette trajectoire, en sortant des couches variables par sa seconde branche avec l'inclinaison I, coupera l'axe

des x dans un point dont l'abscisse sera $A + \frac{H}{tang.\ I}$, A étant une fonction de I dépendante de la loi de la réfraction ; et puisque à partir de ce point la trajectoire devient rectiligne, son équation sera

$$z = tang.\ I. \left(A + \frac{H}{tang.\ I} - x\right)$$

ou ce qui revient au même

$$z - H = tang.\ I.\ (A - x) \ldots\ldots (1)$$

La condition des intersections de ces droites sera

$$o = tang.\ I.\ \frac{dA}{dI} + \frac{(A - x)}{cos^2.\ I} \ldots\ldots (2)$$

et l'équation de la courbe limite sera donnée par l'élimination de I entre ces deux équations : or, le produit de cette élimination sera encore le même si l'on fait d'abord H nul, ce qui transporte l'observateur à la limite des réfractions variables, pourvu que l'on change ensuite Z en $Z - H$, c'est-à-dire, pourvu que l'on enfonce la courbe limite dans les couches variables, d'une quantité égale à l'élévation de l'observateur, ce qui est la propriété que nous avons annoncée.

Ainsi, dans le cas de la progression arithmétique, les branches FR, RF' de la *fig.* 13 ne seront autre chose que les branches FR et RO de la *fig.* 12 enfoncées de la quantité H, d'où l'on voit d'abord que les intersections ne pourroient se faire au-dessus des couches variables pour des trajectoires dont l'inclinaison surpas-

seroit ou même égaleroit 45 degrés, car cette inclinaison formoit dans la *fig.* 12 le commencement *F* de la branche *FR*. On voit aussi que les trajectoires menées sous les plus petites inclinaisons, et qui, dans la *fig.* 12, se coupoient hors du milieu variable sur la branche *RO*, se couperont maintenant dans ce milieu. A mesure que l'observateur s'élevera, les points *F*, *F'* se rapprocheront et ils coincideront ensemble, lorsque la hauteur de l'observateur égalera la hauteur primitive du point *R* qui, dans le cas de la *fig.* 12, étoit $-\frac{1}{2mA}$. Alors les intersections consécutives se feront toutes dans les couches variables au-dessous de *AX*. Généralement les intersections commenceront à se faire dans l'intérieur des couches variables lorsque l'on aura

$$H = \frac{4\sin^2 . I}{mA} - \frac{8\sin^4 . I}{mA}$$

car, d'après ce que l'on a vu dans la page 87, le second membre de cette équation exprime la hauteur de chaque point de la caustique au-dessus des couches variables, lorsque l'observateur est placé à la limite même de ces couches. Les intersections devront donc se faire dans le milieu variable pour toutes les valeurs de *I* comprises entre les racines de cette équation, c'est-à-dire entre

$$\sin^2 . I = \frac{1+\sqrt{1-2mA.H}}{4} \text{ et } \sin^2 . I = \frac{1-\sqrt{1-2mA.H}}{4}$$

En faisant $I = 30°$, on aura la hauteur *H* qui est telle que le point de rebroussement de la branche supérieure

tombe sur l'axe des X, et par conséquent pour cette hauteur de l'observateur, et pour toutes celles qui la surpasseront, les intersections des trajectoires se feront toutes dans le milieu inférieur. Or $I = 30°$ donne $sin. I = \frac{1}{2}$. En substituant cette valeur dans la formule précédente, on en tire $H = \frac{1}{2\,mA}$, comme nous venons de le trouver par la considération particulière de ce point.

On a vu dans la page 61 que la courbe des *minima* cesse d'avoir des points de rebroussement lorsque H est égal à $\frac{1}{4\,mA}$, et que pour des valeurs de H plus grandes, sa dernière branche est toute convexe vers l'axe des x. Il arrive donc alors que les intersections successives se font toutes au-dessous de l'observateur; car c'est seulement le retour de la courbe des *minima* vers l'axe des z qui peut donner des trajectoires consécutives qui se coupent au-dessus de lui. Aussi quand $H = \frac{1}{4\,mA}$, le point de rebroussement R de la branche FR se trouve au niveau de l'observateur, car son élévation totale étoit $\frac{1}{2\,mA}$ quand H étoit nul, et il a dû descendre autant que l'observateur a monté. En général sa hauteur sera $\frac{1}{2\,mA} - H$.

On a vu précédemment que ce point appartient à une valeur de I égale à 30 degrés. Ainsi la branche RF sera toujours invisible dans l'air atmosphérique et dans la plupart des fluides : elle y sera remplacée par le prolongement de la seconde branche de la trajectoire limite

qui sera tangente au sol. Il seroit donc inutile de chercher à la déterminer plus exactement. Mais il n'en est pas ainsi de la branche RR' qui peut encore avoir lieu pour de petites inclinaisons, ni à plus forte raison de la branche $R'X'$ qui a lieu pour les dernières valeurs de I.

Nous allons donc chercher à déterminer ces dernières branches; mais pour ne pas nous jeter dans des considérations inutiles, nous nous bornerons au cas où la limite de la réflexion possible est extrêmement petite, soit par le peu de force réfringente du milieu, soit par le peu de différence de densité des couches extrêmes.

D'après ce que nous avons trouvé précédemment dans le cas de la progression arithmétique, l'équation des secondes branches des trajectoires dans le cas qui nous occupe sera

$$x = \frac{H}{tang.\, I} + \frac{2\, cos.\, I}{mA} . (sin.\, I + \sqrt{sin^2.\, I - mAz})$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(1) \ldots\ x.\, tang.\, I = H + \frac{2\, sin.\, I}{mA} . (sin.\, I + \sqrt{sin^2.\, I - mAz}).$$

la condition des intersections de ces branches donnera

$$(2) \ldots\ \frac{x}{cos^2.\, I} = \frac{2\, cos.\, I}{mA} . (sin.\, I + \sqrt{sin^2.\, I - mAz}) + \frac{2\, sin.\, I}{mA} . \left(cos.\, I + \frac{sin.\, I.\, cos.\, I}{\sqrt{sin^2.\, I - mAz}}\right)$$

la courbe cherchée résultera de l'élimination de I entre

ces deux équations. Cette élimination considérée en général offre une grande complication, mais elle se simplifie quand on se borne à considérer des inclinaisons très-petites dans un milieu dont le pouvoir réfringent est très-foible, comme cela a lieu dans l'air atmosphérique.

En effet, soit Z' la profondeur qu'il faudroit donner aux couches réfringentes pour atteindre la limite de la réflexion possible, soit que cette limite s'étende jusqu'à celle de la réflexion intérieure, soit qu'elle se trouve réduite au-dessous de ce terme par l'interposition du sol. Nommons I' l'angle sous lequel se fait cette réflexion, on aura

$$\sin^2. I' = mAZ'$$

Maintenant toutes les autres valeurs de I seront nécessairement moindres que I' : soit donc

$$\sin. I = K. \sin. I'$$

K sera nécessairement une fraction. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, en faisant pour plus de simplicité $\sin. I' = \omega$, et prenant Z' pour unité; ce qui donne $mA = \omega^2$ alors x et z deviennent uniquement des fonctions de H, de K et de ω, que l'on peut développer suivant les puissances de cette dernière quantité. En se bornant ainsi aux termes de ce développement qui sont les plus considérables, c'est-à-dire à ceux qui ont les plus petites puissances de ω pour facteurs, on trouve

$$z = K^2 - \frac{4K^6}{(H - 2K^2)^2}; \quad x = \frac{H^2}{K.(H - 2K^2).\omega}$$

Ce développement cesseroit d'être possible si l'on avoit $H = 2K^2$, mais d'après ce que l'on a vu précédemment dans la page 98, cela ne sauroit arriver; car lorsque les intersections commencent à se faire au-dessous de la ligne de densité constante, on a $H = 4K^2 - 8K^4\omega^2$; ainsi pour des valeurs de I moindres que celle limite, et à cette limite même la quantité $H - 2K^2$ ne sera point nulle, et par conséquent le développement pourra s'effectuer.

D'après ces expressions de x et de z, il est facile de voir que la caustique, après avoir formé la branche $F'R$ dans la couche de densité constante, entre dans les couches variables au point F' pour lequel on a

$$H = 4K^2; \quad x = \frac{4\sqrt{H}}{\omega}; \quad K = \frac{\sqrt{H}}{2}$$

qu'ensuite elle se continue suivant la branche $F'R'$ concave vers l'axe des x, et terminée au point R' dont les coordonnées sont

$$z = \frac{H}{8}; \quad x = \tfrac{3}{2}.\ \frac{\sqrt{6H}}{\omega}; \quad K = \sqrt{\frac{H}{6}}$$

L'abscisse du point R' est, comme on voit, plus petite que l'abscisse du point F'; mais en R il se fait un rebroussement: le signe de la courbure change; la courbe devient convexe vers l'axe des x et s'éloigne indéfiniment de l'observateur en formant la branche $R'X'$; en même temps elle se rapproche de l'axe des x qui lui sert d'asymptote horizontale. Toutes ces inflexions de la caustique sont analogues avec celles qu'elle faisoit dans le cas d'un

observateur placé sur la limite des couches de densité variables : seulement alors, le point de rebroussement R étoit situé à l'origine même des trajectoires, et la dernière branche RX' de la caustique au lieu d'être courbe étoit une ligne droite horizontale ; c'étoit l'axe même des x.

Comme la plus grande valeur possible de K est d'être égal à l'unité, on voit que la branche RF' disparoîtra si $H = 4Z'$ ou surpasse $4\,Z'$, Z' étant la profondeur des couches où la réflexion est possible, profondeur que nous avions prise pour unité. De même la branche $F'R'$ disparoîtra si $H = 8\,Z'$ ou surpasse $8Z'$, car alors le point de rebroussement R' descendra à la hauteur de la couche limite, ou tombera au-dessous, et la caustique se réduira à la branche unique et indéfinie $R'X'$ qui subsistera quelle que soit la hauteur de l'observateur pour les plus petites inclinaisons.

En rappelant ici ce que nous avons dit précédemment pour les cas où l'observateur étoit situé à la limite même des couches variables, et nous bornant aux cas qui peuvent exister dans la nature, il est facile de trouver le nombre et la position des images que chaque point de l'espace pourra envoyer à l'observateur.

Si par le point O supposé le lieu de l'observateur, on mène la trajectoire limite OMF qui est tangente au sol, et que l'on prolonge indéfiniment sa seconde branche qui sera rectiligne et que nous supposerons quelque part tangente à la branche FR, il est facile de voir :

1°. Que tous les points compris dans le triangle mixti-

ligne GRR' enverront à l'observateur trois images, deux droites et une renversée, celle-ci entre les deux autres. La quatrième image, analogue à $A'''B'''$ de la *fig.* 12, aura disparu, comme tombant au-dessous de la limite de la réflexion.

2°. Que tous les points situés hors de ce triangle, mais cependant compris entre les prolongemens indéfinis des branches de la caustique, n'enverront à l'observateur que deux images, l'une droite, l'autre renversée, celle-ci inférieure à l'autre. La troisième image, droite et inférieure aux deux autres, n'aura plus lieu.

3°. Tous les points contenus dans l'espace $OMGR'RT'$ ne pourront envoyer à l'observateur qu'une seule image droite.

4°. Enfin tous les points contenus dans l'espace indéfini $MGX'F$ seront entièrement invisibles pour l'observateur. Mais s'il s'élève, la trajectoire limite s'éloignant, le point M s'éloignera aussi. Par conséquent quelques-uns des points renfermés dans l'espace invisible en sortiront et deviendront visibles. Le contraire arrivera si l'observateur s'abaisse. Le point M se rapprochant, il perdra de vue des points qui lui étoient précédemment cachés.

Dans ce qui précède nous avons supposé que l'observateur se trouvoit au-dessus du milieu variable, et dans la couche de plus grande densité. On pourroit également le supposer placé dans les couches variables elles-mêmes, et un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire donneroit la forme de la caustique résultante de cette position. Soit donc *fig.* 14, AX la ligne horizontale

qui termine inférieurement la couche de densité constante ; soit O l'observateur abaissé au-dessous de cette ligne d'une quantité $AO = H$: par le point O menons l'horizontale OX' parallèle aux couches, il est évident d'abord que les trajectoires telles que OV', OV'', qui auront leur *minimum* en arrière de l'observateur, traverseront les couches de densité variables sans se couper, et pénètreront dans le milieu supérieur suivant des directions divergentes, de sorte qu'elles ne s'y couperont pas non plus. Mais les trajectoires telles que OMV qui auront leur *minimum* en avant de l'observateur et au-dessous de la ligne OX' se couperont nécessairement dans un milieu ou dans l'autre. Celles qui se couperont dans le milieu inférieur formeront la portion de caustique $ZX'X$ qui, d'après ce que l'on a vu précédemment, sera une parabole ayant pour l'axe l'axe des Z. Les trajectoires qui se couperont au-dessus de AX par leurs prolongemens formeront une autre portion de caustique qui servira de prolongement à la parabole OMV, et qui aura pour asymptote la ligne droite

$$x = \frac{\sin.\ 2\ I'}{mA} + \frac{z}{\text{tang.}\ I'}$$

suivant laquelle dégénère la trajectoire OL menée du point O dans une direction horizontale. I' est ici une constante donnée par l'équation

$$\sin^2.\ I' = mAH$$

c'est l'angle sous lequel la dernière trajectoire OL pénètre dans le milieu supérieur. Ainsi, selon que l'obser-

vateur est au-dessus ou au-dessous de la limite des densités variables, la dernière branche de la caustique s'éloigne à l'infini au-dessous de cette limite ou au-dessus.

Considérons maintenant le cas où les pouvoirs réfringens du milieu décroissent suivant une exponentielle. Nous avons déjà remarqué que ce mode de décroissement est très-propre à représenter les expériences thermométriques. Les résultats qu'il donne sont faciles à prévoir d'après ce que nous avons dit, page 50, relativement à la courbe des *minima*. La partie la plus basse de cette courbe, celle qui répond aux plus grandes valeurs de I va en s'éloignant de l'observateur à mesure qu'elle s'élève, c'est-à-dire à mesure que I diminue. Les trajectoires qui auront leur *minimum* sur cette partie de la courbe devront donc se couper au-dessous de la ligne horizontale qui passe par l'observateur, et d'autant plus près de leur *minimum* que la ligne des *minima* approchera plus d'être horizontale. Elles formeront donc ainsi une portion de caustique située pareillement au-dessous de l'observateur, et qui ira en s'élevant à mesure que I deviendra moindre. Mais on a vu qu'au-dessous d'une certaine valeur de I, la courbe des *minima* revient vers l'observateur avec lequel elle coincide lorsque $I = 0$. Ainsi, à ce point de rebroussement, les trajectoires commenceront à se couper au niveau de l'observateur et sur l'axe des x ; après quoi I diminuant toujours, elles viendront se couper au-dessus de cet axe où elles formeront le reste de la caustique qui s'éloignera de l'observateur à l'infini;

mais cette dernière branche sera plus ou moins applatie, suivant la rapidité du décroissement des pouvoirs réfringens, et selon que l'observateur sera enfoncé à une profondeur plus ou moins grande, dans les couches où la force réfringente varie d'une manière sensible.

Occupons-nous en particulier de cette dernière branche, la seule qui nous intéresse, puisque c'est elle qui subsiste sous les plus petites inclinaisons. Pour le faire avec facilité, on remarquera qu'au-dessus d'une certaine hauteur la variation des pouvoirs réfringens devient tellement petite qu'on peut la supposer sensiblement nulle, et regarder le milieu comme homogène. Cette propriété tient évidemment à la nature du décroissement par exponentielle. Or, en reprenant l'équation d'une seconde branche qui se déduit de la page 46, et faisant $mA = n$, nous aurons à une hauteur z *au-dessus* de l'observateur

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{\sin^2. I + n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z + \frac{4}{a} \cdot \log. \left(\frac{\sin. I + \sqrt{\sin^2. I + n}}{\sqrt{n}} \right) \\ - \frac{2}{a} \cdot \log. \left(1 + \frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I + n}} \right) \\ + \frac{2}{a} \cdot \log. \left(1 + \sqrt{1 - \frac{ne^{-az}}{\sin^2. I + n}} \right) \end{array} \right\}$$

Puisque, à la hauteur que nous considérons, l'état des couches devient sensiblement constant, il faut que z soit assez considérable pour que la quantité e^{-az} soit insensible, alors le terme de l'expression précédente qui contient z sous le signe logarithmique, devient lui-même constant, et se réduit à *log.* 2, le logarithme étant hy-

perbolique. De plus, nous supposerons que l'inclinaison I est très-petite par elle-même, et relativement à n, supposition d'autant plus légitime, que I peut décroître jusqu'à devenir nul, tandis que n a une valeur fixe qui peut être plus ou moins grande, suivant que l'observateur est plus ou moins enfoncé dans les couches variables. Regardons donc $\frac{\sin. I}{\sqrt{n}}$ comme une quantité très-petite du premier ordre, nous aurons en développant la valeur de n et nous bornant aux termes les plus sensibles,

$$x = \frac{\cos. I}{\sqrt{n}} . \left(z + \frac{2}{a} . \log. 2\right) + \frac{2 \sin. I}{an}$$

Cette dernière portion des trajectoires se réduit donc sensiblement à une ligne droite, ce qui devoit être d'après les circonstances où nous les supposons. La condition des interjectoires de ces droites sera

$$o = - \sin. I. \left(z + \frac{2}{a} . \log. 2\right) + \frac{2 \cos. I}{a. \sqrt{n}}$$

ce qui donne pour x et z, ces valeurs

$$z + \frac{2}{a} . \log. 2 = \frac{2}{a \sqrt{n}. \tang. I} ; \quad x = \frac{2}{an. \sin. I}$$

éliminant I, on a pour l'équation de cette dernière branche de la caustique.

$$z + \frac{2}{a} . \log. 2 = x. \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{4}{a^2 n^2 x^2}}$$

qui, étant différenciée, donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{an^2x^2}}}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{4}{a.\ n^{\frac{3}{2}}.\ x^3.\ \left(1 - \frac{4}{a^2n^2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La caustique se termine donc par une branche concave vers l'axe des x, et dont l'inclinaison va toujours en diminuant, à mesure qu'elle s'élève et s'éloigne de l'observateur. Cette dernière branche à une asymptote rectiligne dont l'équation est

$$z + \frac{2}{a}.\ log.\ 2 = x.\ \sqrt{n}$$

ce qui donne à cette limite

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{n}$$

Il est facile de vérifier ce résultat; car le point de tangence extrême doit appartenir à la trajectoire menée sous l'inclinaison $I = 0$. Or, l'équation différentielle des trajectoires qui est en général

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{sin^2.\ I - m\varphi}}{cos.\ I}$$

devient, dans le cas actuel,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{sin^2.\ I - n.\ (e^{-az} - 1)}}{cos.\ I}$$

Lorsqu'on suppose e^{-az} insensible et I nulle, elle se réduit à

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{n}$$

Comme nous venons de le trouver.

On voit en général qu'il en sera de même dans toutes les lois de décroissement qui deviennent insensibles à une certaine hauteur au-dessus de l'observateur. A cette limite φ étant négative et sensiblement constante, les trajectoires deviennent rectilignes, et la caustique a pour asymptote une ligne droite dont l'inclinaison est $\sqrt{-m\varphi_{(h)}}$, $\varphi_{(h)}$ désignant la valeur de φ à la hauteur où la variation des pouvoirs réfringens est insensible.

L'inclinaison de cette dernière branche de la caustique diminue en même temps que $\varphi_{(h)}$, c'est-à-dire à mesure que l'observateur se trouve placé plus haut dans le milieu réfringent, et par conséquent dans des couches où la variation de la force réfringente est moindre. Enfin, s'il est placé dans les couches où cette force devient sensiblement constante $\varphi_{(h)}$, deviendra nulle ou insensible, et l'on a pour l'inclinaison de la tangente extrême $\frac{dz}{dx} = 0$, c'est-à-dire, que la dernière extrémité de la caustique sera horizontale, circonstance qu'il étoit facile de prévoir. C'est le cas de la réflexion dans les milieux diaphanes homogènes; ce cas est la limite de toutes les lois précédentes de décroissement.

Les phénomènes ont lieu de cette manière en supposant que l'accroissement de la force réfringente, à me-

sure qu'on s'élève, est continué indéfiniment suivant la même fonction, par exemple, suivant la même exponentielle, en sorte que l'asymptote de cette exponentielle réponde au cas où la variation de la force réfringente devient insensible. Mais on pourroit imaginer des lois de densité telles que l'exponentielle fût interrompue plus bas que son asymptote, et que de là elle se prolonge suivant sa dernière tangente, ce qui rendroit également la densité constante à une certaine hauteur, quoique avec des circonstances bien différentes de celles que nous avons considérées. Ce cas est très-probablement celui qu'a observé M. Wollaston, lorsqu'en regardant des objets par dessous la surface horizontale d'une plaque de fer rouge, et par des rayons presque parallèles à cette surface, il apercevoit trois images, deux droites et une renversée. Dans ce cas, la couche d'air inférieure, en contact avec la plaque, ne pouvoit pas échapper en vertu de sa légèreté spécifique, aussi librement que si elle eût reposé dessus. Au contraire, cette légèreté devenoit un obstacle à sa dissipation. Elle ne pouvoit s'enfuir que latéralement, et cette circonstance devoit nécessairement rendre le décroissement des densités plus rapide. Il paroît donc naturel de penser que, dans ce cas, l'exponentielle qui représente ce décroissement étoit interrompue par l'air extérieur avant d'atteindre son asymptote, au lieu qu'elle y seroit parvenue si l'air chassé de la surface du fer rouge eût traversé les couches d'air superposées, et, en se mêlant avec elles, eût contribué à rendre le décroissement continu, suivant une même loi. Ce cas

est analogue à celui que nous a présenté la progression arithmétique, lorsque nous l'avons interrompue à une certaine hauteur pour lui faire succéder une densité constante, et nous devons le traiter de la même manière.

Pour cela, plaçons d'abord l'observateur à la limite même de la densité variable et de la densité constante. Les trajectoires les plus basses se couperont d'abord, dans les couches variables, au-dessous du niveau de l'observateur, mais I diminuant toujours, les intersections commenceront à se faire au-dessus de ce niveau, c'est-à-dire dans les couches de densité, à cause du point de rebroussement de la courbe des *minima*. Cela pourra même arriver pour des valeurs de l'angle I qui ne seroient pas très-petites, puisque cela dépendra de la rapidité du décroissement à la hauteur où l'observateur se trouve, sans qu'il soit nécessaire, comme précédemment, de supposer n très-petit, puisque l'exponentielle est supposée interrompue bien avant son asymptote. Considérons donc cette portion de la caustique qui se trouve au-dessus de l'observateur dans les couches de densité constante, et considérons-la principalement pour les petites inclinaisons.

Dans la position que nous donnons ici à l'observateur, l'abscisse d'un point quelconque des trajectoires devenues rectilignes se composera d'abord de l'amplitude de la trajectoire curviligne, qui est $\frac{4 \cos. I}{a. \sqrt{\sin^2. I + n}}$. $\log. \left(\frac{\sin. I + \sqrt{\sin^2. I + n}}{\sqrt{n}}\right)$, et ensuite de la portion d'abscisse due à la hauteur z dans les couches de den-

sité constante, laquelle sera $\frac{z}{tang. I}$, en prenant les z positifs au-dessus de la limite commune des deux densités. De sorte que l'on aura généralement

$$x = \frac{4 \cos. I}{a. \sqrt{\sin^2. I + n}} . \log. \left(\frac{\sin. I + \sqrt{\sin^2. I + n}}{\sqrt{n}} \right) + \frac{z}{tang. I}$$

Si nous voulons nous borner aux très-petites inclinaisons, l'angle I peut être considérée comme extrêmement petit par rapport à n, et en faisant $\sin. I = K. \sqrt{n}$ il ne faudra avoir égard qu'aux premières puissances de K. En développant, suivant ces suppositions, le terme indépendant de z, on trouve qu'il se réduit à $\frac{2 \sin. 2 I}{an}$; de sorte que l'expression approchée de x devient

$$x = \frac{2 \sin. 2 I}{an} + \frac{z}{tang. I}$$

Cette valeur de x est précisément la même que si la densité au-dessous de l'observateur décroissoit suivant une progression arithmétique dont la raison seroit na; et en effet, les trajectoires qui répondent à de petites inclinaisons, descendant très-peu avant dans le milieu inférieur, la partie de l'exponentielle qui les comprend, peut être assimilée à une progression arithmétique dans les mêmes circonstances; d'où il suit que la caustique se termineroit comme dans le cas de la page 88, par une courbe convexe vers l'axe des x; courbe qui, dans les

très-petites inclinaisons, se confond avec une parabole dont l'équation sera

$$z = \frac{na. x^2}{16}$$

Cette dernière branche sera donc d'autant plus applatie que na sera moindre, c'est-à-dire que l'observateur sera plus rapproché de l'asymptote de l'exponentielle. Si na devenait nulle ou insensible, on auroit constamment $z = 0$, et cette dernière branche se réduiroit à une ligne droite horizontale menée par l'observateur, ce qui s'accorde avec ce que nous venons de démontrer précédemment. Les mêmes résultats auront lieu dans toutes les lois de décroissement dont la limite est une progression arithmétique.

Si, dans les circonstances que nous venons d'admettre, l'observateur ne se trouvoit pas placé dans les couches variables, mais dans celles de densité constante, il est aisé, par ce qui précède, de prévoir ce qui devroit arriver. Car d'abord, la portion de la caustique située au-dessus de la limite des deux densités, ne seroit autre chose que la précédente abaissée de la quantité H; H étant la hauteur de l'observateur au-dessus de cette limite; et quant à la partie de la caustique située dans le milieu variable, comme elle n'embrasseroit que de très-petits angles, elle seroit précisément la même que pour une progression arithmétique dont la raison seroit na; car pour des trajectoires menées sous de très-petits angles et très-peu enfoncées dans le milieu variable, le décroissement par

exponentielle se confond avec la progression arithmétique. Sa forme générale sera donc la même que celle de la *fig.* 14 qui convient à une pareille progression, et selon les hauteurs différentes de l'observateur elle présentera les mêmes accidens. Des résultats analogues auront lieu pour toutes les lois de décroissement qui auront pour limite une progression arithmétique. On pourra donc, en se plaçant très-près de la limite des densités différentes, y observer trois images, puisque la progression arithmétique les comporte; ce qui explique complètement les apparences observées par M. Wollaston au-dessous d'une plaque de fer rouge.

Enfin, pour rassembler ce que l'on peut dire de plus général dans le cas d'un décroissement de force réfringente toujours continué dans le même sens, je vais supposer que la loi de ce décroissement est absolument quelconque; mais qu'elle s'arrête à une certaine hauteur où la densité devient constante, et plaçant l'observateur au-dessus de cette limite, je me propose d'examiner quelle doit être la forme et la position de la dernière branche de la caustique pour de très-petites inclinaisons.

Partons toujours du cas où l'observateur seroit placé à la limite même des deux densités. Soit alors $A_{(i)}$ l'abscisse du *minimum* de la trajectoire menée sous l'angle I ou sa demi-amplitude, l'équation d'une seconde branche dans sa partie curviligne sera de la forme

$$x = 2\, A_{(i)} - \Psi.\, (I.\ z)$$

$\Psi.\, (I.\, z)$ étant une fonction de I et de z qui devient

nulle quand $z = 0$, et qui devient égale à $A_{(i)}$, au *minimum* de la trajectoire, lorsque z est déterminé par l'équation

$$sin^2. \, I = m. \, \varphi$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, si la fonction $A_{(i)}$ va croissant à mesure que I diminue, deux trajectoires consécutives se coupent avant d'avoir atteint le niveau de l'observateur; car alors, l'amplitude de la plus basse étant moindre que l'amplitude de la plus haute, il faut nécessairement qu'il y ait un point d'intersection entre les abscisses $A_{(i)}$ et $2 \, A_{(i)}$. Si l'accroissement de $A_{(i)}$ se continue ainsi sous les plus petites inclinaisons, il en résultera nécessairement que la dernière branche de la caustique, celle qui convient aux inclinaisons très-petites, restera toute entière comprise dans les couches de densité variables; et selon que $A_{(i)}$ variera successivement avec plus ou moins de rapidité, elle pourra avoir des points de rebroussement plus ou moins nombreux qui contribueront à multiplier le nombre des images.

Maintenant si l'on élève l'observateur de la quantité H dans les couches de densité constantes, en conservant toujours l'origine des z sur la limite des deux densités, l'équation d'une seconde branche deviendra

$$x = \frac{H}{tang. \, I} + 2 \, A_{(i)} - \Psi. \, (I. \, z)$$

Dans le point où cette seconde branche coupe l'axe des x,

Ψ sera nulle. Nommant $X_{(i)}$ l'abscisse correspondante, on aura

$$X_{(i)} = \frac{H}{tang.\ I} + 2\ A_{(i)}$$

Or, puisque $A_{(i)}$ est supposé croître continuellement à mesure que I diminue, et que la quantité $\frac{H}{tang.\ I}$ croît aussi dans les mêmes circonstances, il est aisé de voir que deux trajectoires consécutives et infiniment voisines se couperont nécessairement entre les abscisses $\frac{H}{tang.\ I} + A_{(i)}$ et $\frac{H}{tang.\ I} + 2\ A_{(i)}$; de sorte que la dernière branche de la caustique restera toujours au-dessous de la limite des densités constantes, comme dans le cas précédent. Mais de plus, quelques-unes des sinuosités produites par les points de rebroussement qui existoient alors, pourront diminuer, à cause de la hauteur de l'observateur; parce que, à mesure que I diminue, chaque trajectoire se trouve transportée, dans le sens horizontal de la quantité $\frac{H.\ dI}{sin^2.\ I}$, au-delà de celle qui lui est immédiatement inférieure, et il ne peut y avoir de rebroussement que quand les variations de $2\ A_{(i)} - \Psi$ surpassent cette quantité. Comme elle devient infinie quand I est nul, il est clair que l'élévation de l'observateur dans les couches de densité constante fait d'abord disparoître les derniers points de rebroussement correspondans aux plus petites inclinaisons, puis successivement ceux qui répondent à des inclinaisons plus grandes; enfin, en élevant suffisamment l'observateur, on les fera disparoître tous, et alors

la dernière portion de la caustique sera réduite à une branche unique, convexe vers l'axe des x, et ayant pour asymptote cet axe qui est aussi la limite des deux densités. De sorte qu'on ne pourra voir par le moyen de cette branche que deux images de l'objet, dont la supérieure sera droite et l'inférieure renversée; mais en abaissant l'observateur les images multiples reparoîtront.

Venons maintenant au cas dans lequel $A_{(i)}$ diminue en même temps que I. C'est celui de la progression arithmétique, quand les inclinaisons sont infiniment petites, comme on l'a vu précédemment. Si l'observateur est placé à la limite des deux densités, alors les trajectoires menées sous les plus petites inclinaisons se coupent dans les couches de densité constante; mais si l'on élève l'observateur au-dessus de la limite, de la quantité H, alors pour une diminution d'inclinaison égale à dI, la valeur de $X_{(i)}$ s'accroît de la quantité $\frac{H}{\sin^2. I}. dI - 2\, dA_{(i)}$. Si le second de ces deux termes l'emporte sur le premier, l'intersection se fera au-dessus de la limite, comme précédemment; mais si le premier terme est le plus considérable, les deux trajectoires se couperont au-dessous de cette ligne, dans les couches de densité variable. Or ce dernier cas arrivera toujours pour les dernières valeurs de I, puisqu'alors la quantité $\frac{H}{\sin^2. I}$ devient infinie, au lieu que dA_i ne peut jamais le devenir par la nature du problème. Ainsi, quelle que soit la loi de décroissement des forces réfringentes, pour peu que l'observateur soit situé au-dessus des couches varia-

bles, la dernière portion de la caustique se terminera toujours par une branche concave vers le sol sans aucun point de rebroussement; mais elle pourra en avoir d'autres, correspondans à des inclinaisons plus grandes, qui disparoîtront à leur tour si l'observateur est plus élevé. On voit par là, sans aucune hypothèse, pourquoi le cas de deux images est celui qui s'observe le plus fréquemment.

Les phénomènes que nous venons de considérer peuvent être variés à l'infini, selon les suppositions que l'on voudra faire pour le décroissement des pouvoirs réfringens des couches; mais parmi toutes les dispositions imaginables il en est cependant une qui mérite une attention particulière, parce que la nature en présente quelquefois l'exemple dans l'atmosphère, et qu'alors il en résulte des phénomènes extrêmement curieux.

C'est le cas dans lequel le pouvoir réfringent des couches, après avoir d'abord été croissant de bas en haut jusqu'à une certaine limite, va ensuite en décroissant. La loi de ces variations doit certainement être différente, suivant les diverses circonstances, et il en doit résulter dans la forme des caustiques de très-grandes différences; mais leur forme générale doit toujours conserver quelque analogie dépendante de l'état alternatif que nous venons de supposer. Ainsi nous pourrons encore nous en faire une idée en examinant le cas particulier de deux progressions arithmétiques inégales et contraires, et de là nous tâcherons d'inférer ce qui doit arriver en général dans les autres lois les plus ordinaires, ainsi que nous en avons usé précédemment.

Pour plus de simplicité, plaçons d'abord l'observateur dans la couche où le pouvoir réfringent est le plus considérable, et qui est intermédiaire entre les deux décroissemens. Soit donc OX (*fig.* 15) la ligne qui les sépare. Menons par le point O, dans le milieu inférieur, des trajectoires correspondantes à toutes les inclinaisons, depuis $I = 0$ jusqu'à $I = 90°$, et voyons les systèmes d'intersection qui en résultent.

D'abord toutes les trajectoires comprises entre $I = 90$ et $I = 45$ degrés se couperont dans le milieu inférieur et formeront par les intersections de leurs secondes branches la caustique $Z'F$, qui sera une portion de parabole. Cela résulte de ce que l'on a vu précédemment.

Pour des valeurs de I moindres que 45 degrés, les intersections ne se feront plus dans le milieu inférieur, au-dessous de l'axe OX, mais au-dessus de cette ligne et dans le milieu supérieur; ce qui donnera la portion de caustique FV analogue à la branche FR de la *fig.* 12, laquelle ne diffère du cas présent qu'en ce que la densité du milieu supérieur étoit supposée constante. Cette branche FV s'arrêtera bientôt, comme le faisoit la branche FR, et I diminuant toujours, les intersections commenceront à se rapprocher de l'observateur; ce qui donnera la dernière portion de caustique OV analogue à la branche OR de la *fig.* 12.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les intersections $TT'T''$ des premières branches que les trajectoires OMT, OMT' envoient dans l'espace supérieur après s'y être repliées; mais les secondes branches de ces

mêmes trajectoires s'y coupent également, du moins sous certaines conditions d'inclinaison. En effet, considérons la trajectoire $OM'''F$, menée sous l'inclinaison de 45 degrés. Pour celle-là, le point de tangence sur la caustique est en F sur l'axe OX; de sorte qu'elle se coupe sur cet axe même avec la trajectoire infiniment voisine qui la suit. Or il est clair que ces deux trajectoires entrant ainsi dans le milieu supérieur, avec l'inclinaison de 45°, se couperont encore de nouveau sur ce même axe en F'' par les prolongemens de leurs secondes branches; de sorte que le point F'' appartiendra à la caustique que les secondes branches $T\theta$ doivent former. Pour les valeurs de I plus grandes que 45 degrés, les intersections se feront au-dessus de F'', ce qui donnera la portion de caustique $F''Z$ dans l'espace supérieur; et pour les inclinaisons moindres que 45 degrés, les intersections se feront dans le milieu inférieur, au-dessous de F'', ce qui donnera une nouvelle portion de caustique que nous considérerons plus loin.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les trajectoires menées originairement dans le milieu inférieur. Celles que l'on mènera dans le milieu supérieur conduiront à des conséquences analogues et donneront les nouvelles branches OVF', $Z'F''$. Le point F'' résultant de deux amplitudes de 45°, sera commun aux deux caustiques. En nommant A';A les raisons des deux progressions arithmétiques, on aura

$$OF = \frac{2}{mA'}; \quad OF' = \frac{2}{mA}; \quad OF'' = \frac{2}{mA'} + \frac{2}{mA}$$

et l'ensemble de ces courbes ainsi combinées sera tel que le représente la *fig.* 15.

Mais parmi ces diverses branches il n'y aura que OV et OV' qui auront lieu pour de petites inclinaisons, et même, dans la plupart des cas que la nature présente, celles-ci s'étendront au-delà des limites de la réflexion intérieure. Ainsi, après avoir indiqué, comme nous venons de le faire, la forme complète de la caustique, afin que l'on en puisse suivre aisément les diverses parties et que l'on saisisse mieux leur connexion, nous allons nous borner dans le calcul à ce qui peut être utile, c'est-à-dire à la détermination des branches OV, OV'.

Pour cela nommons toujours A la raison de la progression arithmétique dans l'espace supérieur ZOX, et A' la raison de la progression dans l'espace inférieur. Prenons les z positives dans le sens OZ. Cela posé, pour une trajectoire telle que OM (*fig.* 15), l'amplitude OMQ sera égale à $\frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA}$, et l'équation d'une première branche telle que OQT, dans l'espace supérieur, sera

$$x = \frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA'} + \frac{2 \cos. I}{mA}. (\sin. I - \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

Celle d'une seconde branche, comme $OQ\theta$, seroit

$$x = \frac{4 \sin. I. \cos. I}{mA'} + \frac{2 \cos. I}{mA}. (\sin. I + \sqrt{\sin^2. I - mAz})$$

En faisant, pour plus de simplicité, $mA = \alpha$, $mA' = \alpha'$,

ces deux équations, qui ne diffèrent que par le signe du radical, se réuniront dans la suivante :

$$(1)\quad \alpha . x^2 - 2x . \sin . 2I \frac{(2\alpha + \alpha')}{\alpha'} + 4 \sin^2 . 2I \frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha'^2} + 2.(1 + \cos . 2I) z = 0$$

la condition des intersections sera

$$(2)\quad -x . \cos . 2I . \frac{(2\alpha + \alpha')}{\alpha'} + 4 \sin . 2I . \cos . 2I . \frac{(\alpha + \alpha'}{\alpha'^2} - z . \sin . 2I = 0$$

Éliminant z entre ces deux équations, on en tire

$$x^2 - 2x . \frac{(2\alpha + \alpha')}{\alpha . \alpha'} . \frac{(1 + \cos . 2I)}{\sin . 2I} + \frac{4 . (\alpha + \alpha')}{\alpha . \alpha'^2} . (1 + \cos . 2I)^2 = 0$$

De là résultent deux valeurs de x en I. Si on les développe dans la supposition de I fort petite, en se bornant aux termes les plus sensibles, on trouvera

$$x = \frac{2 . (\alpha + \alpha')}{\alpha' . (2\alpha + \alpha')} . (1 + \cos . 2I) . \sin . 2I$$

et

$$x = \frac{2 . (2\alpha + \alpha')}{\alpha . \alpha'} . \frac{(1 + \cos . 2I)}{\sin . 2I} . \left[1 - \frac{\alpha . (\alpha + \alpha')}{(2\alpha + \alpha')^2} . \sin^2 . 2I\right]$$

La première peut être mise sous la forme

$$x = \frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha' . (2\alpha + \alpha')} . (2 \sin . 2I + \sin . 4I)$$

et en la substituant dans l'équation (2) elle donne

$$z = -\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha'^2} . (1 - 2 \cos . 2I . + \cos . 4I)$$

Ces valeurs sont analogues à celles que nous avons trouvées dans la page 89 pour les coordonnées de la caustique OS (*fig.* 12), lorsque la densité de la couche supérieure étoit constante. Ici ce sont les coordonnées de la caustique $OTT'T''$ (*fig.* 15). A mesure que I augmente, les valeurs de z et de x augmentent aussi en restant positives. Par la différentiation de ces valeurs on trouve que la caustique OTT' est convexe vers l'axe des x, et qu'elle se confond avec une parabole pour de petites valeurs de I, telles que celles qui ont lieu dans l'air atmosphérique. L'équation de cette parabole est

$$z = \frac{(2\alpha + \alpha')^2}{16.(\alpha + \alpha')} . x^2$$

Si l'on suppose α nul, c'est-à-dire la densité du milieu supérieur constante, elle se réduit à

$$z = \frac{\alpha' . x^2}{16}$$

Tout cela est analogue à ce que l'on a vu dans l'article cité.

Quant à la seconde valeur de x, quoiqu'elle s'évanouisse aussi quand I est nul, et qu'ainsi elle subsiste encore même dans les très-petites inclinaisons, cependant elle n'a aucune application dans le cas actuel, car elle donne des valeurs de z négatives; ce qui montre qu'elle appartient à la caustique que fourniroient les secondes branches $T\theta$ en se coupant au-dessous de la ligne OX, si après être parties des points $TT'T''$, comme

précédemment, elles trouvoient en rentrant dans l'espace inférieur $Z'OX$ la continuation de la même loi de densité qui a lieu dans l'espace supérieur. Mais ce n'est pas là le cas, comme il est aisé de le sentir; et les branches $T\theta$, à leur entrée dans l'espace inférieur, commenceroient à être soumises aux lois de densité qui y règnent; ce qui les recourbe en sens contraire, comme dans la *fig.* 16. De là résulte un autre système d'intersections qu'il faut considérer en particulier, et qui n'est point représenté par la seconde valeur de x, à laquelle il est par conséquent inutile d'avoir égard.

En appliquant les considérations précédentes aux trajectoires Omt, $Om't'$, $Om''t''$ (*fig.* 15), menées du point O dans l'espace supérieur ZOX, on verra de même que ces trajectoires, en se repliant par leurs secondes branches dans l'espace inférieur $Z'OX$, y formeront une caustique $Ot't''$ analogue à $OT'T''$, et dont les équations seront les mêmes, en changeant α en α' et α' en α. De sorte qu'en prenant les z' positives du côté de OZ', ces équations seront

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha . (2\alpha' + \alpha)} . (2 \sin. 2I. + \sin. 4I)$$

$$z' = -\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha^2} . (1 - 2 \cos. 2I + \cos. 4I)$$

qui, sous les très-petits angles, donneront la parabole

$$z' = \frac{(2\alpha' + \alpha)^2}{16. (\alpha + \alpha')} x^2$$

On aura donc de cette manière, dans les petites in-

clinaisons, deux branches de caustiques analogues et correspondantes, situées, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la ligne OX. La première aura pour limite la trajectoire OHV, la plus basse de celles que l'on puisse mener dans l'espace inférieur $Z'OX$ parmi celles qui y ont leur *minimum*; l'autre caustique OV' sera limitée d'une manière analogue par la trajectoire OSV', la plus haute de celles que l'on puisse mener dans l'espace supérieur ZOX, du moins tant qu'on se bornera à des inclinaisons très-petites, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent.

Maintenant il est facile de voir qu'un objet situé dans l'espace VOV', que les caustiques comprennent, pourra envoyer à l'observateur O trois images, savoir deux droites et une renversée située entre deux autres. Par exemple l'objet AB (*fig.* 18), qui se trouve au-dessous de la ligne OX enverra une image droite $A'B'$ par la caustique supérieure OV, et deux autres images par la cautique OV', l'une droite, l'autre renversée. Si l'objet se trouvoit au-dessus de la ligne OX, dans l'espace VOX, il n'y auroit qu'une seule image donnée par la caustique OV'; ce seroit la supérieure, et les deux autres seroient données par la caustique OV.

Mais ces caustiques ne sont pas les seules qui puissent rendre les objets visibles dans ces circonstances, même en se bornant aux inclinaisons très-petites. Car les trajectoires, après s'être repliées une fois dans l'un des milieux et une fois dans l'autre, comme on le voit dans les *fig.* 16 et 19, doivent, en rentrant dans le premier

milieu, se couper de nouveau et donner de nouvelles caustiques par leurs continuelles intersections. C'est ce qu'il s'agit d'examiner.

Considérons d'abord les caustiques situées dans l'espace supérieur ZOX. Elles seront données par les intersections des trajectoires dans cet espace ; mais les trajectoires qui formeront ces intersections pourront avoir été originairement menées dans l'espace ZOX, comme le montre la *fig.* 19, ou dans l'espace $Z'OX$, comme le montre la *fig.* 16. Discutons successivement ces deux cas, en commençant par le premier.

Si les trajectoires ont été originairement menées dans l'espace supérieur, elles ne pourront y revenir qu'après avoir eu un nombre égal de *maxima* dans cet espace et de *minima* dans l'espace inférieur ; c'est-à-dire que l'équation des branches extrêmes, après ces diverses révolutions, sera

$$x = \frac{4\,n.\,sin.\,I.\,cos.\,I}{\alpha} + \frac{4\,n.\,sin.\,I.\,cos.\,I}{\alpha'} + \frac{2\,cos.\,I}{\alpha}.\,(sin.\,I - \sqrt{sin^2.\,I - \alpha z}$$

les z étant pris positivement au-dessus de la ligne OX. En faisant disparoître le radical cette équation devient

$$x^2 - 2\,x.\,sin.\,2\,I.\,\frac{[2\,n.\,(\alpha + \alpha') + \alpha']}{\alpha.\,\alpha'} + \frac{4\,n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') + \alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}.\,sin^2.\,2\,I + \frac{2.\,(1 + cos.\,2\,I)}{\alpha}\,z = 0$$

Sous cette forme on voit qu'elle est analogue à celle de la page 123, et qu'elle peut être traitée de la même manière. Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\frac{2\,n.\,(\alpha+\alpha')+\alpha'}{\alpha.\,\alpha'}=A;\quad \frac{n.\,(\alpha+\alpha').\,[n.\,(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}=B$$

et que l'on cherche ensuite l'équation de la caustique, comme nous l'avons fait précédemment, on la trouvera donnée par le système des deux équations suivantes :

$$x=\frac{B}{A}.\,(2\,sin.\,2\,I+sin.\,4\,I)$$

et

$$z=-B\alpha.\,(1-2\,cos.\,I.+cos.\,4\,I)$$

Ces caustiques sont donc toutes analogues à la première que nous avons considérée ; elles n'en diffèrent que par le paramètre ; et, dans les inclinaisons très-petites elles se réduisent à des paraboles qui ont pour axe commun l'axe des z et qui touchent l'axe des x à l'origine des coordonnées. En remettant pour A et B leurs valeurs, on a

$$x=\frac{n.\,(\alpha+\alpha').\,[n.\,(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha.\,\alpha'.\,[2\,n.\,(\alpha+\alpha')+\alpha']}.\,(2\,sin.\,2\,I+sin.\,4\,I)$$

et

$$z=-\frac{n.\,(\alpha+\alpha').\,[n.\,(\alpha+\alpha')+\alpha']}{\alpha.\,\alpha'2}.\,(1-2\,cos.\,2\,I+cos.\,4\,I)$$

Telles sont les équations des caustiques formées dans l'espace supérieur ZOX par les intersections des trajectoires menées originairement dans cet espace ou partant

de l'observateur. Si $n = 0$, x et z deviennent nuls et la caustique se réduit à un point qui est l'origine même des coordonnées. En effet, dans ce cas on demande que l'intersection ait lieu immédiatement entre les premières branches des trajectoires menées dans l'espace ZOX, et ces premières branches ne peuvent se couper qu'à l'origine. Les équations précédentes ne comprennent point les intersections possibles des secondes branches au-dessous de la ligne OX; mais aussi on a vu précédemment que ces dernières n'ont pas lieu dans le cas actuel, et c'est pourquoi nous n'avons pas considéré la valeur de x qui s'y rapporte. Cette analyse ne donne pas non plus les branches de la caustique qui sont formées par les intersections des secondes branches de trajectoires, dans l'espace supérieur; mais on a vu aussi que ces branches de la caustique ne sauroient avoir lieu pour de petites inclinaisons.

Venons maintenant aux caustiques formées dans l'espace ZOX par des trajectoires menées originairement dans l'espace $Z'OX$: elles ne pourront être formées qu'après que les trajectoires auront eu un nombre n de *minima* dans l'espace inférieur, et un nombre $n - 1$ de *maxima* dans l'espace supérieur; ce qui donnera l'équation

$$x = n \cdot \frac{4 \sin. I. \cos. I}{\alpha'} + (n - 1) \cdot \frac{4 \sin. I. \cos. I}{\alpha}$$

$$+ \frac{2 \cos. I}{\alpha} \cdot \sin. I \pm \sqrt{\sin.^2 I - \alpha z}$$

ou, en faisant disparoître le radical,

$$x^2 - 2\,x.\ sin.\ 2\,I.\ \frac{[2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\ \alpha'}$$

$$+ \frac{4\,n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha^2.\,\alpha'^2}.\ sin^2.\ 2\,I$$

$$+ \frac{2\,(1 + cos.\ 2\,I)}{\alpha}\ z = 0$$

Cette équation est encore analogue aux précédentes, et en faisant, pour plus de simplicité,

$$A = \frac{2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha'}{\alpha.\ \alpha'}$$

$$B = \frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha^2.\ \alpha'^2}$$

elle donne également

$$x = \frac{B}{A}.\ (2\ sin.\ 2\,I + sin.\ 4\,I)$$

$$z = -\,B.\ \alpha.\ (1 - 2\ cos.\ 2\,I + cos.\ 4\,I)$$

ou, en remettant pour A et B leurs valeurs,

$$x = \frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\,\alpha'.\,[2\,n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}.\ (2\ sin.\ 2\,I + sin.\ 4\,I)$$

et

$$z = -\,\frac{n.\,(\alpha + \alpha').\,[n.\,(\alpha + \alpha') - \alpha']}{\alpha.\ \alpha'^2}.\ (1 - cos.\,2\,I + cos.\,4\,I)$$

Si l'on fait dans ces équations $n = 1$, on retombera sur les valeurs de x et de z trouvées plus haut, pour la première caustique formée dans l'espace supérieur ZOX par les trajectoires menées originairement

dans l'espace $Z'OX$, et qui n'ont eu qu'un *minimum* dans cet espace.

Il existera de même, dans l'espace inférieur, des caustiques analogues aux précédentes, c'est-à-dire formées par des trajectoires qui auront eu plusieurs *minima* dans l'espace supérieur ZOX et plusieurs *maxima* dans l'espace inférieur $Z'OX$. Il suffira, pour obtenir ces caustiques, de changer α en α' dans les résultats précédens; alors, en désignant par z' les z qui s'y rapportent, et que nous prendrons positivement dans le sens OZ', on aura :

1°. Caustiques formées dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans cet espace,

$$x = \frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}{\alpha.\alpha'.[2n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}.(2\,sin.\,2I + sin.\,4I)$$

$$z' = -\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')+\alpha]}{\alpha'\alpha^2}.(1 - 2\,cos.\,2I + cos.\,4I)$$

2°. Caustiques formées dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans l'espace supérieur ZOX,

$$x = \frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}{\alpha.\alpha'.[2n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}.(2\,sin.\,2I + sin.\,4I)$$

$$z' = -\frac{n.(\alpha+\alpha').[n.(\alpha+\alpha')-\alpha]}{\alpha'.\alpha^2}.(1 - 2\,cos.\,2I + cos.\,4I)$$

En faisant $n = 1$ dans ces derniers on retrouvera les valeurs de x et de z trouvées précédemment pour la caustique formée dans l'espace inférieur par des trajectoires menées originairement dans l'espace supé-

rieur ZOX, et qui n'auroient eu qu'un *maximum* dans cet espace.

Cherchons maintenant dans quel ordre ces différentes caustiques sont rangées de chaque côté de l'axe OX; considérons d'abord celles qui se trouvent au-dessus de cet axe. Les équations qui les donnent sont toujours de la forme

$$x = \frac{B}{A}.(2 \sin. 2I + \sin. 4I)$$
$$z = -B\alpha.(1 - 2\cos. 2I + \cos. 4I)$$

En se bornant aux très-petits angles, on en déduit une parabole du second ordre qui est

$$z = \frac{A^2\alpha}{16\,B}.\,x^2$$

et le rang de chaque parabole dépendra de la grandeur du terme $\frac{A^2\alpha}{16\,B}$, suivant la valeur de n qui y correspond.

Pour les trajectoires qui commencent leur cours dans l'espace ZOX, on a

$$A = \frac{2\,n.(\alpha + \alpha') + \alpha'}{\alpha.\,\alpha'}; \quad B = \frac{n.[n.(\alpha + \alpha') + \alpha'].(\alpha + \alpha')}{\alpha^2.\,\alpha'^2}$$

Ainsi, en nommant P le coefficient $\frac{A^2\alpha}{16\,B}$ on aura

$$P = \frac{[2\,n.(\alpha + \alpha') + \alpha']^2.\,\alpha}{16\,n.(\alpha + \alpha').[n.(\alpha + \alpha') + \alpha']}$$

Cette valeur de P peut être mise sous la forme suivante :

$$P = \frac{\alpha}{4}.\left[1 + \frac{\alpha'^2}{4\,n.(\alpha + \alpha')[n.(\alpha + \alpha') + \alpha']}\right]$$

On voit donc qu'elle diminue sans cesse à mesure que n augmente, et qu'elle a pour limite $\frac{\alpha}{4}$; ce qui correspond à n infini. Ainsi les caustiques données par ce système d'intersections se rapprochent de plus en plus de l'axe OX, à mesure que les inflexions des trajectoires qui les donnent ont été multipliées. Mais quelque nombreuses qu'on les suppose, les caustiques seront limitées, du côté de l'axe, par la parabole $z = \frac{\alpha . x^2}{4}$ au-dessus de laquelle elles se trouveront toujours placées. En opérant de même sur les caustiques données par des trajectoires qui commencent leur cours dans l'espace inférieur $Z'OX$, on aura

$$A = \frac{2n.(\alpha + \alpha') - \alpha'}{\alpha . \alpha'}; \quad B = \frac{n.[n.(\alpha + \alpha') - \alpha'].(\alpha + \alpha')}{\alpha^2 \alpha'^2}$$

et l'on en déduira

$$P = \frac{\alpha . [2n.(\alpha + \alpha') - \alpha']^2}{16 n.(\alpha + \alpha').[n.(\alpha + \alpha') - \alpha']}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$P = \frac{\alpha}{4} . \left[1 + \frac{\alpha'^2}{4n.(\alpha + \alpha').[n.(\alpha + \alpha') - \alpha']} \right]$$

Les caustiques données par ce système d'intersections seront donc rangées au-dessus de l'axe OX, comme les précédentes; c'est-à-dire que celles pour lesquelles n est plus considérable, en seront plus rapprochées; mais ce rapprochement aura encore pour limite la parabole

$$z = \frac{\alpha x^2}{4}.$$

On voit aussi que, pour des valeurs égales de n, les valeurs de P sont plus petites pour le premier système que pour le second; ainsi, le nombre des inflexions étant le même, les caustiques données par le premier système s'approcheront davantage de l'axe OX.

En appliquant ces raisonnemens aux caustiques situées dans l'espace inférieur $Z'OX$, on verra facilement qu'elles sont rangées au-dessous de l'axe OX d'une manière analogue aux précédentes, et qu'elles ont pour limite la parabole dont l'équation seroit

$$z' = \frac{\alpha' x^2}{4}.$$

ce qui répondroit à un nombre de réflexions infini.

Et de même que les premières branches OV, OV', que nous avons déterminées *fig.* 15, appartenoient au système général des deux courbes OVZ', $OV'Z$, de même les nouvelles OV_1, OV_1' (*fig.* 20) appartiennent au système des deux courbes OV_1Z', $OV_1'Z$; d'où l'on voit maintenant ce que signifient les deux branches ZF'', $Z'F''$ de la *fig.* 16. Elles servoient pour ainsi dire d'attente pour les branches $OV'F''$, $OV_1'F''$, qui n'en sont que la continuation. Les autres branches OV_{11}, OV_{11}' se rattachent à des branches analogues, correspondantes à un certain nombre de réflexions complètes, et qui toutes viennent aboutir aux points Z, Z', où se fait la réflexion perpendiculaire.

Maintenant il est facile de comprendre qu'un point lumineux, situé entre ces caustiques, enverra à l'observa-

teur autant d'images qu'il pourra leur mener de trajectoires tangentes. Par exemple, le point lumineux M (*fig.* 20) situé au-dessus de l'axe OX et au-dessous de la caustique limite pourra envoyer par chacune des caustiques OV, $OV_{\prime}$, $OV_{\prime\prime}$, deux images, une directe et une renversée, lesquelles viendront se peindre dans l'espace supérieur ZOX ou dans l'espace inférieur $Z'OX$, selon le système d'intersections auquel elles appartiendront. Et le même point M pourra aussi envoyer une image par chacune des caustiques inférieures $OV'OV_{\prime}'OV_{\prime\prime}'$, mais il n'en enverra qu'une seule par chacune d'elles. Tous cela est analogue à ce que nous avons remarqué précédemment lorsque nous avons traité pour la première fois de la formation de ces images.

Toute extraordinaire que cette multiplicité d'images puisse paroître elle n'est cependant pas impossible à réaliser; car nous en avons observé deux exemples dans les triangles d'Espagne, ainsi que je l'ai rapporté au commencement de ce mémoire. Mais pour apprécier la probabilité que l'on peut avoir de la rencontrer dans la nature, il faut remarquer que la position supposée ici à l'observateur, sur la limite commune des deux couches, n'est pas nécessaire à la production du phénomène; ce qui le rendroit infiniment rare. Le même effet peut exister pour un observateur placé dans un des deux milieux, de sorte que l'opposition du décroissement des densités en est la véritable condition; laquelle, loin d'être improbable, doit au contraire se montrer dans la nature assez fréquemment.

Supposons donc l'observateur placé dans le milieu supérieur *ZAX* (*fig.* 21) à une hauteur *H* au-dessus de l'axe *AX*, commune intersection des deux milieux. Considérons d'abord les portions de caustiques qui se forment dans le milieu supérieur. Les trajectoires qui les donneront seront d'abord parties du point *O*, ou de l'observateur, par une première ou par une seconde branche; et après avoir eu un *maximum* dans cet espace ou n'en avoir point eu, elles descendront dans le milieu inférieur, s'y replieront, et après avoir atteint leur *minimum*, rentreront dans l'espace supérieur pour recommencer de nouvelles révolutions. Ainsi en supposant qu'elles aient fait *n* de ces révolutions, c'est à dire qu'elles aient eu *n* *minima* dans l'espace inférieur, elles n'auront fait que $n - 1$ révolutions complètes dans l'espace supérieur, sans compter leur première et leur dernière branche; et en nommant *I* l'angle sous lequel elles pénètrent dans l'espace inférieur, c'est-à-dire l'angle que leur tangente forme avec l'axe des *x* en entrant dans cet espace, l'équation d'une quelconque de ces trajectoires sera

$$x = \frac{2\cos. I}{\alpha}.\left(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha H}\right) + \frac{4n. \sin. I. \cos. I}{\alpha'}$$
$$+ \frac{4(n-1). \sin. I. \cos. I}{\alpha} + \frac{2\cos. I}{\alpha}.\left(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha z}\right)$$

Le premier terme se rapporte à la première partie de la trajectoire, depuis sa sortie de l'observateur jusqu'à son entrée dans le milieu inférieur. Les deux termes suivans expriment le nombre d'amplitudes complètes décrites

dans un milieu et dans l'autre. Le dernier terme exprime la dernière branche de la trajectoire que l'on considère, celle proprement où se fait l'intersection. Les signes — des radicaux ont lieu quand la trajectoire commence ou finit par une première branche; le signe +, au contraire, doit être employé quand il s'agit d'une seconde branche. Pour éviter ces doubles signes nous emploierons des coefficiens a et b que l'on fera à volonté + ou — 1; de cette manière on aura

$$(1) \quad x = 2\,n.\,sin.\,2\,I.\,\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha.\,\alpha'} + \frac{2\,cos.\,I}{\alpha}.\,\left(a\sqrt{sin^2.\,I - \alpha H} + b\sqrt{sin^2.\,I - \alpha z}\right)$$

La condition des intersections est

$$(2) \quad o = 2\,n.\,cos.\,2\,I.\,\frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha'} - sin.\,I.\,\left(a\sqrt{sin^2.\,I - \alpha H} + b\sqrt{sin^2.\,I - \alpha z}\right) + cos^2.\,I.\,\left(\frac{a.\,sin.\,I}{\sqrt{sin^2.\,I - \alpha H}} + \frac{b.\,sin.\,I}{\sqrt{sin^2.\,I - \alpha z}}\right)$$

Il reste à éliminer I entre ces deux équations. Nous n'essaierons pas de le faire en général, ce qui entraineroit une trop grande complication; mais seulement pour de très-petits angles, comme précédemment. Alors nous ferons

$$\alpha' = sin^2.\,I' = \omega^2;\; sin.\,I = K.\,sin.\,I' = K\omega$$
$$\alpha = \mu\,\omega^2$$

I' sera la limite de la réflexion dans le milieu inférieur,

et K sera toujours une fraction; car si la trajectoire pénétroit dans le milieu inférieur avec une inclinaison égale à I' ou plus grande que I', elle cesseroit de s'y réfléchir. De plus, μ sera un nombre dépendant du rapport des limites de la réfraction dans les deux milieux, limites que nous supposerons toutes deux du même ordre et extrêmement petites; en sorte que μ sera un nombre fini et ω une quantité fort petite. Substituant ces valeurs dans l'équation (2), elle devient

$$\begin{aligned} o = 2n.(1 - 2K^2\omega^2).(1+\mu) \\ - K\omega^2.(a\sqrt{K^2-\mu H} + b\sqrt{K^2-\mu z}) \\ + K.(1-K^2\omega^2).\left(\frac{a}{\sqrt{K^2-\mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2-\mu z}}\right) \end{aligned}$$

Cette équation contient des termes indépendans de ω. Ce sont eux qui donneront la partie la plus sensible de la valeur de z. Ainsi, en faisant ω nul, on aura pour déterminer z l'équation approchée

$$(3) \quad o = 2n.(1+\mu) + K.\left(\frac{a}{\sqrt{K^2-\mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2-\mu z}}\right)$$

d'où l'on tire

$$\mu z = K^2 - \frac{K^2.(K^2-\mu H)}{[aK + 2n.(1+\mu)\sqrt{K^2-\mu H}]^2}$$

et enfin

$$(4) \quad z = \frac{K^2.\{aK+[2n.(1+\mu)+1].\sqrt{K^2-\mu H}\}.\{aK+[2n.(1+\mu)-1].\sqrt{K^2-\mu H}\}}{\mu.[aK+2n.(1+\mu).\sqrt{K^2-\mu H}]^2}$$

La valeur correspondante de x est

$$x = \frac{4Kn.(1+\mu) + 2(a\sqrt{K^2-\mu H} + b\sqrt{K^2-\mu z})}{\mu\omega}$$

L'indéterminée b a disparu par l'élévation au carré; de sorte que cette valeur de z convient également aux deux cas où la dernière portion de la trajectoire, celle qui forme la caustique que l'on considère, seroit une première branche ou une seconde. Tout ce calcul est analogue à celui que nous avons fait précédemment, lorsque la densité du milieu supérieur étoit supposé constante; et en effet, si l'on suppose $\mu = 0$, $n = 1$ et $a = -1$ dans la valeur générale de z, on retombe sur les valeurs

$$z = 4K^2 - H; \quad x = \frac{8K}{\alpha}$$

qui sont en effet celles de la partie de la caustique située au-dessus de l'axe OX dans les circonstances que nous venons de rappeler.

Il y a un cas qui n'est pas compris dans la valeur précédente de z; c'est celui de $n = 0$. Il a lieu lorsque l'on veut considérer les intersections des trajectoires immédiatement après leur sortie de l'œil de l'observateur, et avant qu'elles soient descendues dans le milieu inférieur $Z'OX$. Alors, en reprenant la valeur générale de x, et faisant a et b égaux à $+1$, puisque, dans ce cas, il n'y a que les secondes branches qui se coupent, on a

$$x = \frac{2\cos. I}{\alpha}.\left(\sqrt{\sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{\sin^2. I - \alpha z}\right)$$

La condition des intersections donne

$$0 = -\frac{\sin. I}{\alpha}.\left(\sqrt{\sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{\sin^2. I - \alpha z}\right)$$
$$+\frac{\cos^2. I}{\alpha}.\left(\frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I - \alpha H}} + \frac{\sin. I}{\sqrt{\sin^2. I - \alpha z}}\right)$$

Cette équation devient alors divisible par *sin.* I et par $\sqrt{sin^2. I - \alpha H} + \sqrt{sin^2. I - \alpha z}$; supprimant ces facteurs il reste

$$\sqrt{sin^2. I - \alpha H}. \sqrt{sin^2. I - \alpha z} = cos^2. I$$

C'est la disparition des deux facteurs précédens qui fait que le cas que nous examinons échappe à la solution générale. En éliminant I entre cette équation et la valeur précédente de x, on trouve

$$z = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha x^2}{4(1 - \alpha H)}$$

c'est-à-dire que la caustique est une parabole; ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré dans la page 70. Si l'on met l'origine des z à l'observateur, en faisant $z = z' + H$, on trouve

$$z' = \frac{1 - \alpha H}{\alpha} - \frac{\alpha}{1 - \alpha H} \frac{x^2}{4}$$

et si l'on introduit, pour plus de simplicité, la densité $(\varrho)'$ qui a lieu au niveau de l'observateur, ainsi que la raison A' de la progression, à partir de ce point, on aura

$$\varrho' = (\varrho) . (1 - AH); \quad A' = \frac{A}{1 - \alpha H}$$

$$m' = \frac{\frac{4K'}{n'}(\varrho')}{1 + \frac{4K'}{n'}(\varrho')}$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha H} = m'A'$$

et l'équation de la caustique devient

$$z' = \frac{1}{m'A'} - \frac{m'A'}{4} x^2$$

c'est précisément celle que nous avons obtenue dans l'article cité.

Pour pouvoir discuter en même temps toute l'étendue de la caustique, nous allons chercher maintenant les branches qui la complètent et qui sont situées au-dessous de l'axe OX.

Ces branches sont données par les trajectoires qui ont fait un nombre égal de révolutions complètes au-dessus et au-dessous de la ligne OX, de sorte que leur équation est

$$x = \frac{2 \cos. I}{\alpha} \left(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha H}\right)$$
$$+ \frac{4\, n.\, \sin. I. \cos. I}{\alpha'} + \frac{4\, n.\, \sin. I. \cos. I}{\alpha}$$
$$+ \frac{2 \cos. I}{\alpha'} \left(\sin. I \pm \sqrt{\sin^2. I - \alpha' z}\right)$$

Ici les coordonnées z sont prises positivement de haut en bas dans le milieu inférieur. Si l'on substitue les coefficiens a et b aux signes $\pm$ des radicaux, comme nous l'avons fait précédemment, cette équation devient

$$x = (2\, n + 1).\ \sin.\ 2\, I.\ \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha.\, \alpha'}$$
$$+ 2 \cos. I. \left(\frac{a. \sqrt{\sin^2. I - \alpha H}}{\alpha} + \frac{b. \sqrt{\sin^2. I - \alpha' z}}{\alpha'}\right)$$

La condition des intersections est

$$o = (2\,n + 1).\ cos.\ 2\,I.\ \frac{(\alpha + \alpha')}{\alpha.\ \alpha'}$$
$$- sin.\ I.\ \left(\frac{a.\sqrt{sin^2.\ I - \alpha H}}{\alpha} + \frac{b.\sqrt{sin^2.\ I - \alpha' z}}{\alpha'}\right)$$
$$+ cos^2.\ I.\ \left(\frac{a.\ sin.\ I}{\alpha.\sqrt{sin^2.\ I - \alpha H}} + \frac{b.\ sin.\ I}{\alpha'.\sqrt{sin^2.\ I - \alpha' z}}\right)$$

Soit, comme précédemment,

$$\alpha' = sin^2.\ I' = \omega^2;\ sin.\ I = K.\ sin.\ I' = K\omega;\ \alpha = \mu\omega^2$$

il vient

$$o = (2\,n + 1).\ (1 - 2\,K^2\omega^2).\ \frac{(\mu + 1)}{\mu}$$
$$- K\omega^2.\ \left(a.\ \frac{\sqrt{K^2 - \mu H}}{\mu} + b.\sqrt{K^2 - z}\right)$$
$$+ K.\ (1 - K^2\omega^2).\ \left(\frac{a}{\mu.\sqrt{K^2 - \mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2 - z}}\right)$$

Ne conservant que les termes indépendans de ω, il reste

$$o = \frac{(2\,n + 1).\ (1 + \mu)}{\mu} + K\left(\frac{a}{\mu.\sqrt{K^2 - \mu H}} + \frac{b}{\sqrt{K^2 - z}}\right)$$

d'où l'on tire

$$z = K^2 - \frac{\mu^2 K^2\ (K^2 - \mu H)}{[aK + (2\,n + 1).\ (1 + \mu).\sqrt{K^2 - \mu H}]^2}$$

et enfin

$$z = K^2.\ \frac{\{aK + [2n(\mu + 1) + 2\mu + 1].\sqrt{K^2 - \mu H}\}.\{aK + [2\,n(\mu + 1) + 1]\sqrt{K^2 - \mu H}\}}{[aK + (2\,n + 1).\ (1 + \mu).\sqrt{K^2 - \mu H}]^2}$$

La valeur correspondante de x est

$$x = \frac{2}{\omega} \cdot \left[\frac{(2n+1)K.(1+\mu) + a\sqrt{K^2 - \mu H}}{\mu} + b.\sqrt{K^2 - z} \right]$$

Si l'on suppose $n = 0$, $\mu = 0$, $a = -1$, ce qui revient à supposer que la densité du milieu supérieur est constante, on trouve

$$z = K^2 - \frac{4K^6}{(H - 2K^2)^2}; \quad x = \frac{H^2}{K.(H - 2K^2)\omega}$$

qui sont les mêmes valeurs que nous avons obtenues dans la page 101.

D'après ces valeurs que nous venons d'obtenir il est facile de reconnoître complètement la forme de la caustique lorsque l'observateur est placé dans le milieu supérieur à une hauteur H, comme nous l'avons supposé. En effet, soit O (*fig.* 21) le point où il se trouve; menons la ligne horizontale OX' parallèle aux couches, et considérons d'abord les trajectoires OM, OM' menées du point O au-dessous de cette ligne, sous diverses inclinaisons que nous désignerons par I'.

Premièrement il est clair que les branches OM, OM' de ces trajectoires, étant divergentes, ne peuvent pas se couper dans le milieu supérieur entre les lignes OX' et AX. Elles devront donc pénétrer dans le milieu inférieur où le sens de leur courbure changeant, elles engendreront de nouvelles trajectoires concaves vers l'axe AX. Celles de ces trajectoires qui répondront aux plus grandes valeurs de I' se couperont dans leurs secondes branches, au-dessous de l'axe AX, et formeront dans le milieu inférieur la portion de caustique $Z'F$ dans laquelle le point

Z' répondra à $I' = 90$ degrés I' diminuant toujours, les secondes branches des trajectoires inférieures ne se couperont plus au-dessous de AX. Elles pénètreront dans le milieu supérieur, où elles donneront la portion de caustique FV, analogue à la branche FR de la *fig.* 13, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Et, de même qu'alors, cette branche aura aussi une limite, c'est-à-dire qu'au-dessous de certaines valeurs de I'; les intersections s'abaisseront de nouveau et rentreront dans le milieu inférieur, suivant la branche VR analogue à la branche RR' de la *fig.* 13; après quoi I' diminuant toujours, il se formera une nouvelle branche RS' qui se terminera au point S, lorsque l'on aura $I' = 0$, $K^2 = \mu H$; ce qui donne $K^2 = z$, et la tangente de cette branche au point S sera horizontale.

Tout ceci est encore analogue à ce que l'on a vu dans la *fig.* 13 pour le cas où la densité du milieu supérieur étoit constante. La branche RS, dans le cas actuel, correspond à la branche $R'X'$ de la *fig.* 13; seulement ici elle est terminée, au lieu qu'alors elle s'étendoit à l'infini, parce que la trajectoire menée du point O sous l'angle $I' = 0$ étoit alors une ligne droite parallèle à l'axe des X, qui ne pouvoit jamais être censé pénétrer dans le milieu inférieur, si ce n'est à une distance infinie.

Et, de même que dans la *fig.* 15, les trajectoires qui forment la branche $Z'F$ dans le milieu inférieur, forment en se repliant dans le milieu supérieur la nouvelle portion de caustique ZF' par les intersections de leurs secondes branches, de même, dans le cas actuel,

les trajectoires qui forment la portion de caustique $Z'F$ dans le milieu inférieur, formeront dans le milieu supérieur la portion de caustique $F''Z$. Mais dans le cas de la *fig.* 15, la même trajectoire donnoit les points F et F'' et toutes celles qui formoient la portion $Z'F$ formoient aussi ZF'', parce que la valeur de I en F et en F'' étoit de 45°; mais dans le cas de la *fig.* 21 l'inclinaison en F est moindre que 45°, et en F'' elle est plus grande, parce que le point V s'est abaissé vers le milieu inférieur : et de là il résulte que l'arc ZF'', est formé seulement par une partie des trajectoires qui forment l'arc $Z'F$; de sorte que les autres ont leur seconde intersection sur le prolongement de la branche ZF'' dans le milieu inférieur.

Si, d'après les expressions de Z de la page 142, on cherche les coordonnées du point F où z est nulle, seulement dans le cas de $n=0$, on trouve

$$K=\frac{(2\mu+1)}{2}.\sqrt{\frac{H}{\mu+1}};\quad x=\frac{2}{\omega}.\left[\frac{K.(1+\mu)-\sqrt{K^2-\mu H}}{\mu}+K\right]$$

En faisant de plus $\mu=0$, ces expressions donnent

$$K=\frac{\sqrt{H}}{2};\quad x=\frac{4.\sqrt{H}}{\omega}$$

Ce sont précisément les valeurs trouvées au commencement de la page 101, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Si l'on fait H nul on trouve $K=0$, $x=0$, c'est-à-dire que le point f vient à l'origine, et qu'il est donné par la trajectoire parallèle à l'axe. C'est en effet, ce qui a lieu quand l'observateur est situé au milieu des deux couches, comme on l'a vu précédemment.

Quant aux coordonnées du point S, on les trouve en faisant $K^2 = \mu H$ et $K^2 = z$; ce qui donne

$$z = \mu H; \quad x = \frac{2.(2n+1).(1+\mu)}{\mu}.\sqrt{\mu H}$$

d'où l'on voit que si $\mu = 0$, le point S vient sur l'axe AX et s'éloigne, sur cet axe, à une distance infinie. C'est en effet ce qui a lieu quand la densité du milieu supérieur est constante.

Jusqu'à présent nous n'avons encore que la moitié de la caustique, celle qui est donnée par des branches OM, OM' menées au-dessous de la ligne OX', et par conséquent correspondantes à des valeurs de I' positives. Si nous considérons maintenant les valeurs négatives, c'est-à-dire les trajectoires menées au-dessus de la ligne OX', nous verrons naître le reste de la caustique que nous voulons déterminer.

En effet, il est visible que les plus grandes valeurs de I' donneront des trajectoires qui se couperont, dans leurs secondes branches, dans le milieu supérieur, au-dessus de l'axe AX; ce qui formera la portion de caustique ZF', telle qu'elle doit naturellement avoir lieu dans un tel milieu. Mais, après que I' aura diminué jusqu'à un certain terme, les intersections des trajectoires se feront dans le milieu inférieur, ce qui donnera la branche $F'V'$ et ensuite la branche $V'S$ qui se réunira avec la branche AS au point S lorsque l'on aura $z = 0$. En effet, il est aisé de voir que les valeurs précédemment trouvées pour z, sont en général différentes, suivant que l'on prend le

coefficient a négatif, ou positif; c'est-à-dire suivant que l'on suppose que les trajectoires parties du point O entrent dans l'espace inférieur par leur première ou par leur seconde branche. Mais ces deux cas se réunissent lorsque I' est nul, parce qu'alors on a $\sqrt{sin^2.I-\mu H}=0$, et le radical duquel dépendoit la différence des deux branches disparoît de la valeur de z. C'est parce que le point S appartient à la fois aux premières et aux secondes branches des trajectoires, qu'il se trouve au *minimum* d'une d'entre elles, ce qui rend horizontale la tangente de la caustique en ce point.

On voit également que les trajectoires qui forment les portions de caustiques $ZV'S$, par les intersections de leurs secondes branches au-dessus de AX ou de leurs premières branches dans le milieu inférieur, donneront dans ce même milieu, par les intersections de leurs secondes branches, la portion de caustique $Z'f''$ analogue à la branche $Z'F''$ de la *fig.* 15, et servant comme elle d'attente pour le prolongement de la caustique, par les trajectoires qui ont subi plus d'une révolution autour de l'axe AX. Seulement, dans le cas actuel, les points f'', F'' ne sont pas les mêmes, au lieu que dans la *fig.* 15 ils se trouvoient réunis.

Et delà résultera, dans les petites inclinaisons, un système de caustiques consécutives analogues à celles de la *fig.* 20, mais placées différemment. Parmi ces caustiques qui sont représentées dans la *fig.* 22, il n'y aura que les branches $VRSV'$, $V_{,}R'S'V'_{,}$ qui auront lieu sous de très-petites inclinaisons; et ces branches auront encore

la propriété que chacune d'elles renfermera toutes les suivantes comme dans la *fig.* 20. Mais les points V, V', V'' iront continuellement en s'abaissant vers l'axe AX par l'effet de l'élévation de l'observateur, comme nous avons vu qu'il arrivoit dans la *fig.* 13, lorsque la densité du milieu supérieur étoit constante. Il y aura aussi des hauteurs pour lesquelles quelques-unes des branches ci-dessus pourront disparoître en partie, ou en totalité. Mais ces variations faciles à prévoir, d'après tout ce qui précède, seroient inutiles à examiner, et il suffit à notre objet d'avoir montré qu'un système de pouvoirs réfringens composé de deux progressions arithmétiques contraires peut donner une très grande multiplicité d'images pour un objet placé convenablement, même lorsque la force réfringente du milieu, et par conséquent la limite de la réflexion extrême, est supposée extrêmement petite.

Ce que nous venons de démontrer relativement à la progression arithmétique n'est pas particulier à cette loi; au moins quant à la forme générale des caustiques, à leur double rebroussement et à leur multiplicité. Des propriétés analogues se rencontrent, avec des modifications diverses, dans tous les cas où l'on suppose deux lois de décroissemens opposés. Il n'est pas même nécessaire que les deux lois soient de même nature. Considérons par exemple le cas où le décroissement se faisant suivant une progression arithmétique dans le milieu supérieur se feroit dans le milieu inférieur suivant une exponentielle. Ce cas, comme nous l'avons vu, paroît se rapprocher extrêmement de ce qui a lieu dans la

nature. Supposons encore que l'observateur se trouve dans le milieu supérieur. Alors, dans les inclinaisons très-petites, il se formera des caustiques qui passeront d'un milieu dans l'autre avec toutes les inflexions que nous avons remarquées dans la *fig.* 22. Car on a vu que, pour de très-petites inclinaisons, les trajectoires, menées dans un décroissement par exponentielle, diffèrent très peu de ce qu'elles seroient dans le cas d'une progression arithmétique; de sorte que l'on peut appliquer à ces trajectoires les considérations que nous venons d'exposer dans les pages précédentes; et par conséquent elles donneront des caustiques parfaitement analogues à toutes celles que nous venons d'examiner. Mais on a vu que ces dernières se modifient avec la hauteur de l'observateur; que la partie de leurs branches située dans le milieu supérieur, s'abaisse à mesure que l'observateur s'élève, et qu'enfin elle s'évanouit lorsque l'observateur a atteint une certaine hauteur dépendante de la différence de densité des deux milieux et des rapports de leurs forces réfringentes. Ainsi, dans le cas actuel, il arrivera de même que la hauteur de l'observateur et la rapidité du décroissement de l'exponentielle, à l'endroit où les deux milieux se joignent, produiront des modifications analogues, sur les caustiques qui auront lieu dans ce dernier cas. Et enfin, ici comme dans les autres lois que nous avons examinées, il y aura certaines hauteurs de l'observateur qui anéantiront complètement les branches de caustiques situées dans le milieu supérieur, et qui abaisseront ces branches au-des-

sous de la limite commune des deux milieux. De sorte que dans cette circonstance, comme dans le cas de la *fig.* 14, chaque caustique pourra se réduire à une seule branche située au-dessous de cette limite, qui aura sa convexité tournée vers le milieu supérieur. Cela arriveroit, par exemple, si la progression arithmétique ne commençoit qu'à une hauteur où les variations de l'exponentielle soient devenues insensibles, en sorte qu'on puisse confondre celle-ci avec son asymptote rectiligne. Car alors les *minima* des trajectoires situées dans le milieu inférieur iroient toujours en s'éloignant de l'axe des z, et par conséquent les intersections de deux secondes branches se feroient toujours au-dessous de cet axe, dans le milieu inférieur: ce qui empêcheroit la caustique de s'élever dans le milieu supérieur. Au lieu que cela n'arriveroit pas nécessairement, pour toutes les hauteurs de l'observateur, si l'exponentielle étoit interrompue avant son asymptote; puisqu'alors, au moins pour de petites valeurs de H, la courbe des *minima*, dans le milieu inférieur, auroit toujours un point de rebroussement après lequel elle reviendroit sur elle-même : ce qui donneroit lieu à la branche supérieure de la caustique de se former. En général la considération de la courbe des *minima*, suffira pour indiquer dans toutes les circonstances, les variations et les accidens que les caustiques doivent éprouver.

Recherche des trajectoires et des caustiques, en ayant égard à la courbure de la terre.

Toutes les considérations que nous venons d'exposer relativement à la formation des caustiques et à la multiplicité des images dans le cas des couches planes, s'appliquent encore, avec quelques modifications, quand on a égard à la courbure de la terre. Il arrive même fort souvent que ces modifications sont très-légères, parce que la courbure de la terre étant peu sensible pour de petites distances, des différences de température, même assez foibles, suffisent pour en dissimuler l'effet, ainsi qu'on l'a vu plus haut dans les observations de dépression faites sur le sable à Dunkerque. Les dépressions observées alors pour un ou deux degrés centésimaux de différence dans les températures extrêmes, étoient incomparablement plus grandes que celles que la courbure de la terre auroit pu donner, pour des hauteurs aussi petites que celles où nous étions placés, et pour des distances aussi peu considérables que celles où se terminoit l'horizon apparent.

Mais, d'un autre côté, on conçoit moins facilement ces différences de température sur la surface de la mer que sur celle d'un terrain sablonneux que les rayons solaires peuvent échauffer à un haut degré. Ainsi, avant de chercher à étendre nos résultats aux couches sphériques, je crois devoir montrer qu'en effet il se produit, sur la surface des eaux, des phénomènes d'inflexion et de renversement analogues à ceux qui ont lieu sur les plaines sablonneuses; et qu'ils sont produits par les mêmes causes,

c'est-à-dire par l'excès de température des couches inférieures sur celles qui sont au-dessus.

Pour éclaircir ce fait rien n'est plus utile que d'observer successivement l'horizon de la mer, en se plaçant à diverses hauteurs connues au-dessus de sa surface. Toutes les trajectoires menées à cet horizon se terminant inférieurement de la même manière, comme étant toutes tangentes à la mer, peuvent être considérées comme une seule et même trajectoire sur divers points de laquelle on se place successivement, à des hauteurs connues. Chaque dépression observée fait connoître l'angle que la tangente de la trajectoire en ce point forme avec la verticale, et les changemens que cet angle éprouve entre deux stations consécutives, montrent dans quel sens la trajectoire tourne sa convexité, entre l'intervalle des deux stations.

Soit (r) le rayon mené du centre de la terre à la station la plus basse, que nous nommerons S'; soit à cette station (ϱ) la densité de l'air, et I la dépression observée. Désignons par r, ϱ, I' les quantités analogues de la station supérieure S''. Cela posé, d'après les formules rapportées dans la *Mécanique céleste* pour le cas des couches sphériques, page 277 et suivantes, l'expression $\frac{dr}{rdv}$ représente, pour chaque point de la trajectoire, la tangente de la dépression apparente du rayon visuel, et l'on a entre deux dépressions consécutives situées sur une même branche de la trajectoire, la relation suivante:

$$\text{tang. } I' = \frac{r}{(r).\ \cos.\ I} \cdot \sqrt{1 - \frac{(r)^2}{r^2} \cos^2. I - m.\ \varphi}$$

en supposant toujours, comme précédemment,

$$m = \frac{\frac{4\,(K).\,(\varrho)}{n^2}}{1 + \frac{4\,(K).\,(\varrho)}{n^2}}\,; \quad \varphi = \frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}$$

Si φ est une quantité positive, la trajectoire sera concave vers la surface terrestre; c'est le cas de la réfraction ordinaire, où la densité de l'air décroît quand la hauteur augmente. Mais si φ est négative, la densité ira au contraire en décroissant, et la trajectoire sera convexe vers la même surface. Cherchons donc à tirer des observations la valeur de φ. Pour cela on commencera par carrer la valeur de *tang.* I'; ce qui donne

$$tang^2.\,I' = \frac{\frac{r^2}{(r)^2} - cos^2.\,I - m\varphi}{cos^2.\,I}$$

Soit $\frac{(r)}{r} = 1 - s$; s sera la différence du niveau des deux stations. En regardant cette différence comme une fraction extrêmement petite du rayon terrestre, et négligeant s^2, on aura

$$tang^2.\,I' - tang^2.\,I = \frac{2\,s - m\varphi}{cos^2.\,I}$$

d'où l'on tire

$$\frac{m\varphi}{2\,s} = 1 - \frac{sin.\,(I' + I).\,sin.\,(I' - I)}{2\,s.\,cos^2.\,I'}$$

En mettant dans le second membre de cette équation pour I, I' et s, leurs valeurs observées, on connoîtra si φ est positif ou négatif, par conséquent si la trajec-

toire est concave ou convexe vers la surface de la terre. On doit remarquer que $\frac{m\varphi}{4s}$ seroit ce que l'on nomme le coefficient de la réfraction terrestre, si la densité décroissoit de bas en haut suivant une progression arithmétique, comme cela a lieu ordinairement à de petites hauteurs. Si l'on vouloit supposer une loi de décroissement telle que l'on eût

$$m\varphi = 2s \quad \text{ou} \quad \frac{m\varphi}{4s} = \frac{1}{2}$$

on auroit

$$tang.\ I = tang.\ I'$$

c'est-à-dire que la trajectoire feroit toujours un angle constant avec la verticale, et par conséquent la trajectoire horizontale seroit un cercle. Dans ce cas l'effet de la force réfringente est égal à celui de la courbure de la terre.

Il est aisé de sentir pourquoi des observations, ainsi comparées, font connoître le sens de la courbure de la trajectoire, dans l'intervalle qu'elles comprennent. Nommons les deux stations M' et M''. La dépression observée en M' donne l'angle que fait la verticale de ce point avec la tangente de la trajectoire; et la direction de cette tangente sur la verticale se trouve ainsi déterminée. L'autre observation fait connoître les quantités analogues pour la tangente de la trajectoire en M''. Maintenant ces deux tangentes suffisamment prolongées se rencontreront nécessairement au-dessus ou au-dessous de la corde qui joint M' et M''; au-dessus si la courbe

est concave vers la surface de la terre, comme dans la réfraction ordinaire; au-dessous si elle est convexe vers cette même surface. Et pourvu que la trajectoire n'ait pas d'inflexions entre ces deux points, l'intersection dont il s'agit se fera du même côté de la corde, soit qu'on rapproche ou qu'on éloigne les deux verticales, en diminuant ou augmentant l'angle qu'elles forment au centre de la terre. Le sens de la courbure ne dépend donc nullement de la grandeur de cet angle, mais seulement des différences de niveau et des dépressions observées dans les deux stations, et voilà pourquoi on peut le déduire de l'équation différentielle, indépendamment de toute intégration.

Supposons que la trajectoire soit tangente à la mer dans la station inférieure; on aura alors $I = 0$, et I' sera la dépression apparente de l'horizon. Alors en faisant, pour plus de simplicité, $tang^2. V = 2s$, V sera la dépression vraie calculée, sans avoir égard à la réfraction, et l'on aura

$$m\varphi = \frac{sin. (V + I'). sin. (V - I')}{cos^2. I. cos^2. V}$$

expression qui, pour de petites hauteurs, pourra être réduite à

$$m\varphi = sin. (V + I'). sin. (V - I')$$

On voit par cette formule que $m\varphi$ sera positif si la dépression apparente est plus foible que la dépression vraie, et négatif si elle est plus forte. En mettant pour m et φ leurs valeurs en fonction des pressions barométriques et

des températures observées aux deux stations, on a, avec une approximation toujours très-suffisante,

$$m\varphi = \frac{(m)}{0.76} \cdot \left[\frac{(p)}{1 + (t) \cdot 0.00375} - \frac{p}{1 + t \cdot 0.00375} \right]$$

(m) étant, comme dans la page 27, la valeur de m calculée pour la température de la glace fondante et la pression 0.76. On tire de là, en mettant pour $m\varphi$ sa valeur observée,

$$(t) - t = \frac{(1 + t \cdot 0.00375)}{0.00375} \cdot \left\{ \frac{(p) - p - \frac{m\varphi \cdot 0.76}{(m)} \cdot (1 + t \cdot 0.00375)}{p + \frac{m\varphi}{(m)} \cdot 0.76} \right\}$$

ce qui donnera la différence des températures extrêmes, lorsqu'on connoîtra la température de l'air dans la station supérieure, et les pressions barométriques dans les deux stations.

Je vais appliquer ces formules à des observations de dépression de l'horizon de la mer, que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque, avec le cercle répétiteur. Nos stations successives ont été : 1°. la laisse de basse mer, en plaçant le cercle sur le sable ; 2°. les divers étages et la terrasse d'une maison qui avoit vue sur la mer ; 3°. enfin la tour même de Dunkerque, dont la plate-forme, suivant les mesures de M. Delambre, est élevée de 61.754 mètres au-dessus de la laisse de basse mer. Pour avoir égard à l'effet du flux et du reflux, on mesuroit, au commencement et à la fin de chaque série, la hauteur de la mer avec une règle divisée en centimètres, et l'on prenoit la moyenne de ces deux résultats pour trouver l'élévation du centre du cercle sur la mer,

pendant la série. Toutes les hauteurs que je vais rapporter ont été conclues en ayant égard à cette précaution indispensable.

Dépressions de l'horizon de la mer observées le 26 décembre 1808, la mer étant plus chaude que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente. I'.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V (1).	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable.		Mètres.		Barom. = 0.7522.
1re série. 6 obs. .	4′ 52″0	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 2°.
2e . . . 6 obs. .	4 57.4	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 4°.
Moyenne . .	4 54.7	0.610	1′ 30″3	Tempér. de l'eau à la surf. 0°. Mer basse.
Sur l'estacade.				Barom. = 0.7514.
6 observations . .	7 4.0	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 3°.
6 observations . .	7 6.6	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 4.3.
Moyenne . .	7 5.3	7.475	5 16.1	Tempér. de l'eau à la surface — 0°2. La mer commence à monter.
Premier étage de la maison.				Barom. = 0.7506.
6 observations . .	8 8.9	. . . .	. . . .	Therm. barom. = — 4°
6 observations . .	7 57.9	. . . .	. . . .	Therm. Air = — 5°.
Moyenne . .	8 3.4	13.455	7 3.7	Tempér. de l'eau, 0°. Mer un peu montante.
Troisième étage.				Barom. = 0.7495.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	Therm. bar. = — 3.8.
6 observations . .	9 8.23	20.450	8 42.3	Therm. Air = — 5°.

(1) La valeur de V est calculée par la formule *tang.* $V = \sqrt{2s}$. Soit H la hauteur de l'observateur exprimée en mètres, a le rayon de la terre exprimé de la même manière, on aura $s = \frac{H}{a}$, et par conséquent *tang.* $V = \sqrt{\frac{2H}{a}}$. On peut supposer $a = 6366198$.

Dans toutes ces observations on remarque que la dépression apparente est toujours plus grande que la dépression vraie, calculée sans avoir égard à la réfraction ; ce qui rend les valeurs totales de $m\varphi$ négatives. Cela prouve que la trajectoire est, au moins en partie, convexe vers la surface de la mer; résultat facile à prévoir, puisque, d'après les expériences thermométriques, la mer étoit ce jour-là plus chaude que l'air. On voit encore que l'excès de la dépression apparente diminue à mesure qu'on s'élève. Ainsi l'influence de la mer s'affoiblit avec la distance, et la courbure de la trajectoire doit changer avec la hauteur. Calculons donc les valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ entre les stations consécutives, pour connoître la loi de ces variations. En effectuant ce calcul on trouve :

Troisième étage-estacade. . . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = +0.15344 = \frac{1}{6.5}$

Premier étage-estacade . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = +0.16655 = \frac{1}{6.0}$

Estacade — laisse de basse mer . . $\frac{m\varphi}{4s} = -0.0142$

Les deux premiers résultats donnent des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ positives et à très-peu près égales. La moyenne seroit $\frac{m\varphi}{4s} = 0.16 = \frac{1}{6.25}$, qui diffère seulement de l'une ou de l'autre de $\frac{13}{1000}$. Ainsi, dans tout cet intervalle, la densité décroissoit sensiblement en progression arithmétique avec la hauteur, et le coefficient de la réfraction terrestre étoit égal à $\frac{1}{6.25}$ de l'arc. Cet intervalle étoit donc déjà soumis à la réfraction ordinaire, et il n'est

pas douteux que la même loi se maintenoit encore à de plus grandes hauteurs.

Mais au-dessous de cette limite $\frac{m\varphi}{4s}$ devient négative ; ce qui indique une densité décroissante. Ainsi la trajectoire commence d'abord par être convexe vers la mer dans sa partie inférieure, et elle devient ensuite concave vers cette même surface. D'après la petitesse de la valeur négative de $\frac{m\varphi}{4s}$ on peut regarder la hauteur de l'estacade, ou 7.475 mètres, comme le point d'inflexion qui sépare les deux courbures.

Maintenant si l'on calcule la température de l'air à la surface de la mer, d'après les observations faites dans les deux stations, on trouve

	Différence des températures extrêmes calculée, ou $(t) - t$.	Température à l'observateur, ou valeur de t.	Température de l'air à la surface de la mer, ou valeur de (t), conclue.
Estacade.	+ 1°47	— 4°3	— 2.83
Sable	+ 0.851	— 4.0	— 3.15
Moyenne . . .	. . . .	. . . .	— 2.99

La légère différence que l'on trouve entre les valeurs de (t) peut venir de ce que le rayon visuel, dans les observations de l'estacade, touchoit la mer dans un endroit plus éloigné du port, par conséquent plus profond et moins couvert de glace que dans les expériences faites sur la laisse de basse mer. On voit encore ici ce que nous avons déjà remarqué page 33. La couche inférieure de

l'air ne prend pas toute la chaleur que la surface sur laquelle elle repose pourroit lui communiquer, et sa température est moindre que celle de cette surface.

Après avoir détaillé complètement cet exemple, je m'étendrai moins sur les suivans.

Dépressions de l'horizon de la mer, observées le 16 *janvier* 1809, *la mer étant plus chaude que l'air.*

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable.		Mètres.		Baromètre = 0.7671.
6 observations. .	1' 58"1	0.71	1' 37"5	Therm. bar. = — 1.0.
10 observations. .	1 50.3	0.75	1 40.1	Therm. Air — 3°9.
Moyenne . .	1 54.2	0.73	1 38.8	Températ. de l'eau, 0°. Mer descendante.
Premier étage.				Baromètre = 0.7660.
8 observations. .	7 25.4	9.285	5 52.2	Therm. bar. = — 3.3.
8 observations. .	7 18.7	9.225	5 51.2	Therm. Air = — 5.0.
Moyenne . .	7 22.0	9.26	5 51.7	Mer presque étale.
Troisième étage.				Baromètre = 0.76582.
8 observations. .	8 53.6	16.37	7 47.8	Therm. bar. = — 4.0
8 observations. .	9 3.5	16.37	7 47.8	Therm. Air = — 5.0.
Moyenne . .	8 58.5	16.37	7 47.8	Au bord de la mer. Bar. = 0.76625. Mer étale.
Terrasse.				Baromètre = 0.7645. Therm. bar. = — 5.0.
8 observations. .	9 42.3	21.07	8 50.7	Therm. Air = — 5.6. Mer étale.
Sur la tour.				Baromètre = 0.7614.
8 observations. .	14 35.0	62.354	15 13.0	Therm. bar. = — 4.9.
6 observations. .	14 25.2			Therm. Air = — 6.25.
Moyenne . .	14 30.1	62.354	15 13.0	Mer desc. Tempér. 0°.

Nous devons remarquer que les observations de la maison ont été faites les premières ; on a été de-là sur le sable et ensuite sur la tour. Toutes ces observations calculées immédiatement donneroient des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ négatives, à l'exception de la dernière, dans laquelle la réfraction ordinaire surpasse beaucoup l'effet de la réfraction extraordinaire due à l'influence de la mer. En calculant les valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ pour les intervalles compris entre les stations consécutives, on trouve les résultats suivans :

Troisième étage-terrasse	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.113448 = \frac{1}{8.815}$
Troisième étage-tour	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.120030 = \frac{1}{8.333}$
Terrasse-tour.	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.121165 = \frac{1}{8.444}$
Valeur moyenne	$\frac{m\varphi}{4s} = + 0.118214 = \frac{1}{8.530}$

Tout cet intervalle est donc soumis à la réfraction ordinaire, et la densité y décroît de bas en haut, suivant une progression arithmétique ; mais au-dessous de ces limites on trouve

Premier étage-troisième étage. . $\frac{m\varphi}{4s} = + 0.00213 = \frac{1}{500}$

et pour les stations plus basses la valeur de $m\varphi$ seroit négative. C'est donc ici que commence la réfraction extraordinaire. Le point d'inflexion des deux courbures se trouve placé entre le premier étage et le troisième, c'est-à-dire entre 9.26 mètres et 16.37 ; car en diminuant seu-

lement de 0.067 mètres la différence de niveau de ces deux stations, on y rendroit nulle la petite réfraction que nous venons de trouver égale à $\frac{1}{500}$.

En calculant par les observations inférieures la température de la couche d'air qui repose sur la surface de la mer, on obtient les valeurs suivantes :

STATIONS.	Différence des températures extrêmes, ou valeur de $(t)-t$ calculée.	Température à l'observateur, ou valeur de t.	Température de l'air à la surface de la mer, conclue.
Troisième étage. . .	+ 1.04	— 5°0	— 3.96
Premier étage . . .	+ 1.04	— 5.0	— 3.96
Sable. 1re observ. . .	+ 0.03	— 3.9	— 3.87
2e observ. . .	+ 0.02	— 3.9	— 3.88
Moyenne. . . .	. . . .	. . . .	— 3.92

L'accord des résultats de la dernière colonne entre eux montre assez l'exactitude des observations, et l'on voit encore ici que la couche d'air inférieure a une température plus basse que la surface de la mer.

Voici maintenant d'autres observations dans lesquelles la température de la surface de la mer étoit *plus froide* que celle de l'air. Elles donnent des résultats bien différens des précédentes.

Dépressions de l'horizon de la mer observées le 4 février 1809, *la mer étant plus froide que l'air.*

Vent S. S. O.; temps couvert, avec des éclaircis, le soleil se montrant par intervalle; horizon souvent très-net et très-bon à observer.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètres.		Barom. = 0.7524 à la station.
8 observations . .	+ 5′ 0″ 5	10.54	6′ 15″3	Therm. barom. = 12.4.
8 observations . .	4 40.6	10.06	6 6.7	Therm. Air + 10.15. Mer montante. Barom. = 0 75345 au bord de la mer. Therm. barom. = 12 5. Therm. Air. + 9.6. Température de l'eau à la surface + 7.7.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7529.
8 observations . .	— 0 22.9	0.77	+ 1 41.4	Therm. bar. = 11.3.
8 observations . .	— 0 21.4	0.77	+ 1 41.4	Therm. Air. Première série + 8.6. Therm. Air. Seconde série + 9.0.
La dépression étant négative, l'horizon apparent étoit au-dessus du plan horizontal mené par l'œil de l'observateur; d'où il suit que l'on voyoit par une seconde branche dont le *maximum* étoit au-dessus du niveau de l'observateur. L'horizon apparent étoit sans vagues et bien terminé.				
Premier étage.				Baromètre = 0.7521.
8 observations . .	+ 4 22.5	9 0.9	5.48.6	Therm. bar. = + 12.0. Therm. Air = 9.6. La mer commence à descendre.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Troisième étage.		Mètres.		Baromètre = 0.75165.
8 observations . .	6′25″8	16.23	7′45″7	Therm. bar. = 11.3. Therm. Air + 9.4. Mer descendante.
Terrasse.				Baromètre = 0.7513.
8 observations . .	7 27.4	20.91	8 48.6	Therm. bar. = + 11.
8 observations . .	7 28.2	20.95	8 48.6	Therm. Air = + 8.9. Au bord de la mer. Dans le port + 8.2.
Sur le chenal.				Baromètre = 0.7530.
6 observations . .	+ 1 35.7	2.66	3 8.5	Therm. bar. = 11.
8 observations . .	1 41.6	2.78	3 12.7	Therm. Air = + 8.55. Temp. de l'eau = + 7.7. Mer descendante. Horizon excellent et parfaitement terminé dans ces deux séries.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7529.
8 observations . .	+ 0 26.9	0.77	1 41.4	Therm. bar. = + 9.8. Therm. Air + 8.6. Tempér. de l'eau + 7.7. Mer descendante depuis long-temps.

Dans toutes ces expériences la mer étoit *plus froide* que la couche d'air qui reposoit sur sa surface ; aussi la réfraction a-t-elle été extraordinairement forte. En calculant directement chacune des dépressions observées, on trouve pour $\frac{m\varphi}{4s}$ les valeurs suivantes que nous réunissons dans un même tableau pour pouvoir les comparer plus facilement.

Au premier étage. Première série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot179295$;	$as = 10^m54.$	Mer fortement montante. Hor. bien tranché.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot210295$;	$as = 10\cdot06.$	Mer montante.
Troisième série Au retour	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot216343$;	$as = 9\cdot09.$	Mer presque étale. Elle commence à desc.
Sur le sable. Première et seconde série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} > 0\cdot5$;	$as = 0\cdot77.$	Mer fortement montante.
Au troisième étage. Première série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot157008$;	$as = 16\cdot23.$	Mer descendante.
Sur la terrasse. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot141741$;	$as = 20\cdot91.$	Mer descendante.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot141388$;	$as = 20\cdot95.$	Mer descendante.
Sur le chenal. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot371202$;	$as = 2\cdot66.$	Mer descendante plus fortement.
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot361098$;	$as = 2\cdot78.$	Mer descendante plus fortement.
Sur le sable. Première série. La mer	$\frac{m\varphi}{4s} = 0\cdot464583$;	$as = 0\cdot77$ +	

Ces observations indiquent que la valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$ n'est point constante pour ces diverses hauteurs, et qu'elle va en diminuant à mesure que la hauteur augmente.

Cet effet n'est point dû à la forme que prend la mer lorsqu'elle monte ou lorsqu'elle descend ; car les dépressions observées sur le chenal et sur le sable donnent des réfractions très-fortes, soit que la mer monte, soit qu'elle descende.

L'accroissement extraordinaire de $\frac{m\varphi}{4s}$ paroît n'avoir lieu que jusqu'à une certaine hauteur peu différente de celle du premier étage, c'est-à-dire de 9 ou 10 mètres ;

car en combinant les observations faites au-dessus de cette hauteur $\frac{m\varphi}{4s}$ devient à peu près constant. En effet on trouve

Premier étage (3e série) — 3e étage .	$\frac{m\varphi}{4s}$	$= 0.08147$	$= \frac{1}{12.27}$
Premier étage (*Idem*) . . . terrasse. .	$\frac{m\varphi}{4s}$	$= 0.08456$	$= \frac{1}{11.82}$
Moyenne	$\frac{m\varphi}{2s}$	$= 0.08301$	$= \frac{1}{12.04}$

Ces deux valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ sont assez peu distantes l'une de l'autre et de leur valeur moyenne pour que leur écart puisse être attribué aux erreurs des observations. On doit en conclure qu'au-delà du premier étage la densité de l'air décroissoit suivant une progression arithmétique, comme cela a lieu ordinairement. Mais au-dessous de cette hauteur la variation de la densité étoit beaucoup plus rapide; car en combinant, par exemple, les observations du premier étage avec celles qui ont été faites sur le chenal, on en tire $\frac{m\varphi}{4s} = 0.15202 = \frac{1}{6.5}$ plus forte que les précédentes. C'est donc aussi pour cela qu'au commencement des expériences, en se plaçant très-près de la surface de la mer, la réfraction étoit assez forte pour donner un *maximum* par en haut. D'après les rapprochemens que nous venons de faire il est évident que tous ces phénomènes résultent de ce que la température de la mer étoit plus basse que celle de l'air.

La vision par des secondes branches, lorsqu'on observe l'horizon apparent de la mer, étoit un phénomène

fort curieux à constater, nous avons cherché l'occasion de la répéter. Elle s'est présentée le lendemain même des observations précédentes ; car, suivant l'expérience que nous en fîmes, la température de la mer étoit encore plus froide que celle de l'air. Malheureusement le nombre de degrés indiqué par le thermomètre dans cette expérience ayant été perdu, nous pouvons seulement assurer que la différence étoit certainement dans le sens que nous indiquons ici. En conséquence nous nous transportâmes à diverses places sur la laisse de basse mer, et nous fîmes les observations suivantes :

Dépressions de l'horizon apparent de la mer, observées le 5 février 1809, la mer étant plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Dans le chenal, sur le sable. 4 observations . .	— 6″06	Mètres. 0.71	+ 1′37″5	Baromètre = 0.7513. Therm. bar. 12.0. Therm. Air + 8.6. Mer plus froide que l'air ; montante fortement.
Après cette observation il est tombé de la pluie. On a recommencé, une heure après, dans une autre place.				
Sur le sable.				Baromètre = 0.7509.
1re série. 6 observ.	— 11″34	0.66	1′ 34″8	Therm. bar. = + 10.9.
2e . . . 6 observ.	— 16.99	0.64	1 33.2	Therm. Air = + 8.5.

Toutes ces observations indiquent que la vision se faisoit par une seconde branche dont le *maximum* étoit

au-dessus du niveau de l'observateur. Quoique les observations du 4 février indiquassent clairement que l'effet étoit indépendant de la forme de la mer montante, on voulut encore en faire une nouvelle épreuve. On retourna donc le lendemain matin au bord de la mer, lorsqu'elle descendoit encore, et bien long-temps avant qu'elle commençât à monter on fit les observations suivantes.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 6 février 1809, la mer étant plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Sur le sable. 1re série. 8 observ.	+0′47″88	Mètres. 0.77	1′ 41″ 4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.2. Température de la mer près de la surface + 6.5.
2e . . . 8 observ.	0 27.11	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.2.
3e . . . 8 observ.	0 13.57	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air = + 8.7.
4e . . . 8 observ.	0 33.50	0.77	1 41.4	Baromètre = 0.7527. Therm. bar. = + 11.5. Therm. Air + 9.0.

L'horizon étoit parfaitement net, bien tranché et sans ondulations. Toutes les observations faites à la mer des-

cendante donnent des valeurs de $\frac{m\varphi}{4s}$ extrêmement fortes, car on trouve :

Première série. La mer.	$\frac{m\varphi}{4s}$	= 0.42731
Seconde série	$\frac{m\varphi}{4s}$	= 0.47700
Troisième série.	$\frac{m\varphi}{4s}$	= 0.49382
Quatrième série	$\frac{m\varphi}{4s}$	= 0.45912
Moyenne des quatre séries .	$\frac{m\varphi}{4s}$	= 0.46432

En remarquant les petites différences qui existent entre ces valeurs, il ne faut pas oublier qu'il suffit d'un rayon de soleil ou d'un coup de vent un peu plus chaud ou un peu plus froid pour changer considérablement la la valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$.

Toutes ces observations ayant été faites à la mer descendante, il est impossible d'attribuer la grande valeur de $\frac{m\varphi}{4s}$ à une autre cause qu'à ce que la température de la mer étoit plus froide que celle de l'air, ainsi que cela avoit eu lieu dans les jours précédens. Quant à la forme de la mer, les circonstances étoient les mêmes que dans les observations du 26 décembre 1808, qui avoient donné des dépressions si fortes. La place où nous observions étoit la même aussi ; mais dans les observations du 26 décembre la mer étoit plus chaude que l'air de plusieurs degrés.

Quelques jours après les observations précédentes le temps changea ; l'air devint plus froid que la mer, et nous

en profitâmes pour observer de grandes dépressions. La cause qui rendoit la dépression forte ou foible nous étoit si familière que nous pouvions facilement reconnoître les circonstances favorables à l'observation et prévoir le résultat que nous devions obtenir; il suffisoit pour cela de comparer le thermomètre plongé dans l'air avec le thermomètre plongé dans la mer.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 8 février 1809. Mer plus chaude que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètres.		Baromètre = 0.7604.
6 observations . .	8′ 50″4	13.66	7′ 7″3	Therm. bar. = + 3.0
6 observations . .	8 39.7	13.66	7 7.3	Therm. Air = + 1°.
Moyenne . .	8 45.1	13.66	7 7.3	Sur le bord de la mer. Barom. = 0.7620. Therm bar. = + 3°. Temp. de l'eau = + 4°. Mer basse, presque au *minimum*.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7603.
8 observations . .	2 1.0	0.75	1 40.1	Therm. bar. = ... Therm. Air à hauteur d'homme + 0.6. — Près du sable + 1.5. Horizon chargé de vagues et difficile à observer. Mer montante.
6 observations . .	1 42.0	0.75	1 40.1	Baromètre = 0.7603. Therm. bar. = ... Therm. Air à hauteur d'homme + 1°. — Près du sable + 1.6. Mer montante.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage, au retour.		Mètres.		Baromètre = 0.7595.
				Therm. bar. = + 3.8.
8 observations . .	7′ 7″4	12.01	6′ 40″7	Therm. Air = + 0.85.
8 observations . .	7 27.4	12.01	6 40.7	Tempér. de l'eau + 4°. Mer montante.
Moyenne . .	7 17.4	12.01	6 40.7	
Troisième étage.				Baromètre = 0.7584.
8 observations . .	8 48.7	18.295	8 14.5	Therm. bar. = + 4°.
8 observations . .	8 19.7	18.125	8 12.2	Therm. Air = + 1.35.
Moyenne . .	8 34.20	18.21	8 13.4	Mer fortement montante.

Dans toutes ces observations qui ont été faites à la mer montante, on remarque une dépression de l'horizon plus grande que la dépression vraie. Ce n'est donc point la forme de la mer montante qui occasionne les grandes élévations de l'horizon observées dans les jours précédens.

Ici la mer étoit plus chaude que l'air. C'est la cause de l'excès de la dépression observée. La température de la mer est restée sensiblement la même dans tout l'intervalle des observations; mais celle de l'air, qui étoit d'abord à — 0.5, s'est élevée graduellement jusqu'à + 1.4 avec la marche du jour. La dépression a donc dû diminuer, comme on le remarque dans les observations faites sur le rivage et au premier étage, avant et après le retour.

Si l'on calcule le coefficient de la réfraction par les dépressions précédentes, on trouvera que la réfraction négative s'élève à peu près jusqu'au premier étage, c'est-

à-dire à 10 ou 12 mètres, car en combinant les observations du premier avec celles du troisième, on trouve encore pour $\frac{m\varphi}{4s}$ une valeur fort petite, mais positive, qui est $0.058998 = \frac{1}{16.95}$. Au-dessous de cette hauteur $\frac{m\varphi}{4s}$ deviendroit négatif.

Quelques jours après les expériences précédentes le temps changea de nouveau; la mer redevint plus froide que l'air, et l'on en profita pour observer de très-petites dépressions de l'horizon apparent.

Dépressions apparentes de l'horizon de la mer, observées le 10 février 1809. Mer plus froide que l'air.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de *V*.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage.		Mètr.		Baromètre = 0.7483.
1re série. 8 observ.	4' 58"1	11.97	6' 39"8	Therm. bar. = + 10.2.
2e . . . 8 observ.	5 9.0	12.09	6 41.8	Therm. Air = + 9.8.
Moyenne . .	5 3.5	12.03	6 40.8	Température de l'eau + 5°5. Mer descendante.
Sur le sable.				Baromètre = 0.7497.
1re série. 8 observ.	— 1 17.94	0.77	+ 1 41.4	Therm. bar. = + 13.7.
2e . . . 8 observ.	— 1 19.99	0.77	1 41.4	Therm. Air = + 11.55
Moyenne . .	— 1 18.96	0.77	1 41.4	Mer déjà très-basse, mais descendant encore très-sensiblement. Horizon excellent, sans ondulations et sans vagues. Proximité de la pluie.

NOMBRE des OBSERVATIONS.	Dépression apparente observée.	Hauteur du cercle.	Dépression vraie ou valeur de V.	CIRCONSTANCES météorologiques.
Premier étage, au retour.		Mètr		Baromètre = 0.74810. Therm. bar. = + 12. Therm. Air = + 8.75. Mer presque au *minimum*; horizon superbe; observations faites entre des intervalles de pluie.
1re série. 8 observ.	+5′ 33″21	13.22	7′ 0″4	
2e . . . 8 observ.	5 36.86	13.22	7 0.4	
Moyenne . .	5 35.03	13.22	7 0.4	
Troisième étage.				Baromètre = 0.7471. Therm. bar. = + 10.9. Therm. Air = + 8.75. Mer sensiblement au *minimum*; bon horizon. Tempér. de l'eau dans le port + 4°6.
1re série. 8 observ.	7 5.7	20.38	8 41.9	
2e . . . 8 observ.	6 51.6	20.38	8 41.9	
Moyenne . .	6 58.6	20.38	8 41.9	
Sur la tour.				Baromètre = 7437. Therm. bar. = + 13°. Therm. Air = + 10.4. Mer déjà bien descendue.
1re série. 6 observ.	12 51.8	60.32	15 9.3	
2e . . . 8 observ.	12 58.8	60.32	15 9.3	
Moyenne . .	12 55.3	60.32	15 9.3	

On voit dans ces observations que la réfraction a toujours été positive et extraordinairement forte. Aussi la mer étoit-elle plus froide que l'air de plusieurs degrés. Si l'on calcule immédiatement les dépressions observées dans les stations les plus basses, on trouve

Premier étage. La mer . . . . $\frac{m\phi}{4s} = 0.20456$

Le sable . . . . $\frac{m\phi}{4s} => 0.5$

Premier étage, au retour. . . . . $\frac{m\phi}{4s} = 0.29863$

Ces réfractions sont extrêmement fortes. Maintenant

si l'on combine les observations consécutives on trouve

Premier étage et troisième . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.17067$

Troisième étage et tour. . . . . $\frac{m\varphi}{4s} = 0.12082$

La diminution du coefficient de la réfraction étoit donc encore sensible au-dessus du troisième étage, c'est-à-dire au-dessus de 12 mètres. Ainsi ce jour-là la trajectoire étoit toute concave vers la surface de la mer; mais sa courbure étoit beaucoup plus rapide dans les stations inférieures, à cause de l'influence de cette surface.

Dans les expériences que je viens de rapporter on voit que les rayons lumineux menés dans l'atmosphère sous des inclinaisons très-petites, éprouvent en s'approchant de la surface terrestre des perturbations considérables produites par l'influence de cette surface sur la température des couches inférieures de l'air. Cette influence s'affoiblissant avec la distance, devient ordinairement insensible à une petite hauteur au-dessus de laquelle la densité de l'air décroît régulièrement en progression arithmétique; ce qui donne aux rayons une courbure dirigée vers la surface terrestre. Mais, dans la partie inférieure, la trajectoire peut être plus ou moins concave ou convexe, selon la température du sol : elle peut ainsi éprouver dans son cours plusieurs inflexions successives; et, contre l'usage généralement reçu par les astronomes, il arrivera bien rarement que la courbure déterminée dans la partie supérieure soit encore applicable aux plus petites hauteurs.

De là résultent plusieurs conséquences utiles. La première concerne les marins. Lorsqu'ils prennent hauteur

en se servant de l'horizon de la mer, ils doivent souvent éprouver les effets de ces réfractions extraordinaires, et pour peu que la mer soit plus froide ou plus chaude que l'air, ils peuvent aisément avoir sur leur latitude des erreurs de 3 ou 4 minutes. Par les mêmes causes la latitude observée à bord d'un canot pourra différer très-sensiblement de la latitude observée sur le pont d'un bâtiment élevé. Cela est arrivé plusieurs fois à la Nouvelle-Hollande, dans l'expédition du capitaine Baudin, sans que l'on pût se rendre raison d'une pareille discordance, et malgré tous les soins que l'on prenoit pour l'éviter. M. Wollaston a proposé un moyen d'y remédier en observant la distance des deux horizons opposés, ce qui détermine en effet la réfraction au moment où l'on observe; mais on n'a pas toujours la possibilité de faire cette observation, principalement dans les attérages où cependant la nécessité d'une latitude exacte est la plus grande. Dans tous les cas, il suffit d'observer la température de l'air et celle de la mer, pour savoir dans quel sens doit se trouver l'erreur que l'on peut avoir à redouter. Mais lorsqu'on est à terre il existe un moyen constant et toujours applicable pour les éviter, c'est d'observer avec un horizon artificiel placé à 3 ou 4 mètres de hauteur; car l'effet du décroissement extraordinaire des densités étant déjà fort affoibli à cette élévation, et le plus souvent insensible, le rayon visuel n'a plus à parcourir que des couches soumises à la loi ordinaire des réfractions.

On sent également que les mêmes causes doivent altérer les hauteurs des stations calculées d'après la dé-

pression apparente de l'horizon de la mer ; car si la mer est plus chaude que l'air, auquel cas la partie inférieure de la trajectoire sera concave vers la surface terrestre, la dépression observée sera plus grande que dans l'état ordinaire de l'atmosphère. Par conséquent la hauteur calculée d'après la réfraction moyenne sera trop forte ; ce sera le contraire si la mer est plus froide que l'air. Pour mettre ceci en évidence nous avons calculé ainsi les hauteurs des stations où nous avons observé à Dunkerque, en employant pour le coefficient de la réfraction terrestre la valeur moyenne 0.08 donnée par M. Delambre dans le second volume de la *Méridienne*. Voici le tableau de ces résultats :

26 *décembre* 1808. *Mer plus chaude que l'air.*

STATIONS.	DÉPRESSION apparente observée.	HAUTEUR calculée.	HAUTEUR mesurée.
		Mètres.	Mètres.
Sur le sable	4′ 54″7	7.69	0.61
Sur l'estacade	7 5.3	15.99	7.47
Premier étage	8 3.4	20.65	13.45
Troisième étage	9 8.2	26.56	20.45
16 *janvier* 1809. *Mer plus chaude que l'air.*			
Sur le sable.	1 54.2	1.15	0.73
Premier étage	7 22.0	17.23	9.26
Troisième étage	8 58.5	25.63	16.37
Terrasse.	9 42.3	29.97	21.07
Sur la tour	14 30.0	66.90	62.35

Toutes ces observations donnent des hauteurs beaucoup trop fortes; en voici d'autres qui ont été faites lorsque la mer étoit plus froide que l'air. Elles donnent des hauteurs beaucoup trop foibles.

4 *février* 1809. *Mer plus froide que l'air.*

STATIONS.	DÉPRESSION apparente observée.	HAUTEUR calculée.	HAUTEUR mesurée.
		Mètres.	Mètres.
Sur le sable	0' 26"9	0·06	0·77
Sur le port	1 38·6	0·69	2·72
Premier étage	4 22·5	6·09	9·09
Troisième étage	6 25·8	13·15	16·23
Terrasse.	7 27·8	17·72	20·95
10 *février* 1809. *Mer plus froide que l'air.*			
Premier étage	5 3·5	8·14	12·03
Troisième étage	6 58·6	15·49	20·38
La tour	12 55·3	53·13	60·32

La différence entre les hauteurs mesurées et calculées varie avec l'élévation de la station au-dessus du niveau de la mer. Pour bien connoître la cause de cette variation reprenons la formule

$$2\ s = m\varphi + (tang^2.\ I' - tang^2.\ I).\ cos^2.\ I$$

Supposons que la station inférieure I réponde à la limite où commence la réfraction extraordinaire, en sorte que

dans toutes les couches supérieures la densité décroisse en progression arithmétique. Soit $s_{,}$ la hauteur de cette station inférieure au-dessus du niveau de la mer, I étant la dépression en ce point, on aura

$$2\,s' = m_{,}\varphi_{,} + tang^{2}.\,I$$

Cette équation ajoutée à la précédente donne

$$2\,(s + s_{,}) = m\varphi + m_{,}\varphi_{,} + tang^{2}.\,I'.\,cos^{2}.\,I + tang^{2}.\,I.\,sin^{2}.\,I$$

Les produits $tang^{2}.\,I'.\,sin^{2}.\,I$ et $tang^{2}.\,I.\,sin^{2}.\,I$ peuvent être négligés sans aucune erreur sensible dans les petites hauteurs où s'arrête ordinairement la densité extraordinaire. De plus, en nommant q le coefficient de la réfraction terrestre entre les deux stations, et $q_{,}$ la quantité analogue, depuis la station inférieure jusqu'au niveau de la mer, on a

$$m\varphi = 4\,sq;\quad m_{,}\varphi_{,} = 4\,s_{,}q_{,}$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$2\,(s + s_{,}) = 4\,sq + 4\,s_{,}q_{,} + tang^{2}.\,I'$$

d'où l'on tire

$$s + s_{,} = \frac{\frac{1}{2}\,tang^{2}.\,I'}{1 - 2\,q} - \frac{2\,(q - q_{,})\,s_{,}}{1 - 2\,q}$$

$s + s_{,}$ est la hauteur de la station supérieure au-dessus du niveau de la mer. Le premier terme $\frac{\frac{1}{2}\,tang^{2}.\,I'}{1 - 2\,q}$ donne la hauteur telle qu'on la trouveroit en la calculant im-

médiatement d'après la dépression observée, et telle qu'elle seroit en effet si le décroissement en progression arithmétique s'étendoit jusqu'au niveau de la mer. Le second terme en $s_{,}$ donne la correction qu'il faut faire à ce premier calcul, à cause du décroissement extraordinaire des densités qui a lieu jusqu'à la hauteur $s_{,}$. On voit que, pour un même état de l'air, la correction est constante à toutes les hauteurs, et l'on peut aisément vérifier ce résultat sur les dépressions que nous avons rapportées. Par exemple, le 16 janvier l'erreur du premier terme est constamment égale à 12.38 mètres, soit qu'on la calcule sur la tour, la terrasse ou le troisième étage de la maison. Mais pour obtenir cette constante il faut employer dans le calcul la véritable valeur de q telle que les observations la donnent pour le jour où l'on observe; sans cela les erreurs du premier terme, qui sont variables avec la hauteur, masquent la variabilité du second. C'est ce qui est arrivé dans les hauteurs calculées précédemment, en prenant pour q la valeur moyenne 0.08 qui est donnée par M. Delambre. Par exemple, dans les observations du 16 janvier on avoit réellement $q = 0.118214$. Le dénominateur $1 - 2q$ étoit donc réellement 0.763572 au lieu de 992 que nous avons supposé. L'emploi de cette valeur, en affoiblissant le premier terme, diminuoit son erreur propre, et d'autant plus que I' étoit plus considérable. C'est pourquoi les hauteurs ainsi calculées s'écartent de moins en moins des véritables à mesure que l'on s'élève depuis le bord de la mer jusqu'à la tour. Un peu au-dessus de cette

dernière le calcul auroit été d'accord avec l'observation, mais en s'élevant davantage, l'erreur produite par le coefficient q l'auroit emporté sur la correction du second terme; et les hauteurs seroient devenues trop foibles, de trop fortes qu'elles paroissoient précédemment.

La cause que nous venons d'indiquer ici a dû nécessairement agir avec une intensité plus ou moins grande dans les nombreuses observations de la mer que MM. Méchain et Delambre ont consignées dans le IIe volume de la Méridienne; mais le défaut d'observations thermométriques aux deux extrémités de la colonne d'air ne permet pas de tirer parti de ces observations. On peut néanmoins, dans certains cas extrêmes, montrer évidemment la source des erreurs qu'elles comportent. Ainsi l'observation de dépression faite à Montalet devoit nécessairement donner une trop forte hauteur, et c'est ce qui est arrivé.

On doit encore attribuer à l'inégalité des températures et à la rapidité de leur décroissement, un phénomène observé par Cook, dans l'hémisphère austral, le 30 janvier 1774. « On découvrit le matin une île de glace » qui s'étendoit à l'est et à l'ouest, à une telle distance » qu'on n'en voyoit pas les limites du haut des mâts. » De loin cette île paroissoit très-haute et semblable » à une masse solide, avec des parties montueuses très- » élevées, dans l'intérieur. Mais quand on s'en fut » approché, on trouva que le bord, qui auparavant » paroissoit à pic et formé d'une seule masse, dépassoit » à peine le niveau de la mer, et étoit formé de petits » morceaux de glace, parmi lesquels il s'en trouvoit

» d'autres un peu plus considérables. On apercevoit en-
» core des parties montueuses plus loin dans l'intérieur,
» mais c'étoit probablement aussi une illusion causée par
» la grande force réfringente de l'atmosphère près de
» l'horizon dans ces froides contrées ». Cette conjecture me paroît très-vraisemblable, car suivant le journal tenu à bord de la *Résolution*, le thermomètre dans l'air étoit ce matin-là précisément à la température de la glace fondante. Il est donc bien probable que la surface de la glace avoit une température plus basse que celle de l'air, alors les parties de cette surface les plus éloignées du bâtiment ont pu devenir visibles par de secondes branches qui avoient leur *maximum* au-dessus du niveau de l'observateur, et cet effet qui n'avoit lieu que sur la glace, devoit élever en apparence son bord au-dessus du niveau de la mer. C'est ainsi que dans des cas semblables nous avons vu à Dunkerque l'horizon apparent de la mer au-dessus du plan horizontal mené par notre œil. Dans l'observation de Cook l'horizon apparent étoit terminé par des rayons venus de la surface de la glace, et c'étoit sans doute par cette élévation extraordinaire des trajectoires que le plateau de glace sembloit se prolonger au-delà des limites de l'horizon. Quant aux parties montueuses, elles pouvoient être produites en parties par des élévations réelles, ou par des portions d'îles de glaces plus éloignées que la première et qui devenoient visibles au-dessus d'elles par des trajectoires plus élevées.

C'est sans doute par une cause tout-à-fait semblable que, dans l'opération de la méridienne en France, le

clocher de Sauti, placé au milieu des bois, se voyoit de très-loin et indiquoit toujours une forte réfraction. Les observations se faisoient dans l'été, et la fraîcheur des bois refroidissant les couches d'air situées au-dessus de leur surface devoient produire absolument le même effet que l'île de glace dans l'observation de Cook.

Le 31 décembre 1773, Cook avoit observé dans les mêmes parages un phénomène analogue, « tandis qu'on » prenoit la hauteur méridienne du soleil une averse de » neige vint de l'est et passa devant le vaisseau. En même » temps une grande île de glace qui se trouvoit bien en » deçà de l'horizon visible et directement sous le soleil, » fut entièrement cachée par cet horizon qui pourtant » paroissoit tout aussi distinct qu'il a coutume de l'être » dans des temps nébuleux. Quand l'averse fut passée » on revit l'île de glace en deçà de l'horizon comme aupa- » ravant. Le thermomètre de l'air marquoit + 1.7 de la » division centésimale ». Il est extrêmement probable que la neige venant des régions supérieures de l'atmosphère, avoit une température beaucoup plus froide, et l'abaissement subit que sa chute produisoit dans les couches d'air inférieures situées entre le vaisseau et l'île, peut avoir été la cause d'une réfraction extraordinaire qui aura rendu visibles par en haut et par une seconde branche, des points de la surface de la mer situés en avant de l'île de glace. Ce qui confirme cette conjecture, c'est qu'après l'averse, le disque du soleil ne se trouva plus en contact avec l'horizon apparent, et encore moins avec le sommet de l'île de glace, dans la lunette du

sextant avec lequel on prenoit hauteur. Il fallut abaisser ce disque d'une quantité égale à son diamètre, c'est-à-dire de 32′ pour le faire toucher au sommet de l'île, qui devoit être encore plus bas que l'horizon extraordinaire. Par conséquent cet horizon en se formant s'étoit élevé tout à coup de plus de 32′ au-dessus du véritable, et comme la dépression ordinaire à bord de la *Résolution* n'étoit que de 4′.2″, il n'est pas douteux que l'horizon extraordinaire s'élevoit au-dessus du plan horizontal des observateurs, d'où il suit qu'il étoit vu par des secondes branches de trajectoire qui avoient un *maximum* au-dessus de ce même plan.

En général, Cook remarque qu'il a eu souvent, dans ces hautes latitudes, l'occasion d'observer l'effet des réfractions extraordinaires en prenant des hauteurs au-dessus de l'horizon de la mer avec le sextant de Halley. Il attribue à cette cause, et aux variations arrivées des réfractions terrestres, la différence qu'il a constamment trouvée entre les longitudes observées le matin et le soir. Des écarts semblables se sont présentés dans la dernière expédition du capitaine Baudin à la Nouvelle Hollande, et sans doute elles étoient dues aux variations subites et multipliées de la température dans ces parages. Si maintenant nous venons à donner aux rayons lumineux une marche serpentante, ce qui peut avoir lieu dans l'atmosphère, comme nous l'avons précédemment prouvé par le raisonnement et par des expériences, nous verrons naître de ces inflexions une foule de phénomènes d'optique aussi curieux que variés. Pour nous borner ici à un

cas très-simple, concevons deux états opposés de l'air, tels que dans les couches inférieures la trajectoire soit convexe vers la mer tandis qu'à une certaine hauteur elle devient concave, ce dont nous avons déjà rapporté plusieurs exemples. Supposons de plus que cette seconde réfraction, qui se fait dans le sens ordinaire, soit assez forte pour donner aux trajectoires un *maximum* par en haut, ce dont nous avons également reconnu la possibilité; alors il arrivera que des objets naturellement cachés par la rondeur de la terre, et même invisibles dans les cas les plus forts de la réfraction ordinaire, pourront être aperçus au moyen de ces courbes serpentantes, comme le représente la *fig.* 23, où O est l'observateur et M l'objet. Il arrivera même qu'étant vus de cette manière ils paroîtront très-élevés au-dessus de l'horizon de l'observateur et par conséquent très-rapprochés de lui; car si, par le point M par exemple, on mène une circonférence de cercle MM' concentrique à la terre, et terminée à la dernière branche de la trajectoire, l'objet M sera comme s'il étoit rapproché à la distance AD' en conservant toujours sa même hauteur. On a beaucoup d'exemples de ces élévations extraordinaires des objets lointains, et l'on en trouve même un fort remarquable dans les *Transactions philosophiques* pour 1798. Du bord de la mer à Hastings on voyoit distinctement la côte de France à la distance de 30 ou 40 milles, et du haut d'une colline on voyoit jusqu'à Dieppe les bateaux de pêcheurs français. Je ne donne ici la double réflexion des rayons que comme un moyen de produire ces apparitions extraordi-

naires; mais elles pourroient l'être encore de beaucoup d'autres manières, et même par un simple accroissement de la réfraction ordinaire dans les petites inclinaisons, en supposant l'air plus chaud que la mer, seulement de quelques degrés, comme le prouvent les expériences que j'ai rapportées plus haut. Cela conviendroit particulièrement à l'observation rapportée dans les *Transactions philosophiques;* car l'observateur, M. Latham, remarque que le jour avoit été extraordinairement chaud et parfaitement calme. Malheureusement il ne rapporte pas les températures de l'eau et de l'air qui suffiroient pour décider la question.

Si ces réfractions extraordinaires, produites par les inflexions des trajectoires, agissoient aussi latéralement dans le sens horizontal, leur influence jeteroit des incertitudes continuelles sur les opérations géodésiques. Heureusement nous avons eu l'occasion de nous assurer que cette influence est absolument nulle, du moins par les temps calmes; car les angles de position entre les objets, observés par Arago et moi, dans les cas les plus marqués de la réfraction extraordinaire, ne diffèrent pas du tout de ceux que nous avons trouvés entre les mêmes objets dans d'autres circonstances où l'atmosphère étoit assujettie aux lois ordinaires d'équilibre. La différence n'a pas été d'une seconde, même dans le cas des images multiples observées au Desierto par Arago et moi, et depuis par lui seul à Cullera. Mais je suis très-porté à croire qu'il peut se produire des réfractions latérales quand l'atmosphère est violemment agitée; car M. Delambre rapporte qu'il a vu

une fois un signal passer d'un côté à l'autre du fil vertical de sa lunette et se tenir quelques instans dans cette position. Dans l'été lorsque l'on observe des objets éloignés terminés par des lignes droites verticales, par exemple, des maisons ou des clochers, on voit fréquemment ces lignes éprouver des ondulations qui les font serpenter autour du fil de la lunette; et nous avons vu, Arago et moi, un cas très-frappant à l'île de Formentera, et observant une chapelle située dans l'île d'Yviza. Or, que sont ces ondulations, sinon des réfractions latérales produites par l'agitation de l'air? Ainsi dans les opérations géodésiques très-exactes, il sera toujours utile d'éviter même le soupçon d'une pareille influence; et l'on y parviendra en choisissant pour stations des montagnes élevées, et assez peu distantes pour que les rayons visuels menés de l'une à l'autre restent toujours fort au-dessus du niveau des plaines qui les séparent. Nous avons eu cet avantage dans nos opérations d'Espagne, car même dans les côtés de notre grand triangle la corde de l'arc terrestre passoit à plusieurs centaines de mètres au-dessus du niveau de la mer. Et si cette élévation ne nous a pas empêché d'avoir des réfractions extraordinaires, du moins nous sommes assurés par là qu'elles ne sont pas dues à l'influence du sol, mais à un état particulier de superposition des couches d'air; état qui ne pouvant constituer un équilibre stable, et devant ainsi céder à la cause de mouvement la plus légère, ne peut absolument exister que dans un calme parfait de l'atmosphère, et par conséquent dans des cas où les réfractions latérales ne sont nulle-

ment à craindre. Mais il n'en a pas été de même dans la partie de la méridienne qui traverse la France : on a été souvent obligé d'y prendre pour stations des clochers, des tours ou des collines peu élevées. Alors les rayons visuels, menés d'une station à l'autre, ont fréquemment rasé la surface du sol, dans les grands froids de l'hiver et dans les grandes chaleurs de l'été. C'est-là sans doute la cause qui produit des variations si excessives dans les coëfficiens de la réfraction terrestre que Delambre a calculés d'après ces observations. Au lieu que ces variations auroient été beaucoup moins sensibles si les rayons visuels eussent échappé à l'influence du sol. D'après ces remarques, il me semble que l'on ne peut attribuer qu'une foible confiance au nivellement de l'Océan et de la Méditerranée, conclu de toutes les mesures de distances réciproques faites sur l'arc qui va de Montjouy à Dunkerque. Car on ne sauroit, dans cette circonstance, compter sur une compensation mutuelle des erreurs, puisque cette compensation n'est favorable à l'exactitude que dans les résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et non pas dans la somme des observations mêmes, qui comporte toujours une erreur du même ordre au moins que celles qui affectent en particulier chaque observation.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la marche individuelle de chaque trajectoire, et les inflexions diverses dont elle est susceptible. Il faut maintenant passer à l'examen de leurs intersections successives afin d'en déduire la forme des caustiques et le nombre des images qui peuvent en résulter.

Sous ce rapport nous avons peu de chose à ajouter aux considérations que nous avons exposées précédemment en traitant des couches planes. La courbure de la terre ne fait qu'ajouter un terme à celui qui dépend de la différence des températures, et ce terme très-foible par lui-même, n'a plus d'effet sensible dès que la différence des températures est un peu considérable. D'où l'on peut conclure que dans le très-grand nombre des cas il n'influera point sur la forme générale des caustiques, mais seulement sur les détails particuliers à chaque loi de décroissement, détails que nous ne saurions déterminer ici, puisqu'ils sont aussi variés que ces lois elles-mêmes.

D'après les principes établis dans le IVe volume de la *Mécanique céleste*, pour le cas des couches sphériques, si l'on nomme (ϱ) la densité de l'air au point où est situé l'observateur, θ la distance au zénith observée en ce même point, ϱ la densité de l'air au point où l'objet se trouve sur une première branche des trajectoires et au-dessus du niveau de l'observateur; si, de plus, on nomme a et r les rayons menés du centre de la terre à l'observateur et à l'objet, l'équation générale d'une première branche des trajectoires sera

$$dv = \frac{\frac{a.\,dr}{r^2}.\ \sin.\ \theta.\ \sqrt{1 + \frac{4K}{n^2}.\,(\varrho)}}{\sqrt{1 + \frac{4K}{n^2}.\,\varrho - \left[1 + \frac{4K}{n^2}.\,(\varrho)\right]\frac{a^2}{r^2}.\ \sin^2.\ \theta}}$$

Soit, comme précédemment,

$$\frac{\frac{4K}{n^2}.(\varrho)}{1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)} = m; \quad \frac{(\varrho)-\varrho}{(\varrho)} = \varphi(s); \quad \frac{a}{r} = 1 - s$$

nous aurons, en ne négligeant point s^2,

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - m\varphi + (2s - s^2).\ sin^2.\ \theta}}$$

Ceci suppose l'objet plus élevé que l'observateur ou vu par en haut. Si, au contraire, il étoit vu par en bas, quoique toujours par une première branche, comme cela a lieu quand la mer est plus chaude que l'air, il faudroit supposer que le rayon r décroît lorsque v augmente; ce qui donneroit le signe négatif au second membre de l'équation différentielle, et l'on auroit alors

$$dv = -\frac{\frac{a.\ dr}{r^2}.\ sin.\ \theta.\ \sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)}}{\sqrt{1+\frac{4K}{n^2}.\varrho - \left[1+\frac{4K}{n^2}.(\varrho)\right]\frac{a^2}{r^2}.\ sin^2.\ \theta}}$$

mais comme il faudroit aussi faire $\frac{a}{r} = 1 + s$, il s'ensuit que l'on auroit

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - m\varphi - (2s + s^2).\ sin^2.\ \theta}}$$

Alors, pour que les angles θ ne deviennent pas obtus, il faut les compter depuis le pied de la verticale, en sorte qu'ils soient le complément de la dépression.

Il arrivera souvent que le terme $m\varphi$, qui dépend de l'inégalité des températures, sera très-considérable relativement au terme $(2s + s^2).\ sin^2.\ \theta$, qui dépend de a courbure de la terre. Alors, si l'on se borne à con-

sidérer des points de la trajectoire très-peu élevés au-dessus les uns des autres, on pourra négliger ce second terme par rapport au premier, et l'on aura simplement

$$dv = \frac{ds. \sin. \theta}{\sqrt{\cos^2. \theta - m\varphi}}$$

Si l'on fait $adv = dx$, $ads = dz$, x et z pourront être considérés comme des coordonnées rectilignes, l'une horizontale, l'autre verticale, et l'équation sera la même que dans le cas des couches planes.

En général lorsqu'on se borne à des valeurs de s fort petites, chaque loi de densité qui donne au terme $m\varphi$ une certaine valeur dans le cas des couches sphériques, produit absolument le même effet que si l'on construisoit les trajectoires avec un décroissement de densité exprimé par $m\varphi - (2\,s + s^2)$, en supposant les couches planes, et qu'on appliquât ensuite l'axe des abscisses ar sur la circonférence d'un grand cercle de la surface terrestre; d'où l'on voit que si la courbure de la terre change quelque chose aux détails des phénomènes relatifs à chaque loi particulière de décroissement, elle ne détruit point les considérations générales que nous avons exposées relativement à toutes les lois possibles touchant la formation des caustiques et la manière dont les images multiples des objets peuvent être donnés par les secondes branches des trajectoires, ou peuvent devenir invisibles par leur situation sous la caustique qui limite l'espace où l'on peut les apercevoir.

Cependant l'effet de cette courbure produit ici une

modification générale qui n'avoit pas lieu dans le cas des couches planes. Alors deux trajectoires infiniment voisines, menées par l'œil de l'observateur, se coupoient nécessairement une autre fois dans leurs secondes branches, quelle que fût la loi des densités, pourvu qu'elle fût toujours décroissante et indéfinie. Mais ici, à cause de l'opposition des termes $m\varphi$ et $2\, s.\, sin^2.\, \theta$, lorsque la densité décroît à mesure qu'on s'élève, il peut arriver, si celui-ci l'emporte, que les trajectoires divergent au lieu de converger, la courbure de la terre ayant plus d'influence pour les écarter les unes des autres que la différence des températures n'en a pour les rapprocher. Alors il ne peut plus se former de caustiques ni d'images multiples. Cela a lieu ainsi communément dans l'état stable de l'atmosphère, comme on va le voir.

Dans ce cas les densités à de petites hauteurs décroissent sensiblement en progression arithmétique. Supposons donc en général

$$m.\left[\frac{(\rho)-\rho}{(\rho)}\right]=4\,\beta.\,s$$

les s étant considérées comme positives au-dessus de l'observateur. Quand les hauteurs seront très-petites, s représentera l'élévation des points de la trajectoire audessus du niveau de l'observateur, et la quantité constante β sera le coefficient de la réfraction terrestre. Cette loi s'accordera donc avec l'état stable de l'atmosphère près de la surface de la terre où les phénomènes nous

intéressent principalement. Substituant les valeurs précédentes dans l'équation différentielle, elle devient

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2\ s.\ (2\ \beta - sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}$$

et elle a pour intégrale

$$tang.\ (V - v) = sin.\ \theta.\ \frac{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2\,s.\ (2\ \beta - sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}{s.\ sin^2.\ \theta + (2\ \beta - sin^2.\ \theta)}$$

V étant une constante. Comme il faut que s et V commencent ensemble, il faut qu'ils deviennent tous deux nuls en même temps; ce qui donne

$$tang.\ V = \frac{sin.\ \theta.\ cos.\ \theta}{2\ \beta - sin^2.\ \theta}$$

Si l'on fait

$$C = \frac{2\ \beta - sin^2.\ \theta}{cos.\ V.\ sin^2.\ \theta} \quad \text{et} \quad s = s' + C\,(1 - cos.\ V)$$

l'équation de la trajectoire devient

$$tang.\ (V - v) = \frac{\sqrt{-2\ s'C - s'^2}}{s' + C}$$

Maintenant en la résolvant par rapport à s', et mettant pour s' sa valeur en r, elle donne

$$r = \frac{a}{1 + C.\ cos.\ V - C.\ cos.\ (V - v)}$$

L'orbite décrite par la molécule lumineuse est donc une section conique dont le centre de la terre occupe un des foyers. En nommant A le demi-grand axe de

cette section conique, e le rapport de son excentricité au demi-grand axe, on trouve

$$A = \frac{2\,\beta a}{4\,\beta - 1};\quad e = \frac{\sqrt{(2\,\beta - \sin^2.\,\theta)^2 + \sin^2.\,\theta.\,\cos^2.\,\theta}}{2\,\beta}$$

Ainsi, dans chaque loi de réfraction, le grand axe de toutes les trajectoires est le même; mais l'excentricité est variable avec la distance au zénith. Les trajectoires sont des ellipses lorsque $4\,\beta$ est plus grand que 1, ce sont des paraboles lorsque $4\,\beta = 1$, et des hyperboles lorsque $4\,\beta$ est moindre que 1. Dans ce dernier cas le centre de la terre est le foyer intérieur de la branche hyperbolique.

La simplicité du résultat auquel nous venons de parvenir étoit facile à prévoir, d'après la loi de densité que nous avons choisie. En effet il est visible qu'elle donne

$$-\frac{m}{(\varrho)}.\,\frac{d\varphi}{dr} = \frac{4\,\beta}{r^2}$$

La force attractive $\frac{d\varphi}{dr}$ qui sollicite la molécule lumineuse dans chaque point de la trajectoire, étant réciproque au carré de la distance, le mouvement de cette molécule est le même que celui des corps célestes autour du soleil. L'égalité des grands axes tient à ce que toutes les molécules lumineuses arrivent à l'œil de l'observateur avec la même vitesse parce qu'elles se trouvent alors dans la même couche d'air.

Considérons en particulier la trajectoire correspon-

dante à $\theta = 90°$; c'est elle qui donne la réfraction horizontale. Cette supposition donne $V = 0$, et ensuite

$$r = \frac{a}{2\beta - (2\beta - 1).\cos.v}$$

$v = 0$ donne $r = a$, comme cela devoit être, puisque la trajectoire passe par l'œil de l'observateur; mais $v = 180°$ donne $r = \frac{a}{4\beta - 1}$. Cette valeur est plus petite ou plus grande que a, selon que 2β est plus grand ou plus petit que 1. Dans le premier cas la trajectoire a son apogée à l'observateur; dans le second, elle a son périgée en ce point. Si $2\beta = 1$, les deux rayons sont égaux, et la trajectoire est un cercle concentrique à la terre.

Jusqu'ici nous avons considéré le cours entier des trajectoires dans toute l'étendue que leur donne la formule mathématique. Mais, pour appliquer ces résultats à la nature, même dans la loi de décroissement que nous avons considérée, il faut arrêter la trajectoire à la distance de la terre où la densité de l'atmosphère devient nulle; et à partir de ce point il faut la considérer comme une ligne droite indéfinie, prolongée suivant la direction de la dernière tangente. Ceci est analogue à ce que nous avons remarqué relativement aux couches planes, lorsque nous avons déterminé dans ces couches la limite de la réflexion. Or, puisque la loi des densités que nous avons supposée, est

$$m.\left[\frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}\right] = 4\beta s$$

Lorsque la densité ϱ devient nulle, c'est-à-dire à la sortie de la trajectoire, on a $s = \frac{m}{4\beta}$ ou $r = \frac{a}{1 - \frac{m}{4\beta}}$; et comme l'expression générale du rayon vecteur des trajectoires est

$$r = \frac{a}{1 + C.\ cos.\ V - C.\ cos.\ (V - v)}$$

il s'ensuit que la trajectoire lumineuse, considérée à partir de l'œil de l'observateur, sortira de l'atmosphère quand on aura

$$cos.\ (V - v) = cos.\ V + \frac{m}{4\beta.\ C}$$

Considérons en particulier la trajectoire qui donne la réfraction horizontale. Pour cette trajectoire, la distance apparente au zénith $\theta = 90°$; $V = 0$ et $C = 2\beta - 1$; par conséquent au point de sortie on aura

$$cos.\ v = 1 + \frac{m}{4\beta.\ (2\beta - 1)}$$

On voit d'abord que si 2β est plus grand que 1, v sera imaginaire, et par conséquent la trajectoire ne sortira point de l'atmosphère. Cela doit être, puisque dans ce cas elle a son apogée à l'observateur; de sorte que dans tous les autres points elle s'approche du centre au lieu de s'en éloigner. Si $2\beta = 1$, v est encore imaginaire; et en effet la trajectoire est un cercle. Mais lorsque 2β commence à être moindre que 1, les valeurs de v ne commencent pas encore à être réelles,

puisque *cos.* v passant par l'infini quand $2\,\beta = 1$, commence par prendre des valeurs négatives très-grandes. La réalité de v ne commence donc qu'au-dessous d'une certaine limite de β qui est donnée par l'équation

$$\beta.\,(2\,\beta - 1) = -\frac{m}{8}$$

Ce qui répond à $v = 180°$. Alors l'apogée de la trajectoire horizontale est situé à la limite même de l'atmosphère.

L'une des deux valeurs de β est

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - m}}{4} \text{ et elle donne } r = \frac{a}{\sqrt{1 - m}}$$

L'autre est inadmissible, parce qu'elle donneroit r négative. En général, pour que le rayon vecteur, au point de sortie, fasse un angle v avec la verticale de l'observateur, il faut qu'on ait

$$\beta = \tfrac{1}{4}.\left(1 + \sqrt{1 - \frac{m}{sin^2.\,\frac{1}{2}\,v}}\right)$$

On voit donc qu'en donnant au coefficient β des valeurs convenables, la trajectoire horizontale peut sortir de l'atmosphère sous tel angle que l'on voudra, depuis $v = 180°$ jusqu'à l'angle déterminé par l'équation $sin.\,\frac{1}{2}\,v = \sqrt{m}$. Par conséquent la réfraction horizontale, au lieu de rester toujours très-petite, peut devenir très-considérable; il peut même se faire que la molécule lumineuse, ne sortant jamais de l'atmosphère, devienne un satellite de la terre. On sent que ces résultats ne sont pas bornés à la trajectoire horizontale, mais qu'ils peuvent avoir lieu également pour d'autres distances au zénith sous

certains limites. Lorsqu'on veut les borner à des distances au zénith très-peu différentes de 90°, et faire décrire aux trajectoires des ellipses très-peu différentes du cercle, ces trajectoires ne traverseront que des couches très-peu distantes les unes des autres. Alors les valeurs de *s* peuvent être considérées comme exprimant des différences de niveau ; et la loi des densités qui fait circuler la lumière, n'est que la loi ordinaire de décroissement rendue seulement un peu plus rapide.

N'est-ce pas à des inflexions de ce genre qu'il faut rapporter la durée extraordinaire du crépuscule, observée par Saussure sur le col du Géant où ce phénomène étoit visible pendant toute la nuit, quoique le soleil descendît à plus de 45 degrés au-dessous de l'horizon. Car, pour appliquer à ce cas l'explication ordinaire du crépuscule, il faudroit supposer qu'à plus de cent vingt lieues de hauteur au-dessus de la surface de la terre, l'atmosphère est encore assez dense pour réfléchir une lumière sensible, et qu'il le seroit encore après avoir traversé les couches inférieures, pour arriver jusqu'à nos yeux, deux circonstances qu'il est bien difficile d'admettre. Et cela ne serviroit encore de rien pour expliquer cette lueur pâle, mais distincte, observée aussi par Saussure tout autour de l'horizon, dans les mêmes circonstances; phénomène que M. de Humboldt a revu et remarqué pendant son séjour sur le volcan d'Antisana. Au lieu que ces résultats se conçoivent facilement si on les attribue à l'inflexion et en quelque sorte à la circulation de la lumière autour de la terre, sinon en vertu du dé-

croissement de densité que nous avons supposé, du moins en vertu de quelque autre loi qui pourroit exister dans les hautes couches de l'atmosphère dont la température est peu variable, et qui seroit également capable de faire circuler la lumière; ce qui peut arriver d'une infinité de façons différentes. Enfin, des considérations du même genre ne peuvent-elles pas avoir rendu possible la fameuse observation des Hollandais à la Nouvelle-Zemble, observation qui n'a jamais été ni expliquée ni refutée d'une manière satisfaisante, mais qui, d'après la théorie précédente, n'a aucune difficulté.

Cherchons maintenant à déterminer la forme de la caustique produite par les intersections successives de toutes les trajectoires. Reprenons la formule

$$r = \frac{a}{1 + C.\ \cos.\ V + C.\ \cos.\ (v - V)}$$

qui, en faisant $v = 2u$, peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{a}{1 + 2\ C.\ \sin.\ u.\ \sin.\ (u - V)}$$

ou, en substituant pour C sa valeur $\frac{1}{\sin.\ V.\ \tang.\ \theta}$,

$$r = \frac{a}{1 + 2\ \sin.\ u\ \frac{\sin.\ (u - V)}{\sin.\ V.\ \tang.\ \theta}}$$

Pour exprimer la condition des intersections consécutives, il faut différencier cette équation en faisant varier θ seul, u et v restant les mêmes; ce qui donne

$$\frac{d.\left[\frac{\sin.\ (u - V)}{\sin.\ V.\ \tang.\ \theta}\right]}{d\theta} = 0$$

ou, en développant et prenant la valeur de *tang. u*,

$$tang.\, u = \frac{tang^2.\, V}{\frac{dV}{d\theta}.\, \frac{sin.\, \theta.\, cos.\, \theta}{cos^2.\, V} + tang.\, V}$$

d'où l'on tire enfin, en mettant pour V sa valeur,

$$tang. \left(\frac{v}{2}\right) = \frac{tang.\, \theta}{4\,\beta}$$

Cette équation fait connoître l'arc v après lequel se coupent deux trajectoires consécutives menées sous l'angle θ. En y joignant les suivantes :

$$r = \frac{a}{1 + 2\, C.\, sin. \left(\frac{v}{2}\right).\, sin. \left(\frac{v}{2} - V\right)}$$

$$tang.\, V = \frac{sin.\, \theta.\, cos.\, \theta}{(2\,\beta - sin^2.\, \theta)}; \quad C = \frac{1}{sin.\, V.\, tang.\, \theta}$$

on aura une détermination complète de tous les élémens de la caustique.

Si l'on cherche l'expression de r en θ, au moyen de ces équations, on trouve

$$r = \frac{a.\, (16\,\beta^2.\, cos^2.\, \theta + sin^2.\, \theta)}{(4\,\beta - 1).\, (4\,\beta.\, cos^2.\, \theta + sin^2.\, \theta)}$$

Ainsi lorsque $4\,\beta$ est moindre que 1, la valeur de r devient constamment négative et impossible; par conséquent la caustique est imaginaire. C'est le cas de la réfraction ordinaire où β est une fraction fort petite peu différente de $\frac{1}{11}$; par conséquent on ne doit jamais voir de doubles images lorsque cet état a lieu.

Il est facile de sentir pourquoi la condition de $4\beta > 1$ est nécessaire pour la formation de la caustique : c'est qu'elle donne des trajectoires elliptiques, au lieu que de moindres valeurs de β donnent des paraboles ou des hyperboles qui ne peuvent pas se couper.

Au moyen de la valeur de *tang.* θ, qui est $4\beta.\, tang.\, \frac{v}{2}$, on peut éliminer θ de l'expression précédente de r, et alors on trouve

$$r = \frac{8\, a.\, \beta}{(4\beta - 1).\, [4\beta + 1 - (4\beta - 1).\, cos.\, v]}$$

La caustique formée par l'intersection de toutes les trajectoires est donc une ellipse dont le centre de la terre occupe un des foyers. Le grand axe de cette ellipse est $a\, \frac{(4\beta + 1)}{4\beta - 1}$, son excentricité est $\frac{a}{2}$, et par conséquent le rapport de cette excentricité au demi-grand axe est $\frac{(4\beta - 1)}{4\beta + 1}$. Celui-ci est dirigé suivant la verticale menée du centre de la terre à l'observateur, et l'apogée est à son zénith.

La partie du phénomène qui nous intéresse spécialement est celle qui répond à des distances au zénith peu différentes de 90°. Développons les formules précédentes dans cette supposition. On a d'abord en général

$$tang.\, \frac{v}{2} = \frac{tang.\, \theta}{4\beta}$$

v étant l'arc après lequel se coupent deux trajectoires consécutives. Lorsque $\theta = 90°$ on a $v = 180°$, et en

général, pour des hauteurs très-petites, v diffère peu de cette valeur; car si l'on fait $\theta = 90° - h$, h étant la hauteur apparente supposée très-petite, on a, en se bornant aux quantités de cet ordre,

$$v = 180° - 8\,\beta h$$

ce qui donne pour r la valeur

$$r = \frac{a}{4\,\beta - 1} \cdot [1 + 4\,\beta . (4\,\beta - 1) . h^2]$$

De sorte qu'en négligeant h^2 on a $r =$ *const.* La portion de la caustique qui répond aux très-petites hauteurs apparentes est donc, à fort peu près, un arc de cercle concentrique à la terre, et les points de tangence des trajectoires sur cette caustique sont situés, à fort peu près, à 180° de distance du zénith de l'observateur.

Or nous avons déjà plusieurs fois remarqué que les images directes sont données par des trajectoires dont le point de tangence sur la caustique est situé au-delà de l'objet, par rapport à l'observateur, et qu'au contraire les images renversées sont données par des trajectoires dont le point de tangence sur la caustique est situé entre l'observateur et l'objet. Ici cette dernière circonstance manquera toujours lorsque les hauteurs apparentes seront peu considérables, à cause de l'éloignement infini des points de tangence; et par conséquent lorsqu'on verra ainsi les objets par en haut, sous des hauteurs très-petites, on n'apercevra jamais d'images renversées, dans la loi que nous examinons.

C'est en effet ce que nous avons remarqué à Dunkerque, non pas sans quelque surprise, dans les cas où la mer plus froide que l'air, rendoit les objets visibles par en haut. Cette élévation étoit tellement sensible qu'on s'en apercevoit même sans le secours des instrumens. Lorsqu'on alloit s'asseoir sur le rivage, on sembloit alors être dans un fond autour duquel, suivant une pente douce, s'élevoit la mer fortement azurée, surtout au large, et terminée par un horizon si net, si bien tranché, si exempt de vagues, que le fil horizontal du cercle n'y pouvoit pas rendre sensible la plus petite ondulation. Cependant des barques de pêcheurs qui étoient au large, et des bâtimens qui s'éloignoient du port, ne présentoient qu'une seule image directe et très-nette, sans aucune apparence de renversement. Nous fîmes d'autant plus d'attention à cette particularité que n'ayant point encore calculé ce cas d'exagération de la réfraction ordinaire, j'ignorois que le renversement fût impossible sous ces petites inclinaisons : on en a vu la raison tout-à-l'heure. On remarquera en outre que, dans les cas où nous nous sommes trouvés, l'horizon apparent s'est élevé fort peu au-dessus du plan horizontal mené par notre œil; par conséquent l'effet de la réfraction terrestre à cette hauteur étoit fort peu différent de celui de la courbure de la terre. Les trajectoires menées sous ces petites inclinaisons devoient donc raser pendant long-temps la surface de la mer avant de pénétrer dans son intérieur, et pour de très-petites différences d'inclinaison initiale, les points où elles rencontroient cette

surface étoient fort éloignés les uns des autres. Il suit de là que des portions très-étendues de la mer étoient vues sous des angles très-petits, principalement dans les distances au zénith peu différentes de 90°. C'est ce qui produisoit cette teinte si forte, ce bleu sombre de la mer, surtout à l'horizon ; et comme cet horizon lui-même étoit déterminé par la hauteur de la couche d'air où la réflexion cessoit d'être possible, il s'ensuit qu'on devoit le voir bien tranché, bien terminé, et tout-à-fait exempt des ondulations accidentelles de la mer, dont le seul effet étoit de faire envoyer les mêmes trajectoires par d'autres points physiques des eaux, sans changer les inclinaisons sous lesquelles ces trajectoires parvenoient à l'observateur, en vertu de leur réflexion dans la couche d'air qui ne changeoit point pour cela de densité ni de température.

L'analyse que nous venons d'exposer s'appliqueroit également au cas où la densité de l'air, au lieu de décroître de bas en haut, comme nous le supposions tout-à-l'heure, décroîtroit au contraire de haut en bas, suivant la même loi. Ceci suppose la mer plus chaude que l'air. En prenant alors les *s* positives au-dessous de l'observateur, et supposant toujours

$$m. \left[\frac{(\rho) - \rho}{(\rho)}\right] = 4\,\beta s$$

l'équation différentielle devient

$$dv = \frac{ds.\ sin.\ \theta}{\sqrt{cos^2.\ \theta - 2s.\ (2\,\beta + sin^2.\ \theta) - s^2.\ sin^2.\ \theta}}$$

dont l'intégrale est

$$tang.\,(V-v) = sin.\,\theta.\frac{\sqrt{cos^2.\,\theta - 2\,s.\,(2\,\beta + sin^2.\,\theta) - s^2.\,sin^2.\,\theta}}{s.\,sin^2.\,\theta + 2\,\beta + sin^2.\,\theta}$$

V étant une constante; et comme il faut que v et s commencent ensemble, il s'ensuit qu'on aura

$$tang.\ V = \frac{sin.\,\theta.\ cos\ \theta}{2\,\beta + sin^2.\,\theta}$$

Ces formules auroient pu se déduire de celles de la page 191, en faisant dans ces dernières β et s négatives, changeant le signe du radical et supposant θ plus grand que 90°; ce qui rend $cos.\ \theta$ négatif. Ici les angles θ ne sont plus comptés à partir du zénith, mais à partir du nadir. Si donc, en suivant cette analogie, on fait

$$C = \frac{2\,\beta + sin^2.\,\theta}{sin^2.\,\theta.\ cos.\ V}$$

et que l'on ait soin de remarquer que $\frac{a}{r} = 1 + s$, on trouvera

$$r = \frac{a}{1 - C.\ cos.\ V + C.\ cos.\ (V - v)}$$

$C.\ cos.\ V$ étant égal à $1 + \frac{2\,\beta}{sin^2.\ \theta}$, par conséquent plus grand que l'unité, on voit que la trajectoire est constamment une branche d'hyperbole qui tourne sa convexité vers la surface terrestre, et dont le centre de la terre occupe le foyer extérieur. En nommant A le demi-grand axe de cette hyperbole, e le rapport de son excentricité au demi-grand axe, on a

$$A = \frac{2\,\beta a}{4\,\beta + 1}; \quad e = \frac{\sqrt{(2\,\beta + sin^2.\,\theta)^2 + sin^2.\,\theta.\ cos^2.\,\theta}}{2\,\beta}$$

Maintenant si, en suivant la marche de la page 196, on cherche l'équation de la caustique, on aura d'abord, comme précédemment, pour condition des intersections successives,

$$\frac{d.\left(\frac{sin.\ (u - V)}{sin.\ V.\ tang.\ \theta}\right)}{d\theta} = 0$$

d'où l'on tire

$$tang.\ \frac{v}{2} = \frac{tang.\ \theta}{4\ \beta}$$

Cette valeur de $tang.\ \frac{v}{2}$ étant substituée dans celle de r, il vient

$$r = \frac{a.\ (16\ \beta^2.\ cos^2.\ \theta + sin^2.\ \theta)}{(4\ \beta + 1).\ (4\ \beta.\ cos^2.\ \theta - sin^2.\ \theta)}$$

et enfin, en éliminant θ,

$$r = \frac{8\ a\beta}{(4\ \beta + 1).\ [1 - 4\ \beta + (1 + 4\ \beta).\ cos.\ v]}$$

Cette valeur se déduira de celle de la page 199, en y faisant β négative.

On voit par ces expressions de r que la caustique est toujours une branche d'hyperbole dont le grand axe est dirigé suivant la verticale de l'observateur, et dont le centre de la terre occupe un des foyers. Lorsque $4\ \beta$ est moindre que l'unité, la caustique tourne sa concavité vers ce centre, qui est alors son foyer intérieur. Au contraire, lorsque $4\ \beta$ surpasse 1, la caustique, tourne sa convexité vers le centre de la terre, qui devient son foyer extérieur. Dans le premier cas le grand axe est $\frac{a.\ (1 - 4\ \beta)}{1 + 4\ \beta}$, son excentricité est $\frac{a}{2}$, et le rapport de l'ex-

centricité au demi-grand axe, $\frac{1+4\beta}{1-4\beta}$. Dans le second, le grand axe est $a\frac{4\beta-1}{4\beta+1}$, et le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, $\frac{4\beta+1}{4\beta-1}$. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, $4\beta = 1$, et la caustique devient une ligne droite perpendiculaire à la verticale de l'observateur, et menée par le milieu du rayon terrestre qui lui correspond.

La valeur de r devient infinie lorsqu'on a (1)

$$tang.\ \theta = \sqrt{4\beta} \quad \text{ou} \quad tang.\ \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{4\beta}}$$

Des valeurs de θ plus considérables rendroient r négative et par conséquent impossible. Les trajectoires comprises entre $\theta = 0$ et θ égal à la valeur précédente seront donc les seules qui pourront se couper, par conséquent elles seules pourront former une caustique et envoyer ces doubles images, mais toutes celles qui répondront à des valeurs de θ plus grandes, par conséquent plus approchantes de l'horizon, divergeront à partir de l'œil de l'observateur et ne se rencontreront jamais. Si $4\beta = 1$, $\theta = 45°$, $v = 90°$, la limite des trajectoires qui se coupent répond donc alors à celle qui, en arrivant à l'œil, fait un angle de 45° avec la verticale. D'où l'on voit que pour que la caustique puisse avoir lieu dans les hauteurs apparentes très-petites, par conséquent pour des valeurs

(1) Il faut se rappeler que les angles θ sont comptés depuis le nadir autour de la verticale, et de $\theta = 0$ à $\theta = 90°$.

de *tang.* θ très-considérables, il faut que $4\,\beta$ soit lui-même un très-grand nombre, c'est-à-dire que l'effet de la réfraction soit extrêmement considérable par rapport à celui de la courbure de la terre. Ainsi, plus $4\,\beta$ sera grand, plus les images renversées pourront approcher de la ligne horizontale menée par l'œil de l'observateur. Mais elles resteront toujours au-dessous de cette ligne; car, quelque grand que l'on suppose β, l'intersection cessera toujours d'être possible pour les trajectoires relativement auxquelles on aura $\theta = 90^\circ$, puisque pour atteindre cette limite il faudroit que β fût infini. D'ailleurs ceci n'empêchera pas que des objets situés au-dessus de la ligne horizontale puissent être rencontrés par des secondes branches de trajectoires, et vus renversés; seulement leur image paroîtra au-dessous de la ligne horizontale. La limite analogue dans les couches planes étoit donnée par la trajectoire parallèle aux couches; mais ici la courbure de la terre rend déjà l'intersection des trajectoires impossible avant qu'elles aient atteint l'horizontalité.

Si donc nous supposons que le cercle CM (*fig.* 24) représente la circonférence de la terre, O l'observateur, OMH la trajectoire limite tangente en M à la surface des eaux. Soit L le point de tangence de cette trajectoire sur la caustique représentée par LT, et menons enfin la trajectoire OmT'' tangente à la caustique à l'infini, il est sensible par ce qui précède, 1°. que tous les points situés au-dessous de MLT seront complètement invisibles pour l'observateur; 2°. ceux qui seront compris dans l'espace

mixtiligne $Lm\,TT'$ couvreront de doubles images, une supérieure qui sera droite, une inférieure qui sera renversée; enfin au-dessus de la trajectoire $Om\,T'$, il n'y aura plus de doubles images mais un simple abaissement des objets.

Et par une analogie qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé précédemment pour les couches planes, dans le cas de la progression arithmétique, si l'on suppose $\theta = 45°$, on trouve $v = a.\,\frac{16\,\beta^2 + 1}{16\,\beta^2 - 1}$, de sorte que si β est extrêmement considérable, en sorte qu'on puisse négliger l'unité vis-à-vis de $16\,\beta^2$, la trajectoire menée sous l'inclinaison de 45° touchera la caustique au niveau de l'observateur.

Quoique la loi que nous venons d'examiner soit particulière, et par conséquent ne puisse pas avoir en général l'air atmosphérique, cependant la considération de cette loi nous aura toujours été utile pour faire sentir les modifications introduites dans cette théorie par la courbure de la terre, modifications qui disparoissent lorsque l'effet de la réfraction peut être considéré comme infini relativement à cette courbure. Or c'est ce qui arrivera très-souvent, car dans la réfraction ordinaire où $\beta = \frac{1}{11}$, une élévation de 200 mètres répond à une variation de température à peu près égale à un degré centésimal, et dans cette circonstance 4β surpasse déjà $\frac{1}{3}$; au lieu que dans le cas d'une réfraction extraordinaire produite par l'excès de chaleur de la surface de la mer sur l'air environnant, des différences de hauteur égales à quelques centimètres, ou moins encore répondent quel-

quefois à des différences de température de plusieurs degrés, ce qui rend la valeur de β trois ou quatre mille plus considérable si on la calcule toujours de la même manière ; il devra donc souvent arriver que la convexité de la terre puisse être négligée relativement à une si forte réfraction.

En appliquant donc ici les considérations générales que nous avons exposées dans le cas des couches planes, on verra se reproduire des résultats analogues touchant les diverses formes que peuvent prendre les caustiques, et les inflexions qu'elles peuvent subir selon la loi de superposition des densités. Ainsi sans répéter ici les détails des lois particulières que nous avons examinées alors, nous nous bornerons à rappeler les résultats de celles qui se trouveront avoir une application immédiate à quelque phénomène observé.

Généralement soit O l'observateur élevé dela quantité, OA au-dessus de la surface de la mer, *fig.* 25. Soit OMT la trajectoire limite tangente en M à cette surface; le point M sera le dernier point de la mer que l'on pourra apercevoir. Si les trajectoires menées au-dessus de OM ne se coupent point dans leurs secondes branches, il n'y aura point de renversement, mais un simple abaissement des objets, et tout l'espace TMH sera invisible. Le soleil et les autres astres se coucheront à l'horizon apparent de la mer sur la trajectoire limite OMT, et les rayons qu'ils enverront à cette époque éprouveront une dépression plus grande que celle de l'horizon vrai qui auroit lieu indépendamment de la réfraction.

Mais si, par la nature du changement des densités les trajectoires successives se coupent dans leurs secondes branches, il se formera au-delà du point M une caustique ML qui commencera par couper cette trajectoire elle-même à une certaine hauteur au-dessus du niveau de la mer; après quoi elle ira continuellement en s'élevant à mesure qu'elle s'éloignera de l'observateur, jusqu'à ce qu'enfin elle soit terminée par la dernière des trajectoires pour laquelle l'intersection est possible. Mais avant de parvenir à ce terme, elle pourra subir des inflexions, des rebroussemens, et former ainsi autant de branches susceptibles de multiplier les images, comme nous l'avons remarqué dans le cas des couches planes.

Si l'on suppose que la température de la mer soit partout la même autour de l'observateur, les mêmes phénomènes se produiront dans tous les verticaux menés par son œil. On les représentera en faisant tourner tout le système précédent autour de la verticale CO. L'arc AM engendrera la surface visible de la mer, le point de tangence M décrira un cercle horizontal qui sera la limite apparente de cette surface et que l'on prendra pour l'horizon vrai; enfin la caustique ML engendrera une surface de révolution au-dessous de laquelle on ne pourra voir aucun objet, et au contraire tous ceux qui seront compris entre cette surface et celle qu'engendre la trajectoire limite MN paroîtront doublés.

Il suit delà que l'observateur ne verra point l'horizon réel de la mer, il prendra pour cet horizon le cercle décrit par le point M. Si la vue n'est limitée par aucun obstacle,

les points du ciel ou de l'atmosphère, compris dans l'espace *TLM*, enverront aussi leur double image; mais si le temps est serein et sans nuages, ces deux images n'offrant aucun rapport de symétrie, ne pourront point être distinguées, la plus basse paroîtra la continuation de l'autre, et le ciel semblera reposer sur le faux horizon.

Si, au contraire, la caustique, en se prolongeant, remontre des objets opaques, par exemple des îles éloignées, la partie de ces îles qui s'élevera au-dessus d'elle, et qui sera cependant au-dessous de la trajectoire limite paroîtra doublée. Si le sommet de l'île est plus haut que cette trajectoire, sa base apparente, ou plutôt l'image renversée qui lui sert de base, paroîtra reposer sur l'horizon. Mais si ce sommet est plus bas que la trajectoire limite, l'image renversée du ciel s'apercevra au-dessous de l'île qui semblera suspendue en l'air avec son image renversée. Les résultats de ces diverses circonstances sont absolument conformes à ceux que nous avons observés sur le sable à Dunkerque, lorsque nous placions un homme armé d'une perche, à divers éloignemens.

Mais ici la dimension des objets dans le sens latéral donne lieu à un nouveau phénomène. Nous avons prouvé que la surface caustique s'élève à mesure qu'elle s'éloigne. Les extrémités latérales de l'objet étant plus éloignées de l'observateur que son centre, seront donc coupées par la caustique à une plus grande hauteur. S'il est très-peu large la différence sera insensible, et il paroîtra tout entier élevé dans le ciel, à-peu-près également. Mais si l'on observe uue île assez grande, dont les contours répon-

dront à des points beaucoup plus éloignés que le milieu, la différence de hauteur de la caustique a ces divers éloignemens pour devenir sensible, et les extrémités latérales de l'île paroîtront relevés comme un bec, ainsi que le présente la *fig.* 26. Il pourra même arriver, par l'effet de cette circonstance, que les bords d'une île soient relevés en l'air, tandis que son milieu, c'est-à-dire la partie la plus voisine de l'observateur, paroîtra reposer sur la surface des eaux. Mais si les différences de température augmentent et que le point de tangence de la trajectoire limite se rapproche de l'observateur, ou ce qui revient au même, si l'observateur s'abaisse, la trajectoire limite pourra s'élever au-dessus du sommet de l'île qui sera alors entièrement suspendue dans l'air.

Quoique ces résultats soient des conséquences nécessaires et très-simples de notre théorie, nous avons cependant eu soin de les vérifier à Dunkerque, en observant ainsi une estacade très-prolongée qui s'étendoit horizontalement dans une direction perpendiculaire au rayon visuel mené à son milieu. En nous baissant sur le sable assez pour amener la caustique à la hauteur de cette estacade, le milieu en paroissoit simplement double comme à l'ordinaire, mais les bords sembloient relevés et amincis comme un bec, conformément à la description que nous venons de donner. D'ailleurs on voyoit toujours deux images distinctes même à ces extrémités, au lieu que cela n'arrive pas toujours, du moins en apparence, quand on observe des îles très-peu au-dessus de l'horizon de la mer. Mais cela tient à ce que l'image renversée se trouve

alors réduite à une dimension infiniment petite, comme je le prouverai plus loin, et par conséquent cela ne porte aucune atteinte à la théorie que je viens d'exposer.

Il est presque superflu de prouver que dans les circonstances où l'on observe ces phénomènes la réfraction est négative, cependant je ne négligerai point de le faire, puisque cela me donnera lieu de rapporter des observations très-précises faites par M. de Humboldt en Amérique, et qu'il a bien voulu me communiquer.

Ces observations ont été faites à Cumana, avec un quart de cercle de Bird. L'instrument, soigneusement vérifié par le niveau et le fil de plomb, étoit solidement placé sur un mur très-massif. L'objectif de la lunette étoit à 24 pieds 11 pouces ou 8.094 mètres au-dessus du niveau de la mer. L'erreur de la collimation étoit de 8′ 40″, additive aux distances zénithales. Elle avoit été déterminée exactement par la comparaison avec un sextant de Ramsden bien vérifié.

Les objets observés étoient des îles placées à 8 ou 9 milles de distances, chaque mille étant de 950 toises ou une minute de degrés. Afin qu'aucun accident n'influât sur ces angles, M. de Humboldt, avant de diriger sa lunette sur les îles, mesuroit l'élévation apparente d'un objet voisin, que sa proximité et son élévation rendoient capables d'être affecté par les changemens des réfractions horizontales.

Nous réunirons les observations de M. de Humboldt dans le tableau suivant.

Observations de M. Humboldt, faites à Cumana.

DATES DES OBSERVATIONS.	SOMMET de l'île Boracha.	SOMMET de l'île Picuita.	BASE ou PIED de l'île Picuita.	HORIZON de la mer.
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
2 sept. 11^h du matin . . .	89 55 33	90 5 23	90 7 5	Non observé.
2 . . 6^h du soir. . . .	89 55 33	90 5 23	90 6 19	Non observé.
3 . . 7^h du matin . . .	89 55 33	90 4 23	90 7 6	90 7 43
3 . . 6^h du soir. . . .	89 55 47	90 4 27	Non observé.	Non observé.
4 . . 5$^h \frac{1}{4}$ du soir. . .	89 55 47	90 4 36	90 6 52	90 6 48
5 . . crépuscule	89 56 0	90 4 33	90 6 44	90 7 34
6^h du soir ⊙ à 4°	89 56 0	90 4 36	90 6 48	90 6 51
Dans le crépuscule. . . .	. . . . . .	90 4 55	. . . . . .	90 6 10
Plus tard.	. . . . . .	90 4 36	. . . . . .	90 6 57
24 . . . 9^h du matin . .	89 56 0	90 6 48	. . . . . .	90 14 17

La première remarque qui se présente en examinant ces observations, c'est que les plus grandes variations correspondent aux plus petites hauteurs apparentes. Ces variations sont peu sensibles pour le sommet de la Boracha. Elles le sont davantage pour le sommet de la Picuita qui est plus basse ; elles le sont surtout à l'horizon apparent

Observations de M. Humboldt, faites à Cumana.

Températ. à l'air, en degrés de Réaumur.		Hygromètre de Deluc.	Cyanomètre de Saussure.	CIRCONSTANCES ATMOSPHÉRIQUES.
D.	M.	D.	D.	
22	6	42.0	19.0	Suspension; le ciel tout bleu; du soleil.
20	0	45.0	......	Suspension; temps couvert.
21	0	43.0	......	
21	7	49.0	......	Couvert; proximité de la pluie.
22	5	41.0	......	Couvert, mais très-transparent. Point de suspension.
21	0	45.0	......	Suspension.
22	8	36.0	......	Suspension foible, qui devient nulle au coucher du soleil.
......		......	......	Suspension nulle, dépression changée.
......		......	......	Horizon oscillant.
21	5	32.0	......	Suspension très-remarquable, la plus forte qu'ait observée Humboldt. Sécheresse excessive; la Boracha toute en l'air, quoiqu'elle ait plus de 1°.10′ de large; de petites barques de pêcheurs nageant en l'air et vues doubles; la Picuita double aussi ce jour-là, à plusieurs reprises.

de la mer. Commençons donc par discuter les observations qui se rapportent à cet horizon.

La hauteur de l'observateur au-dessus du niveau de la mer étant de 8.094 mètres, la dépression vraie de l'horizon, indépendamment de toute réfraction, devroit être de 5′ 29″, c'est-à-dire plus foible que toutes les précédentes,

par conséquent, dans tous ces cas, la réfraction a été négative, et les trajectoires décrites par les rayons lumineux étoient, au moins dans leur partie inférieure, convexes vers la surface des eaux.

Les phénomènes de la suspension ont eu lieu dans leur plus grande intensité le 24 septembre, c'est le seul jour où l'on ait observé le renversement, mais aussi c'est le jour où la dépression de l'horizon a été la plus grande, ce qui est conforme à la théorie.

En effet, conservant les dénominations de la page 152, la tangente de la dépression de l'horizon apparent, pour de très-petites hauteurs, est donnée par la formule

$$tang.\ I' = \sqrt{2\ s - m.\left(\frac{(\varrho) - \varrho}{(\varrho)}\right)}$$

Et comme, dans le cas actuel, la densité (ϱ), dans la station inférieure, est moindre que dans la supérieure, la dépression apparente est plus grande que la dépression vraie dont la tangente seroit exprimée par $\sqrt{2\ s}$. Lorsque l'angle I augmente, (r) et r restant les mêmes, c'est que la différence ϱ — (ϱ) des densités extrêmes devient plus considérable, et alors, comme on l'a démontré plus haut, les effets du mirage doivent devenir sensibles pour les objets plus rapprochés, et l'espace où le renversement est possible se trouve agrandi.

On doit remarquer encore que la base apparente de l'île Picuita ne s'est pas toujours trouvée au-dessus de l'horizon apparent de la mer. Elle est quelquefois descen-

due à la même hauteur, par exemple, le 5 septembre, au coucher du soleil. Alors l'île a dû paroître reposer sur l'horizon. Quelquefois même la base de l'île a paru au-dessous de l'horizon apparent de la mer, comme le 4 septembre, alors on a dû apercevoir la surface de la mer un peu au-delà de l'île. Dans tous ces cas les trajectoires des rayons lumineux étoient convexes vers la mer, au moins dans leur partie inférieure, comme la dépression de l'horizon le prouve; mais le point de tangence de la trajectoire limite sur la surface de la mer étoit plus ou moins éloigné de l'observateur, et c'est ce qui produisoit les variétés observées dans la suspension des îles, qui se trouvoient tantôt au-delà de cette limite, tantôt en deçà.

On peut faire des remarques semblables sur les observations de Legentil dans l'Inde. Pendant tout un hiver cet astronome vit le soleil se lever *au-dessus* de l'horizon apparent de la mer, d'une quantité qu'il estimoit à 4 ou 5′ de degré. Selon notre théorie, le soleil se levoit alors au-dessus de la caustique qui couvroit les extrémités de la mer, et ce phénomène ne pouvoit avoir lieu sans que l'horizon apparent de la mer fût abaissé au-dessous du véritable. C'est ausi ce qui avoit lieu réellement. Car Legentil donne sa hauteur au-dessus du niveau de la mer de 46 pieds ou un peu moins de 15 mètres. Pour cette hauteur, la dépression de l'horizon vrai est de 7′ 27″.

Or la dépression apparente observée par Legentil, à plusieurs reprises et dans plusieurs jours différens, à l'instant du lever du soleil, étoit 10′ 10″

Erreur de collimation moins la demi-épaisseur du fil . . . . . — 1′ 58″

Dépression apparente de l'horizon de la mer à l'instant du lever du soleil. . . . . 8′ 52″

Dépression calculée . . . . 7′ 27″

Excès de la dépression apparente . . . . 1′ 25″

Et cet excès de la dépression apparente devroit être encore plus considérable, si on pouvoit en ôter la partie de la trajectoire soumise à la réfraction ordinaire qui, d'après nos observations de Dunkerque, devoit être déjà très-sensible à la hauteur de 46 pieds. Ainsi, dans ces circonstances, on peut affirmer que la réfraction étoit négative, dans les couches d'air inférieures très-voisines de la surface des eaux.

Legentil a constamment observé qu'à l'instant même du lever du soleil, lorsque le premier rayon de cet astre commençoit à paroître, l'horizon apparent de la mer s'abaissoit subitement d'environ 36″. Ceci semble indiquer un accroissement subit de température dans la couche d'air contigue à la surface des eaux. Pour expliquer ce phénomène, il faut remarquer que les rayons solaires en traversant l'atmosphère ne sont pas tous absorbés par les molécules qui la composent; une partie même sous forme de chaleur rayonnante, paroît traverser l'atmosphère sans obstacle sensible jusqu'à ce qu'elle rencontre un corps liquide ou solide, capable de l'absorber. Or, à l'instant où le soleil paroît sur l'horizon, ces deux causes se réunissent pour élever d'une petite quantité la

température de la couche supérieure de la mer, et celle-ci à son tour doit échauffer un peu la couche d'air qui lui est contigue. De là résulte une plus grande différence entre la température des couches supérieures et inférieures de l'air, et par conséquent un abaissement de l'horizon apparent.

Les variations de température qui se produisent au lever et au coucher du soleil doivent être très-fréquentes et très bizarres, car elles doivent dépendre du plus ou moins de transparence de l'air, de la quantité des vapeurs aqueuses qui y sont suspendues sous forme de brouillard et de plusieurs autres causes accidentelles. Aussi M. de Humboldt y a-t-il observé de grandes variations.

Par exemple dans l'extrait de ses observations, du 5 septembre, je trouve cette remarque. « Au coucher du » soleil même la Picuita Baissa, ne fut plus suspendue, » mais la dépression changea beaucoup :

» Au moment du coucher	90° 6′ 33″
» Dans le crépuscule	90° 6′ 10″
» Plus tard	90° 6′ 57″

Il n'y a pas d'erreur dans ces observations, ajoute M. Humboldt, car le signal de vérification resta à la même hauteur tandis que l'horizon dansoit. Ces variations furent encore plus sensibles le 24 septembre le jour où le mirage fut aussi le plus sensible, car l'horizon dansoit trois ou quatre fois dans une heure de 90°. 7′. 44″ à 90° 10′ 32″, sans que les instrumens météorologiques indiquassent aucune variation.

Lorsque Legentil observoit à Pondichéry, il remarqua

que les phénomènes de réfractions extraordinaires qui accompagnoient le lever du soleil et dont nous parlerons tout à l'heure, n'avoient jamais lieu que pendant l'hiver; l'été, le soleil se levoit à l'horizon même de la mer sans présenter aucun de ces phénomènes. La raison de cette différence est sensible. La température de la mer loin des côtes représente à peu près, dans tous les pays, la température moyenne de l'air pendant toute l'année. Ainsi, la mer en été doit être communément plus froide que l'air; en hiver elle doit être plus chaude. C'est ce que M. Woltman a constaté à Cuxhaven, par des observations suivies, qui avoient pour objet l'influence de ce fait sur les réfractions extraordinaires. Ceci doit être vrai surtout sous le climat de l'Inde, où la température est si égale et éprouve des variations si lentes. Or, en été, l'air étant plus chaud que la mer, la densité des couches d'air doit décroître de bas en haut, dans le sens ordinaire, même dans les couches inférieures qui sont contigues à la mer; alors le phénomène des doubles images, ou même celui de la suspension ne doit pas se produire. Le soleil doit se lever à l'horizon même de la mer qui n'est autre que l'horizon vrai prolongé et élevé par la réfraction.

Au contraire en hiver le contact des eaux réchauffant la couche inférieure de l'atmosphère, y produira les phénomènes de réfraction extraordinaire que nous avons décrits dans ce mémoire, et l'horizon apparent s'abaisse au-dessous de l'horizon vrai comme nous l'avons dit.

Nous pouvons donc considérer à Pondichéry, l'horizon

d'été comme l'horizon véritable. La différence de 5 ou 6 degrés de Réaumur qui existe entre la température de l'été et celle de l'hiver, selon le témoignage de Legentil, doit y produire un petit changement qui élevera cet horizon de 43 où 44″. Or, Legentil a trouvé que, pendant l'été, le bord supérieur du soleil, employoit 59 secondes de temps depuis l'instant de sa première apparition jusqu'à l'instant de son contact avec le fil horizontal du quart de cercle placé sur 0° 0′, tandis que dans l'hiver il n'employoit que 35 secondes pour parvenir au même fil. La différence 24 secondes de temps exprime donc, à fort peu près, l'excès d'élévation du point où le soleil paroissoit en hiver, parce qu'à Pondichéry les parallèles décrits par cet astre sont très peu obliques à l'horizon. Or ces 24 secondes de temps répondent à 5′ 17″ de degré; car selon les observations de Legentil, le soleil dont le diamètre est en janvier de 32′ 36″, employoit communément pour se lever 2′ 28″; or, 5′ 17″ sont beaucoup plus que ne pourroit produire la réfraction ordinaire pour une diminution de température de 5 ou 6 degrés de Réaumur. Il est donc prouvé par là qu'en effet le soleil se levoit sur la caustique et au-dessus de la surface même de la mer, conformément à notre théorie.

On voit aussi que ces circonstances supposent nécessairement une trajectoire convexe, vers la mer dans les points où elle s'approche de sa surface. Par conséquent la réfraction totale conclue de ces observations, faites en hiver, doit être trop petite; aussi, en les calculant, M. Delambre a-t-il trouvé :

Réfraction horizontale par les réfractions d'été où les réfractions ordinaires sont seules agissantes	34′ 12″
Par les observ. d'hiver affectées de la réfraction extraordinaire . .	32′ 26″
Différence	1′ 46″

C'est-à-dire que les premières sont plus fortes. M. Delambre en fait la remarque et s'en étonne avec raison ; mais la cause en est évidente d'après notre théorie.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'époque de l'apparition du soleil et la hauteur à laquelle il commence à paroître sur l'horizon ; mais les mêmes causes doivent influer sur les apparences que son disque présente quand il se lève et quand il se couche. Tant que cet astre se trouvera au-dessus de la trajectoire limite, il n'enverra qu'une seule image qui sera directe, mais aussitôt que son bord inférieur touchera la trajectoire limite, on commencera à voir en *M* (*fig.* 27), c'est-à-dire à l'horizon apparent, un point brillant qui sera le commencement de la réflexion. Ce point sera l'image du point le plus bas du disque du soleil, et sera placé dans le même vertical que lui. A mesure que le bord du soleil pénétrera dans l'espace où la réflexion est possible, l'image réfléchie de ce bord augmentera, et il se formera en *M* un segment semblable, mais renversé, et cet effet continuant toujours, on croira voir un second soleil sortir de l'horizon et aller au devant du véritable (*fig.* 28). Ces deux soleils s'atteindront et viendront en contact lorsque le véritable atteindra la surface caustique au-dessous de laquelle les objets cessent d'être aperçus (*fig.* 29).

Alors les phénomènes changeront. A mesure que le vrai soleil pénétrera dans cette surface, il paroîtra s'échancrer par son bord inférieur et se réunir à l'autre soleil. Leur commune section ne sera pas une ligne droite, mais une ligne courbe, convexe vers la terre et relevée par ses extrémités, de sorte que le faux soleil paroîtra refluer à droite et à gauche sur le véritable (*fig.* 30 et 31). Ces phénomènes continueront jusqu'à ce que le bord supérieur du soleil vrai atteigne la trajectoire limite ; alors le bord inférieur du faux soleil sera entièrement formé et paroîtra tangent à l'horizon. Le soleil vrai descendant toujours, son bord supérieur s'abaissera au-dessous de la trajectoire limite ; alors le bord inférieur du faux soleil, image du bord supérieur réel, paroîtra quitter l'horizon pour continuer à s'élever et à se pénétrer avec l'autre (*fig.* 32). Par suite de cette pénétration mutuelle, les deux soleils iront en diminuant de grandeur. Enfin quand ils seront totalement réunis, ils ne formeront plus qu'un point lumineux arrondi, qui disparoîtra subitement sur la surface caustique et par conséquent au-dessus du faux horizon, que l'on prendra pour l'horizon réel. Ces apparences sont tout-à-fait semblables à celles de l'homme représenté dans la figure 9.

Les mêmes phénomènes se reproduiront en sens contraire au lever du soleil. Cet astre ne commencera à être sensible, que lorsque ses premiers rayons deviendront tangens à la surface caustique. Alors on apercevra un point brillant qui paroîtra tout à coup au-dessus de l'ho-

rizon apparent de la mer, et à une certaine distance de l'horizon. Ce point sera accompagné de son image réfléchie : il sera réellement double ; mais ces deux images se touchant sur la surface caustique, on ne pourra pas les distinguer l'une de l'autre. Le soleil continuant à se lever, le point lumineux s'agrandira. Le bord supérieur du disque commencera à se former, en même temps l'image réfléchie de ce bord augmentera et s'approchera de l'horizon de la mer, Mais le vrai soleil s'élevant toujours, son bord inférieur finira par se détacher de la surface caustique. A cet instant le vrai et le faux soleil se dédoubleront. Le disque apparent inférieur et le disque réel supérieur continueront à se séparer. Le premier paroîtra refluer à droite et à gauche vers l'horison de la mer. Enfin ils se quitteront tout-à-fait. Le point de leur séparation se trouvant sur la surface réfléchissante, sera plus haut que l'horizon apparent de la mer ; et tandis que le soleil vrai continuera à s'élever, après cette séparation, son image renversée s'abaissant, offrira l'apparence d'un second soleil, qui rentrera sous l'horizon apparent de la mer.

Ces phénomènes que nous venons de déduire de la théorie, ont été observés par Le Gentil, à Pondichéry dans l'Inde, et en France sur les côtes de Normandie. Il les a suivis à Pondichéry pendant un hiver entier avec beaucoup d'attention, sans pouvoir en découvrir la cause, quoiqu'il en mesurât toutes les circonstances avec la pendule et le quart de cercle. Il étoit naturel, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il ne les vît point dans l'été, lors

que la chaleur de l'air est plus grande que celle de la mer, et qu'il les ait observés pendant l'hiver, lorsque la chaleur de la mer surpasse celle de l'air. La constance et l'égalité du climat de l'Inde, en laissant à cette cause toute son influence, faisoient qu'il les voyoit tous les jours, tandis qu'ils doivent être moins constans dans nos climats où les variations de l'atmosphère peuvent les amener en toute saison. Aussi ne les observa-t-il que deux fois sur les côtes de Normandie, pendant un assez long séjour. Legentil a décrit ces phénomènes avec beaucoup de détail *dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour* 1774 *et* 1789; et quiconque voudra comparer sa description à la nôtre, les trouvera d'accord en tout point. Ce qui étonnoit surtout Le Gentil, c'étoit de voir le soleil, en hiver, se lever constamment au-dessus de l'horizon de la mer, *comme s'il sortoit du chaos*, ce sont ses expressions; et sur ce fait qu'il avoit observé tant de fois, il établissoit les hypothèses les plus bizarres, supposant que, pendant l'hiver, l'air contigu à la surface de la mer éprouve une condensation si forte, qu'il arrête la lumière du soleil, et forme comme un second horizon faux, plus élevé que le véritable d'une quantité qui à Pondichéry étoit de 4 ou 5 minutes de degré. Il avoit même remarqué que la réfraction ordinaire sur ce faux horizon, étoit moindre qu'à l'horizon véritable, et il en tiroit des conséquences contre l'observation des Hollandois dans la nouvelle Zemble. Mais ces phénomènes s'expliquent par notre théorie, comme on vient de le voir, sans aucune difficulté, et le second horizon de Le-

gentil, loin d'être formé par de l'air condensé, l'est au contraire par de l'air raréfié, qui forme sur la surface de la mer une enveloppe au-dessous de laquelle aucun point ne peut être aperçu.

Ces phénomènes ont aussi été aperçus par le second Cassini, en allant de Portosino à Livourne. Les figures que j'en ai données dans le mémoire, sont exactement calquées sur celles que nous avons trouvées dans les manuscrits déposés à l'Observatoire. De sorte que par cela même on peut encore juger que pour expliquer ces phénomènes, je n'ai eu besoin d'y faire aucune altération.

Si les différences de densité des couches atmosphériques restoient constantes pendant que le soleil s'abaisse, le temps qui s'écoule entre l'instant où la réflexion commence, et celui où les deux images se touchent, seroit égal au temps qu'emploieroit le bord inférieur du faux soleil pour remonter de l'horizon apparent jusqu'au soleil vrai. Mais à cause des variations continuelles qui surviennent dans la température de l'air inférieur à l'instant du coucher du soleil, ce rapport ne peut point s'observer. Car, par l'effet de ces variations, la dépression de l'horizon apparent de la mer, ou plutôt du point que l'on prend pour cet horizon, doit changer sans cesse avec de grandes irrégularités. C'est aussi ce que Legentil a remarqué dans ses observations de l'Inde. La seule apparition du premier rayon solaire, faisoit baisser l'horizon apparent d'une quantité qui alloit quelquefois jusqu'à 36 secondes de degré. Le contraire arrive le soir lorsque le soleil se

couche, et l'horizon apparent s'élève avec de grandes irrégularités. C'est ce que l'on voit dans les observations de M. de Humboldt à Cumana, où ces changemens étoient si bizarres que, suivant son expression, il sembloit que l'horizon dansoit. Cette grande influence des rayons solaires sur la température des couches inférieures de l'air au lever et au coucher du soleil, paroît s'accorder avec une observation bien curieuse de Saussure, c'est que la plus grande différence entre le thermomètre à l'ombre et le thermomètre au soleil ont lieu le matin et le soir.

Il peut même arriver, par l'effet de ces irrégularités, que le phénomène des doubles images commence à se produire sans qu'il continue jusqu'à la fin, c'est-à-dire, par exemple, que le soir la seconde image peut commencer à se former, et ne pas se former entièrement. Considérons, par exemple, le cas où le faux soleil réuni par le haut au soleil véritable, ne forme plus avec lui qu'un seul disque arrondi dans sa partie supérieure, et coupé inférieurement par l'horizon apparent de la mer. (Voyez *fig.* 32.) Ce cas arrivera le soir, lorsque le bord supérieur du vrai soleil, descendant vers la mer, n'a pas encore atteint la trajectoire limite, et ne donne pas encore de double image, ce qui fait que le faux soleil semble encore coupé par l'horizon. Si alors, par l'effet de l'abaissement subit de la température, l'horizon apparent se relève jusqu'à atteindre l'horizon vrai, le bord supérieur du vrai soleil n'atteindra point la trajectoire limite qui s'abaissera devant lui,

l'image réfléchie de ce bord ne se formera donc pas, et le disque réel accompagné de la portion de son image réfléchie dont l'étendue diminue sans cesse, viendront disparoître ensemble, aux limites de l'horizon, revenu lui-même à sa véritable hauteur. Ce cas paroît être un de ceux que Legentil a observés sur les côtes de Normandie, car il vit deux jours de suite, au coucher du soleil, l'image du bord inférieur se former au-dessous du disque réel, à l'horizon même de la mer, puis venir, en se levant, se réunir à lui, et le tout diminuant peu-à-peu, disparoître à l'horizon même de la mer sans aucune image réfléchie du second bord. Ce ne fut que le troisième jour que l'on vit aussi cette dernière image; mais aussi sa disparution totale se fit au-dessus de l'horizon apparent de la mer, conformément à notre théorie. Il est fâcheux que Legentil n'ait pas mesuré les hauteurs de l'horizon apparent de la mer dans ces diverses circonstances. Il est bien probable que, dans le cas où la seconde image parût complète, il auroit trouvé l'horizon apparent plus abaissé que les jours précédens où cette image ne se formoit point; et ces jours-là, sans doute, il auroit vu l'horizon apparent s'élever graduellement en revenant à l'horizon vrai.

Enfin, lorsque l'on observe des réfractions extraordinaires produites par les causes que nous venons d'assigner, il peut et il doit souvent arriver que la couche d'air inférieure qui repose sur la surface de la mer, n'a pas partout la même densité. En effet, la profondeur plus ou moins considérable de la mer, les courans, les agita-

tions locales de l'air, et mille autres causes analogues, doivent troubler sans cesse et détruire cet état d'uniformité, de température et de sphéricité des couches que nous avons supposé. Ces circonstances, en compliquant la forme des caustiques, et les rendant variables d'un instant à l'autre, doivent varier aussi les images de mille manières, multiplier leur nombre et produire une infinité d'accidens bizarres de réfractions extraordinaires, qui seront surtout sensibles vers le coucher du soleil, au moment où cet astre est près de quitter l'horizon. Tels sont, par exemple, ceux que l'on voit rapportés dans les *fig.* 33, 34 et 35. La première série a été observée par Cassini le fils, au lever du soleil, le 17 décembre 1698, et calquée sur ses dessins, que nous avons retrouvés à l'Observatoire. Les deux autres ont été observées par Mathieu et moi, à Dunkerque, au coucher du soleil. Cet allongement subit du bord inférieur qui commence le phénomène (*fig.* 34 *bis*) et qui fait ressembler le soleil à une poire, répond à l'instant où il entre dans les couches de réfraction négative où les trajectoires ne se coupent point encore, mais abaissent seulement les objets. Plus tard, le bord inférieur arrive dans l'espace où se fait le renversement, et, selon la forme de la caustique, il donne des images doubles ou multiples. En même temps le haut du disque, inégalement abaissé par la réfraction négative, se déprime sur les bords plus qu'à son sommet, et prend la forme d'un toit, comme le montre la *fig.* 35. Enfin, lorsque le disque presque entier s'est plongé sous la caustique et qu'il n'en reste plus au-dessus qu'une

portion très-petite, cette portion, agitée par les ondulations de la couche inférieure, éprouve des oscillations excessives qui tantôt l'augmentent, la diminuent ou la font en partie disparoître, jusqu'à ce qu'enfin arrivée elle-même dans la couche inférieure, et présentant l'apparence rapportée dans la *fig.* 35*g*, elle s'évanouit comme une vapeur lumineuse semblable aux légers nuages que le soleil dore encore de ses rayons quand il a déjà disparu pour nous.

Je crois pouvoir expliquer par la même théorie les phénomènes des triples images, observés par M. Vince et dont j'ai déjà parlé plus haut. Quand je dis expliquer, j'entends ramener ces phénomènes à une même cause, à une même forme de caustique, telle que la disposition des images, et leur marche relative quand elles s'abaissent ou qu'elles s'élèvent, soient des conséquences nécessaires de la forme supposée. Car admettre, comme l'a fait M. Vince, autant de lois différentes de densité qu'il y a d'images visibles, ne me paroît point une explication satisfaisante, puisque les mouvemens respectifs des images restent arbitraires; tandis que, d'après la description qu'il en donne, ces mouvemens avoient entre eux des rapports déterminés.

Malheureusement M. Vince n'a pas observé l'élément le plus nécessaire pour l'explication de ces phénomènes, je veux dire la dépression apparente de l'horizon de la mer. De sorte que l'on ne peut pas affirmer *a priori*, si les trajectoires, dans leur partie inférieure, étoient concaves ou convexes vers la surface des eaux. Cependant

je crois pouvoir conclure qu'elles étoient convexes d'après plusieurs raisons que je vais développer.

M. Vince remarque dans son Mémoire que le jour où les phénomènes parurent, la chaleur avoit été excessive: c'étoit le 1er avril 1798. En observant pour ce jour-là la marche du thermomètre observé à Londres, on voit en effet qu'à 7 heures du matin le thermomètre extérieur marquoit 64° de Fareinheit ou 17.78 de l'échelle centésimale, tandis qu'à 2 heures il marquoit 82° de Fareinheit ou 27.78. La plus forte chaleur du jour fut de 28.33, par conséquent peu différente de la précédente; et le lendemain le thermomètre ne s'éleva pas à beaucoup près à la même hauteur. Ainsi, pendant l'observation du phénomène, qui se fit depuis 4 heures $\frac{1}{2}$ du soir jusqu'à 8 heures, la température de l'air devoit avoir considérablement diminué, surtout dans les couches supérieures, par l'effet de l'abaissement du soleil. Mais la surface de la mer n'avoit pas dû se refroidir aussi vite. Elle pouvoit donc alors et devoit probablement se trouver plus chaude que l'air, ce qui donne des trajectoires convexes dans leur partie inférieure, et une densité croissante du bas en haut, jusqu'à une petite hauteur; après quoi l'influence de la mer devenant moins sensible, la densité devoit aller de nouveau en diminuant comme à l'ordinaire, et probablement suivant une loi beaucoup plus rapide, tant à cause de l'abaissement subit de la température, qu'à cause de la chute des vapeurs aqueuses qui devoit en résulter, et qui par leur accumulation et par le froid qu'elles produisoient en se

précipitant pouvoient contribuer à augmenter la réfraction dans les couches qu'elles traversoient. Ces conjectures sont confirmées par plusieurs remarques de M. Vince lui-même. Il a vu plusieurs fois des images partielles de la mer se montrer, par places, au-dessus de l'horizon apparent. Tantôt elles paroissoient ou disparoissoient tout-à-coup, ou bien elles se mouvoient parallèlement à l'horizon avec beaucoup de rapidité. Ces portions de la mer qui se découvroient ainsi, pour quelques instans, semblent bien indiquer qu'elles n'étoient auparavant cachées que par la surface caustique qui s'étendoit au-dessus d'elle, et qui s'abaissoit ou s'entr'ouvroit par l'effet de quelque variation atmosphérique. M. Vince remarque aussi qu'à une certaine époque de l'observation, il a vu un épais brouillard se mouvoir le long de l'horizon avec beaucoup de rapidité, en offrant des ondulations semblables à celles de la fumée d'une cheminée. Mais ce prétendu brouillard que M. Vince suppose venu de l'autre côté de l'horizon, et qu'il imagine être une cause de ces réfractions extraordinaires n'étoit, si je ne me trompe, rien autre chose que les vagues mêmes de la mer, qui, dans leurs ondulations, élevoient de temps en temps leurs sommets jusqu'à la hauteur de la caustique de manière à y produire les images vagues d'un brouillard nuageux. Dans nos observations de Dunkerque, nous avons souvent, M. Mathieu et moi, aperçu de pareilles images qui sont représentées *fig.* 36, et les premières fois que nous les vîmes nous ne pouvions absolument nous expliquer ce qui pouvoit les occasionner, ni comment elles se

montroient ainsi au-dessus de l'horizon apparent. Mais en suivant cet horizon depuis le large où il étoit moins abaissé par la réfraction extraordinaire qui n'étoit dans toute sa force que sur le sable, nous découvrîmes enfin que ces apparences nuageuses n'étoient que le prolongement de l'horizon même, et qu'elles se montroient dans les points où la caustique, par l'effet des ondulations du sol, s'élevoit presque à la hauteur de cet horizon. Dans la figure citée HH' est l'horizon de la mer au large, hh' est l'horizon apparent sur le sable, formant avec un saut brusque la continuation du précédent. Souvent aussi une autre cause produisoit des apparences vaporeuses, semblables à des nuages jaunâtres suspendus dans l'air (voyez *fig.* 60). C'étoient des sommets de dunes qui s'élevant très-peu au-dessus de la caustique présentoient outre leur image directe une image renversée, dont les contours arrondis paroissant suspendus dans l'air complétoient pleinement l'illusion. Mais ces images de sable étoient immobiles, excepté dans les portions de leurs bords qui se trouvant à la hauteur de la caustique, participoient aux ondulations continuelles de la couche d'air inférieure, au lieu que les images d'eau produites par les vagues de la mer étoient mobiles comme elles et sembloient continuellement agitées.

Je tire encore des observations mêmes une autre preuve que les trajectoires n'étoient pas convexes dans toute l'étendue de leur cours, comme cela auroit eu lieu s'il n'y avoit eu dans l'air qu'un seul état de densité décroissante de haut en bas. Cette preuve consiste en ce que les

deux images supérieures dont la plus haute étoit directe et l'autre renversée, ont été plusieurs fois complètes, c'est-dire que le vaisseau y étoit représenté tout entier depuis le sommet des mâts jusqu'au corps même du bâtiment. Or, d'après les expériences que nous avons faites sur le sable à Dunkerque, si ces deux images eussent été données par des trajectoires entièrement convexes vers la mer, ces trajectoires eussent nécessairement formé une caustique qui se seroit élevée au-dessus de la surface de la mer à mesure qu'elle s'éloignoit de l'observateur. Cette caustique auroit donc caché de plus en plus les parties inférieures du vaisseau à mesure qu'il s'éloignoit, et par conséquent les deux images de ce vaisseau n'auroient pas été complètes, non plus que celles de l'homme représenté dans la *fig.* 9.

On peut encore prouver par les observations de M. Vince que la caustique n'étoit pas formée d'une branche unique, mais de deux branches distinctes réunies par un point de rebroussement et dont la plus basse alloit continuellement en s'approchant de la surface de la mer à mesure qu'elle s'éloignoit de l'observateur. Car puisque M. Vince a vu des images complètes de vaisseaux qui se touchoient par le corps même du bâtiment, il falloit bien qu'alors le vaisseau reposât sur la caustique; et comme il en a vu aussi d'autres qui se touchoient par le sommet des mâts, il falloit bien qu'alors le vaisseau se trouvât sous la caustique et la touchât par le sommet de ses mâts. Enfin, puisque les images d'un même vaisseau données par ces deux branches s'écartoient continuellement l'une de l'autre, à

mesure que le vaisseau s'éloignoit, les deux branches de la caustique s'éloignoient donc aussi l'une de l'autre ; ce qui indique une forme semblable à celle de la *fig.* 21 ou à toute autre analogue qui seroit donnée par la combinaison de deux décroissemens de densité contraires.

Cette conséquence déduite immédiatement des observations, s'accordant avec l'état décroissant de la température, et avec toutes les apparences que nous avons discutées, je crois pouvoir admettre comme une chose très-probable que, par l'excès de chaleur de la mer, à à l'époque où a observé M. Vince, les couches inférieures de l'air se trouvoient dans un état de densité croissante de bas en haut, jusqu'à une petite hauteur, au-dessus de laquelle les densités alloient de nouveau en décroissant par suite de l'abaissement de la température, avec assez de rapidité pour donner des images par en haut. D'après les élévations données par M. Vince, nous devons placer l'observateur dans ces couches supérieures, car il dit avoir observé le phénomène à 25 et à 80 pieds de hauteur. Nous avons déjà examiné précédemment les combinaisons de ces deux états contraires, et l'on a vu qu'elle explique très-aisément les images multiples observées au Desierto de las Palmas et à Cullera, phénomènes qui paroissent avoir le plus grand rapport avec ceux que M. Vince a décrits. Nous supposerons donc, conformément à l'endroit cité, que la caustique avoit une forme VRV', *fig.* 38, analogue à celle de la *fig.* 21. Soit AMH la circonférence de la terre, O l'observateur, OMV la trajectoire limite tangente à la sur-

face de la mer. Il s'agit d'examiner les phénomènes résultans de cette loi.

Considérons d'abord un vaisseau placé en SQ un peu au-delà de l'horizon apparent, et supposons que cette portion soit très-voisine du point de rebroussement R. La trajectoire limite OMV coupera la partie inférieure du vaisseau par sa seconde branche et tout ce qui se trouvera au-dessous de cette branche sera invisible directement, mais la partie supérieure enverra par la branche de caustique TV, une image (A) qui sera droite puisqu'elle sera donnée par des trajectoires qui se coupent au-delà de l'objet. Cette image terminée inférieurement par la trajectoire limite OMV paroîtra reposer sur l'horizon. En même temps la partie SP du sommet des mâts, qui s'élevera au-dessus de l'autre branche RV' de la caustique pourra envoyer par les arcs TR et RP une image (B) renversée plus élevée que la précédente, et une image droite (C) encore plus haute par l'arc PV'. A mesure que le vaisseau s'éloignera, la seconde branche de la trajectoire limite le coupera à une plus grande hauteur. Ainsi la partie visible de SQ diminuera successivement, comme si (A) descendoit sous l'horizon : en même temps (B) et (C) paroîtront monter, parce que les trajectoires qui les donnent ayant leurs points de tangence sur des points plus bas de l'arc RV' s'éleveront davantage dans le milieu supérieur. Enfin si le vaisseau s'éloignoit toujours, la branche inférieure RV' de la caustique s'abaissant de plus en plus vers la mer, l'image (A) sera réduite au sommet des mâts; les deux images

(B) et (C) seront complètes ou presque complètes et reposant sur la même caustique se toucheront toujours; et si la branche RV' rase d'assez près la surface de la mer, les points communs aux deux images pourront faire partie du corps même du bâtiment. Alors les deux images (B) et (C) sembleront se toucher par la quille; mais en même temps elles paroîtront fort élevées au-dessus de (A) et sembleront suspendues dans le ciel. C'est ce que représente la *fig.* 39 qui est précisément la *fig.* 1 de M. Vince.

Supposons maintenant que, par l'effet de quelque variation atmosphérique ou par un défaut de sphéricité des couches, il y ait quelque partie de l'espace où la branche inférieure RV' de la caustique pénètre l'intérieur de la mer. Alors si le vaisseau est plus éloigné que cette limite, les deux images (B) et (C) ne reposeront plus sur la caustique qui les donne; par conséquent elles se sépareront, en restant toujours élevées au-dessus de l'horizon apparent, et l'on verra la mer entre deux. C'est le cas de la *fig.* 41 qui est la *fig.* 4 de M. Vince, et les mouvemens qu'il a observés dans les images, ainsi que leur accroissement successif, sont aussi conformes à ce qui précède.

La supposition que nous venons de faire sur la non sphéricité des couches n'est point gratuite, car M. Vince remarque que des vaisseaux également élevés au-dessus de l'horizon apparent présentoient des apparences très-diverses, souvent plusieurs images, comme nous venons de le dire, quelquefois deux seulement, l'inférieure constamment droite, la supérieure renversée, d'autrefois.

enfin on n'en apercevoit qu'une seule directe et reposant sur l'horizon. Les côtes de Calais qui présentoient aussi des phénomènes analogues, offroient aussi les mêmes variétés, quelquefois on les voyoit doubles, un instant après elles étoient invisibles. Toutes ces apparences sont contraires à l'idée d'une sphéricité parfaite des couches d'air qui produisoient ces phénomènes, et l'on conçoit en effet qu'étant le résultat d'un équilibre non stable, ils peuvent difficilement s'accorder avec une forme constante.

Le voisinage des terres qui s'échauffe toujours plus que la surface de la mer est une cause très-propre à altérer ainsi la sphéricité des couches d'égale densité. Les observations de M. de Humboldt à Cumana, en offrent un exemple remarquable. En observant la suspension d'une grande île appelée *la Boracha*, il a constamment remarqué que les deux bords de cette île étoient inégalement relevés. Du côté nord la partie suspendue avoit plus de cinq minutes de longueur, dans le sens horizontal; du côté sud elle avoit à peine 2′. Mais aussi le côté nord regarde l'Océan, tandis que le côté sud regarde le Continent et est très-rapproché de la petite île *Picuita*. Par suite de cette disposition la température de l'air du côté nord de l'île en temps calme, est plus basse que du côté sud, suivant M. de Humboldt, de 1 ou 2 degrés. Mais la température des eaux qui baignoient les rivages étoit à-peu-près la même des deux côtés de l'île. Ainsi lorsque la mer étoit plus chaude que l'air dans ces parages, la différence des températures extrêmes de l'eau et de l'air devoit être toujours moindre du côté sud que du

côté nord, d'où résulte une moindre réfraction négative, et par conséquent une plus petite suspension.

De même, dans les observations de M. Vince, le décroissement de la température au-dessus des terres au lieu où il étoit placé, devoit être moins rapide qu'au dessus de la surface de l'Océan. Cette circonstance ou d'autres variétés locales pouvoient empêcher quelques-unes des trajectoires menées au-dessus de l'observateur, d'avoir leur *maximum* en avant de lui, tandis que d'autres plus élevées et devant avoir leur *maximum* plus loin que les précédentes, au-dessus de la surface de la mer, finissoient par l'atteindre, et redescendoient ensuite dans les couches inférieures. Si cet effet avoit lieu, il devoit faire évanouir la portion de caustique correspondante aux trajectoires dont il s'agit, c'est-à-dire une partie de la branche RV'. Alors l'image droite supérieure (C) ne pouvoit pas se former d'abord, mais seulement quand le vaisseau étoit assez éloigné pour que les trajectoires dirigées vers V' tombassent sur une portion de caustique réelle, au lieu que l'image (B) se formoit encore, par des trajectoires plus basses, au moyen de l'arc antérieur RP et de son prolongement suivant la trajectoire tangente en P. On devoit donc alors ne voir que deux images, l'une (A) inférieure et droite reposant sur l'horizon, l'autre (B) supérieure à la première et renversée. C'est le cas des *fig.* 40 et 40 *bis*, qui répondent aux *fig.* 2 et 3 de M. Vince. Comme les deux images se touchent, il falloit que la branche de caustique PRV se trouvât à peu près à la hauteur du sommet des mâts; mais ces figures elles-mêmes montrent que les couches d'égale densité n'étoient pas

sphériques, puisque dans la première où l'image (B) est déjà toute formée, (A) repose encore tout entier sur l'horizon apparent, tandis que dans la seconde où (A) est déjà descendu sous l'horizon, l'image (B) ne commence qu'à se former. Cette image, suivant la remarque de M. Vince, paroissoit et disparoissoit successivement, découvrant tantôt une plus grande partie du sommet du mât, tantôt une moindre. Il sembloit qu'elle s'élançât de bas en haut avec beaucoup de rapidité comme le rayon d'une aurore boréale. Ces remarques conviennent tout-à-fait à la position que nous attribuons au vaisseau près du pont R de rebroussement de la caustique, point dont la situation doit être variable dans une atmosphère ondulante. De plus dans cette *fig.* 40 *bis*, l'image supérieure (B) resta en contact avec (A) jusqu'à ce qu'elle fût formée complètement, et elle ne s'en sépara qu'après. Cela indique que la branche de caustique RV étoit à fort peu près circulaire dans cette étendue, et qu'ensuite elle alloit en s'élevant au-dessus de la surface des eaux, comme l'exige la marche des trajectoires. Enfin si, dans la *fig.* 41 on suppose un abaissement de la température, le point de contact de la trajectoire limite sur la mer s'éloigne de l'observateur, la seconde branche de cette trajectoire rencontre (A) à une moindre hauteur, de sorte qu'il semble monter sur l'horizon. En même temps l'image supérieure s'évanouit par l'effet de la même cause, on perd d'abord de vue le sommet des mâts, puis la quille, puis la mer, tandis que (B) donné par des trajectoires plus basses, s'abaisse vers (A) et vers l'horizon. C'est ainsi que la *fig.* 41 s'est défaite d'après les observations de M. Vince. Mais comme

nous n'avons malheureusement aucune mesure exacte du phénomène, nous devons borner ici ces considérations, et si nous avons pu tenter d'expliquer généralement les circonstances qui paroissent principales, ce seroit nous hasarder beaucoup que d'entreprendre aussi d'expliquer des variétés sur lesquelles nous n'avons aucuns renseignemens précis. Les deux remarques sur lesquelles M. Vince insiste le plus, sont, 1°. que ces phénomènes n'avoient lieu que pour les vaisseaux situés de l'autre côté de l'horizon; 2°. que plus (*A*) descendoit graduellement sous l'horizon, plus les images (*B*) et (*C*) paroissoient davantage et montoient; réciproquement, lorsque (*A*) montoit (*B*) et (*C*) descendoient. Ces deux circonstances générales sont, je crois, expliquées par ce qui précède d'une manière simple, et conformes à ce que d'autres expériences nous ont appris sur des phénomènes semblables. Le reste, par le défaut de données précises, n'est qu'une hypothèse propre à représenter les faits.

Rapports des dimensions des images. Explication de la suspension.

J'ai réuni dans ce paragraphe un grand nombre de phénomènes curieux que nous avons observés, M. Mathieu et moi, à Dunkerque, et dont nous avons pris des mesures exactes avec le seul répétiteur. Je les rapporterai dans l'ordre où ils se sont présentés à nous et tels que nous les avons décrits sur les lieux. J'essaierai, en les exposant, de montrer leurs rapports avec la théorie que j'ai

établie dans ce mémoire, et j'y ajouterai quelques développemens pour les phénomènes que nous n'avons pas encore considérés.

Lorsque nous aperçûmes pour la première fois ces phénomènes de réfraction extraordinaire, nous étions placés sur le sable, au niveau de la haute mer, un peu au sud du Risban. En regardant l'horizon dans l'ouest le rayon visuel passoit sur des plages sablonneuses qui formoient le prolongement de celle où nous nous trouvions. La vue, de ce côté, étoit terminée par une foule d'objets tels que des clochers, des maisons, des arbres, des dunes sablonneuses.

Étant sur le sable on apercevoit distinctement tous ces objets; mais au-dessous d'eux on apercevoit une ligne blanche horizontale très-distincte et en tout semblable à la lumière du ciel; ce qui produisoit le même effet que si les objets eussent été suspendus dans l'air : on ne voyoit distinctement au-dessous d'eux aucune image renversée.

La *fig.* 42, représente les phénomènes qui avoient lieu lorsque l'œil étoit élevé à 61 centimètres au-dessus du niveau du sol, à l'endroit où nous nous trouvions. *A* est un clocher sur la gauche, le plus voisin de nous; il n'étoit nullement suspendu, et l'on voyoit distinctement avec la lunette les maisons et les arbres jusqu'à son pied.

B est un autre clocher à droite du précédent dont on voyoit le sommet *B* et la partie BB'; mais entre B' et l'horizon apparent il y avoit l'intervalle aérien *FH* de

la couleur du ciel, mais plus brillant. La partie *BB'* étoit très-ondulante, surtout en *B'*, et en général les ondulations sur le sol étoient excessives. L'image *BB'* n'offroit qu'une masse obscure, noirâtre, bien terminée par le haut et sur les bords, mais sans distinction de parties qui pussent faire juger si une portion de cette image étoit le renversement de l'autre. *C* étoit une autre aiguille de clocher très-allongée; *aaaa* sont des têtes d'arbres qui paroissent aussi sans pieds.

Telles étoient les apparences qui avoient lieu lorsque l'œil étoit élevé à 61 centimètres au-dessus du sol environnant; mais ces apparences changeoient avec l'élévation de l'œil.

Par exemple, si l'on se levoit debout, l'œil étant environt à 1.8 mètre au-dessus du sol, on découvroit une plus grande partie des objets *B C*. Leur pied n'étoit plus suspendu en l'air, mais sur des terres qui auparavant étoient invisibles, et qui à leur tour sembloient suspendues au-dessus de l'horizon apparent dont elles étoient séparées par l'intervalle aérien *FH*. (Voyez *fig.* 43) En s'abaissant de nouveau les mêmes apparences se reproduisoient dans un ordre inverse. Les objets perdoient peu à peu de leur pied, et les terres qui leur servoient de base disparoissoient pour ne laisser voir que les apparences de la *fig.* 42. Cela étoit surtout sensible pour le petit édifice *D* qui se voyoit ainsi très-distinctement, dans le cas de la *fig.* 43; mais qui, lorsque l'œil s'approchoit du sol, se perdoit peu à peu, jusqu'à ce qu'il fût noyé dans la mer aérienne qui paroissoit au-dessus de l'horizon.

Ces changemens d'aspect produits pas les changemens de hauteur de l'œil s'expliquent aisément par la théorie exposée dans ce Mémoire. Lorsque l'œil s'abaisse, le point de tangence de la trajectoire limite sur le sol se rapproche de l'observateur, la caustique continue ou discontinue qui commence toujours à ce point de tangence se rapproche aussi ; et comme elle va continuellement et s'élevant sur le sol à mesure qu'elle s'éloigne, elle atteint alors et couvre des objets qui se trouvoient précédemment au-dessus d'elles, lorsqu'elle sortoit du sol dans un point plus éloigné. Si ensuite l'observateur s'élève de nouveau, le point de tangence de la trajectoire limite sur le sol et l'origine de la caustique s'éloignent. Alors les mêmes apparences doivent donc se reproduire en sens inverse, et l'on revoit des objets qui s'étoient précédemment cachés.

J'ai eu l'occasion de faire une observation de ce genre sur la Méditerranée, dans le port de Dénia, étant à bord d'un petit chébeck algérien. Assis sur le pont de ce chébeck, je voyois au large des bâtimens à la voile, qui présentoient au-dessous d'eux une image renversée. Cette image n'étoit point entière ; elle ne comprenoit que le corps du bâtiment et la partie inférieure des voiles. Enfin elle étoit nettement coupée par l'horizon apparent, de sorte que le vaisseau et son image tronquée paroissoient reposer dessus. Mais si, au lieu de rester assis, je me levois peu à peu, en tenant toujours ma lunette dirigée sur le vaisseau, je voyois peu à peu l'horizon apparent s'éloigner, atteindre successivement et faire disparoître les diverses parties de l'image renversée, s'élever

enfin jusqu'au corps du bâtiment, et même le dépasser d'une quantité très-notable. Alors on n'en voyoit plus qu'une seule image droite, située en deçà de l'horizon apparent. Mais en s'abaissant de nouveau l'horizon s'abaissoit aussi, et la seconde image reparoissoit. Ces changemens s'expliquent sans difficulté par le mouvement de translation de la caustique dans le sens horizontal.

Dans nos observations de Dunkerque, la disparition des terres ne se faisoit pas d'une manière aussi régulièrement horizontale, mais elles se fendoient pour ainsi dire et disparoissoient plus tôt dans certains points que dans d'autres, sans doute en raison des ondulations du sol; et peut être aussi en raison des inégalités de la température, qui pouvoit n'être pas la même dans toutes les couches d'air situées à la même hauteur.

Lorsque la hauteur de l'œil étoit de 61 centimètres (*fig.* 42), les images *aaa* des arbres ne se montroient pas constamment, mais par intervalles. Tantôt elles paroissoient tout-à-coup au niveau de la ligne *FF*, tantôt elles s'abaissoient et s'évanouissoient aussi tout-à-coup. Ces apparences changèrent aussi à mesure que la mer en se retirant, abandonnoit, sur ses bords, des plages sablonneuses qui s'échauffoient aux rayons du soleil, avec une évaporation et des ondulations excessives. On voyoit, au moyen de la lunette, des vagues venir de la mer, s'avancer vers le sable, et aller mourir, non pas en s'abaissant à la manière ordinaire, mais en se perdant et s'évanouissant sous la caustique, formée dans l'océan aérien. C'est ce que représentent les *fig.* 36 et 37. Nous

vîmes aussi des oiseaux de mer, qui d'abord ne donnoient qu'une image simple et droite, envoyer ensuite une seconde image renversée, à mesure que, dans leur vol, ils s'approchoient de l'horizon apparent, et qu'ils étoient près de s'y plonger. C'est ce que représente la *fig.* 44. Ces images ne se voyoient jamais en deçà de l'horizon apparent, mais au-delà. Toutes ces apparences s'expliquent d'elles-mêmes d'après notre théorie.

Quelquefois aussi il arrivoit que les oiseaux se perdoient subitement avant d'avoir présenté de doubles images. Nous avons plus d'une fois observé cette particularité. Sans doute alors ils se plongeoient dans la partie de la trajectoire limite, comprise entre le sol et le point où commence la caustique formée par les intersections des trajectoires plus élevées. En effet, dans cette première portion de la trajectoire limite, il y a disparition sans renversement. C'étoit, au reste, un spectacle curieux que celui de ces nuées d'oiseaux qui, s'approchant avec rapidité de l'horizon, doubloient tout-à-coup leur nombre, leur marche et leurs mouvemens.

Un peu à droite des objets terrestres que nous avons décrits, nous vîmes aussi les apparences suivantes qui se maintinrent pendant tout le temps des observations. (Voyez *fig.* 45).

C'étoit comme une espèce d'île où l'on distinguoit une flèche très-allongée, que l'on a désigné par *G* dans la figure et qui étoit sans doute un clocher. Près d'elle, sur la gauche on voyoit un autre clocher moins aigu, qui est désigné par *E*. La partie inférieure présentoit une con-

formité de contours frappante avec la partie supérieure. Il y avoit en E' et G' deux prolongemens correspondans aux deux élévations F, G, et le tout étoit suspendu dans le ciel. D'après ces rapports de forme il paroissoit bien que l'image inférieure étoit le renversement de l'autre, et que cette apparence d'une île jaunâtre et élevée étoit produite par des sommets de dunes qui s'élevoient au-dessus de la caustique cc, évidemment indiquée par le contact des deux images.

Au coucher du soleil les phénomènes cessèrent. Il n'y eut plus de renversement, ni de suspension sensible.

Le mauvais tems ne permit pas de revoir ces phénomènes avant le 7 mars. Nous les observâmes dans un lieu voisin du précédent, mais sur un terrain plus bas, que le reflux abandonne au pied même et à la gauche du Risban. Ces circonstances étoient plus favorables à cause de l'abaissement de l'œil, et parce que le rayon visuel rasoit plus long-temps et de plus près la surface sablonneuse, avant de parvenir aux objets éloignés. Lorsque nous arrivâmes le matin dans cet endroit, toute la côte dans l'ouest, qui nous avoit paru seulement suspendue la veille, l'étoit plus fortement, et présentoit, outre l'image directe, une image renversée ; les objets situés au-dessus des dunes, particulièrement le grand clocher à gauche, se voyoient aussi renversés. Mais il y avoit cette différence, que l'image renversée des dunes étoit suspendue en l'air, tandis que l'image renversée du clocher, descendoit plus bas, presque jusqu'à l'horizon apparent, qu'elle touchoit quelquefois, et dont quelquefois elle paroissoit un peu séparée. La partie inférieure de cette image étoit

extrêmement vague, indistincte, mal terminée et très-applatie, tandis que celle des sommets des dunes étoit très-nette et avoit ses contours bien tranchés. Du reste il n'y avoit pas la moindre apparence de perspective aérienne : le clocher paroissoit comme un plan obscur sur le fond du ciel. Ces apparences, dessinées exactement sur les lieux, sont représentées dans la *fig.* 46.

La correspondance des contours faisoit juger d'une manière très-précise la ligne de contact *cc′* des deux images directes et renversées. Cette ligne indique évidemment la section des dunes par la surface caustique, section qui étant parcourue par le fil transversal de la lunette, paroissoit sensiblement horizontale, sans doute à cause du grand éloignement des objets. Le sommet des dunes seul s'élevant au-dessus de la caustique, leur pied étoit invisible, comme la partie inférieure de l'homme, représentée dans la planche 2. De plus, nous avons montré par l'expérience, que, dans ce cas, des portions d'égale hauteur dans l'image directe, donnent dans le renversement, des images d'autant plus petites, que ces parties elles-mêmes sont plus élevées au-dessus de l'horizon apparent. Voilà pourquoi l'image renversée de la pointe du clocher étoit beaucoup plus applatie que celle du sommet des dunes. En mesurant les distances zénithales des diverses portions de l'image au moyen du cercle répétiteur, nous trouvâmes les résultats suivans (1).

---

(1) Les circonstances météorologiques de ces observations et des suivantes ont été rapportées dans le tableau de la page 32, pour le 7 mars.

Dépression de l'horizon apparent de la mer, au large	2′ 52″33 . .	4 observ.
Dépression de l'hor. appar. *AA′* sur le sable .	6′ 42″66 . .	6 observ.
Distance du sommet *E* du clocher au zénith . . 90° —	7′ 54″25 . .	6 observ.
Ce qui donne le diamètre apparent de *AB* . .	14′ 36″91	

En mesurant séparément *AC* et *BC* on a trouvé :

AC.	5′ 41″80 . .	5 observ.
BC.	8′ 54″60 . .	5 observ.
Ce qui donne, comme précédemment . . .	14′ 36″40	

On voit que l'image directe *BC* surpasse beaucoup l'image renversée *AC*, ce qui doit être en effet d'après ce que nous avons vu précédemment. De plus, la somme des deux distances $AC + BC = 14' 36''40$, ce qui confirme la hauteur de *E* mesurée directement. Mais comme *E′* n'étoit pas toujours nettement séparé de l'horizon, on pouvoit craindre que l'image renversée du clocher ne fût pas complète ; c'est pourquoi nous aurons recours, pour établir cette circonstance, aux observations des jours suivans.

Par une opération trigonométrique exacte, nous avons trouvé la distance du clocher au point de notre station, égale à 8384 mètres. On a déjà vu que le terrain n'étoit pas de niveau, et que la pente de sa surface où tomboit l'horizon apparent, dans cette observation et dans les suivantes, s'élevoit suivant une inclinaison de 1′ 15″ en s'éloignant de l'observateur.

Toutes les terres qui, la veille, se voyoient suspendues dans le nord-ouest, avoient disparu aujourd'hui et étoient devenues complétement invisibles. Elles étoient donc

entrées sous la caustique, et cessoient d'être aperçues.

C'est sans doute pour cela que la première fois on apercevoit par intervalles des arbres et d'autres petits objets qui se montroient tout-à-coup, et tout-à-coup disparoissoient pour se remontrer ensuite. Il paroît bien que la caustique passoit alors à fort peu près à cette hauteur, et que tantôt elle étoit au-dessus, tantôt au-dessous, par l'effet des continuelles variations qu'elle éprouvoit.

Nous fîmes ce jour-là, sur l'horizon de la mer, une remarque analogue à celles que j'ai déjà rapportées. En mettant le fil horizontal du cercle sur cet horizon au nord, et au large, on le voyoit bien terminé, comme à l'ordinaire; mais en donnant au cercle un mouvement azimuthal, et ramenant peu à peu la lunette du nord à l'ouest, sans changer son inclinaison, la netteté de l'horizon s'affoiblissoit de plus en plus. Enfin la mer disparoissoit entièrement, l'horizon n'étoit plus indiqué que par une espèce d'ondulation vague, comme le représente la *fig.* 37; et au-dessous, sur le sable, on voyoit un autre horizon apparent, bien net et bien tranché. Pour concevoir la raison de ces apparences, il suffit de savoir que dans cette dernière direction, la surface du sable étoit plus élevée que du côté du nord.

Le lendemain du jour précédent, le temps fut encore plus favorable. C'est ce jour-là que nous avons mesuré les ordonnées de la caustique et de la trajectoire limite, ainsi que je l'ai rapporté dans la page 78. La température de l'air sur le sable étoit plus élevée que la veille, tandis qu'à un mètre de hauteur elle étoit un peu plus basse.

Le baromètre étoit aussi plus élevé de 3 millimètres. Aussi les phénomènes du renversement étoient bien plus considérables. Les dunes situées en avant du clocher, avoient complétement disparu, elles s'étoient plongées sous la caustique. Quelquefois pourtant leurs sommets les plus élevés s'élevoient jusqu'à son niveau, comme une ligne de vapeur, et leur apparition sur le milieu du clocher, indiquoit exactement le point où la caustique le coupoit. Voyez *fig.* 47 et 48. Cette caustique étoit donc plus élevée que la veille, puisqu'elle cachoit des objets qui étoient alors visibles, mais aussi l'horizon apparent étoit plus bas, par conséquent plus rapproché de l'observateur, ce qui est conforme à notre théorie; du reste il n'y avoit pas plus de perspective aérienne que la veille. Voici les dimensions des images observées au cercle répétiteur :

Dépression apparente de l'horizon AA', *fig.* 47 . .	6′ 57″42 . .	6 observ.
Longueur de AC	7′ 48″72 . .	4 observ.
Longueur de BC	8′ 34″16 . .	4 observ.
Distance de E' à l'horizon apparent AA'	2′ 13″6	
Dist. du sommet E du clocher au zén. conclue, 90° —	9′ 25″46	

Remarquons d'abord que le sommet du clocher étoit plus élevé que la veille de 31″. Cela tient à l'accroissement de la densité dans les couches supérieures : d'où résulte un accroissement de la réfraction terrestre qui agissoit seule sur le sommet E; néanmoins la distance BC de ce sommet à la caustique est plus petite que la veille, parce que la caustique s'est élevée d'une quantité plus considérable.

On voit par ces mesures, que l'image directe BC surpasse AC, c'est-à-dire, surpasse la distance de la caustique à l'horizon apparent. Or le point E', image renversée du sommet du clocher, ne descend pas jusqu'à cet horizon. Par conséquent l'image renversée est bien plus courte que l'image directe, et d'après les mesures précédentes, la différence est de 2′ 59″, ce qui est conforme aux résultats que les expériences avec la règle verticale, page 79, avoient fait prévoir.

D'après les mesures précédentes, on trouve encore que le point C, intersection de la caustique, est élevé de 51″30 au-dessus du niveau de l'observateur. Or, puisqu'à la hauteur de l'observateur, et même à une hauteur beaucoup moindre, la densité et la température étoient sensiblement constantes ; il étoit impossible, si les couches eussent été horizontales, que la caustique s'élevât au-dessus du niveau de l'observateur. Puis donc que cette élévation s'observoit réellement, il falloit que le terrain allât en s'élevant à mesure qu'il s'éloignoit de l'observateur ; ce que le nivellement a vérifié. L'inclinaison propre du terrain s'ajoutant alors à celle du rayon lumineux, relevoit, comme nous l'avons dit plus haut, les secondes branches des trajectoires, et c'eût été réellement au-dessus de cette inclinaison totale qu'il auroit fallu prendre les hauteurs apparentes, pour connoître leurs véritables valeurs, relativement au phénomène que nous examinons.

La grande influence de l'inclinaison du terrain sur ces apparences, se montra plus évidemment encore dans une expérience que nous fîmes le 10 mars à la même

station. Ce jour-là les différences des températures extrêmes étoient très-foibles, comme le montre le tableau de la page 32, et le renversement du clocher n'étoit pas complet. Mais, à cause du peu d'agitation de l'air résultant de cette foible différence de température, la partie de l'image qui étoit renversée, et celle des sommets des dunes qui se projetoient en avant, étoit d'une netteté extrême, et la perspective aérienne étoit assez bien conservée pour que l'on pût distinguer les saillies des objets. (Voyez *fig.* 49.) En plaçant successivement le cercle à la hauteur de $1^{m}15$ et à $0^{m}61$ on prit les dépressions du clocher et de la caustique, et l'on eut les résultats suivans :

Hauteur du cercle, 1.15; distance de l'horizon apparent *AA'* au zénith	3′ 56″52
Distance du sommet *E* du clocher au zénith	90° — 8′ 20″
Distance de l'intersection *C* de la caustique au zénith . .	90° + 0′ 30″
Donc, distance angulaire du sommet du clocher à la caustique	8′ 50″
Hauteur du cercle, 0.61; distance du sommet *E* du clocher au zénith	90° — 8′ 14″
Distance de l'intersection *B* de la caustique au zénith . .	90° — 1′ 33″
Donc, distance angulaire du sommet du clocher à la caustique.	6′ 41″

La partie du clocher qui s'élevoit au-dessus de la caustique, étoit donc moindre quand l'observateur étoit plus abaissé, c'est-à-dire qu'alors la caustique rencontroit le clocher plus haut. C'est l'effet du rapprochement de l'origine de la caustique, peut-être aussi des inflexions

occasionnées dans cette courbe par les ondulations du terrain et des couches d'air échauffé qui en recouvroient la surface.

Les observations précédentes étoient plus que suffisantes pour constater les généralités du phénomène ; elles en fixoient même les détails avec autant de précision que le comporte l'irrégularité des circonstances dont ces observations dépendent. Mais nous devions encore examiner la marche même du phénomène, de quelle manière il commence, et de quelle manière il finit. Nous en avons heureusement trouvé l'occasion le 19 mars, et cette occasion a été si complète, qu'elle a suffi pour fixer toutes nos idées, et pour nous découvrir la véritable cause du phénomène singulier, et peut-être le plus fréquent de tous, où l'on observe une simple suspension des objets éloignés, sans image renversée sensible.

Ce jour-là on avoit pour circonstances météorologiques :

Thermomètre sur le sable et au soleil .	+ 13.4	Baromètre = 0.76474
Sur le sable et à l'ombre	11.8	Therm. du barom. 14.3
A $1^{m}15$ et à l'ombre	11.3	
Température de la mer près du rivage .	+ 7.8	Mer plus froide que l'air.

Nous nous plaçâmes d'abord dans notre station ordinaire, le centre du cercle étant à 1.15 au dessus du sol. La dépression de l'horizon apparent sur le sable étoit de $4'\ 27''16$. Le clocher étoit en partie renversé, comme le représente la *fig.* 50. L'élévation apparente de la caustique au-dessus de notre niveau, n'étoit que de $8''$. Tous ces résultats indiquent un renversement très-foible, ce qui

s'accorde avec le peu de différence des températures. Cependant d'autres objets éloignés, un clocher peu élevé, des sommets de dunes, etc. étoient complétement renversés et suspendus en l'air.

Nous fûmes bientôt obligés de quitter notre station à cause de la mer montante, qui venoit la couvrir, et nous allâmes nous établir dans un endroit plus élevé, où nous savions que le flux n'arrivoit pas. Les phénomènes de la suspension et du renversement étoient moins sensibles qu'en bas, et même ils n'avoient plus lieu pour quelques objets situés sur notre gauche; mais ils l'étoient encore assez, pour qu'on ne pût les méconnoître principalement sur les dunes et sur les terres éloignées dans l'ouest, dont les contours se répétoient dans leurs images renversées. Ces objets diversement éloignés de la mer, nous offroient des termes de comparaison, pour suivre la marche des modifications que la mer alloit y apporter, en couvrant la surface du sable et abaissant sa température. En effet, la température de la surface de la mer, sur le bord, n'étant que de 7°8, étoit beaucoup plus basse que celle de la surface du sable, et même que celle de l'air à notre hauteur, laquelle étoit peu différente de 12°. Aussi l'horizon apparent observé sur la surface de la mer, dans le nord et au large, n'étoit-il pas déprimé, mais *élevé* de 2″ secondes au-dessus de l'horizontale menée par notre œil; et pourtant dans notre nouvelle station, le cercle étoit de 1^m49 au-dessus du sol, qui se trouvoit lui-même au niveau de la haute mer. Cela posé, voici la marche du phénomène telle qu'elle se trouve consignée dans notre

registre, d'après la description faite sur les lieux. La mer, en montant, commence d'abord par couvrir le sable et les objets situés à notre droite et vers le large. Alors, pour ces objets, la suspension diminue. L'image renversée s'amincit, en restant toutefois complète, car elle ne descend pas jusqu'à l'horizon apparent. Elle s'applatit ainsi continuellement à mesure que la mer monte davantage ; les contours sont moins arrondis, moins marqués ; elle est bientôt terminée inférieurement par une ligne qui n'offre plus que de légères sinuosités, qui devient ensuite parallèle à cet horizon, et finit par se confondre avec lui. Le décroissement progressif de l'image est extrêmement sensible et facile à observer. On voit ainsi l'horizon apparent s'élever peu à peu sur notre droite, et atteindre les objets suspendus ; ceux qui se trouvent plus à notre gauche, et plus éloignés de la mer, présentent encore une suspension assez forte, et des images renversées dont les contours sont très-sensibles, quoiqu'elles soient déjà diminuées. Pour ces derniers objets la suspension et le renversement ont toujours eu lieu, soit que la mer ne couvrît pas entièrement la partie du sol sur laquelle passoient les rayons visuels menés de nos yeux à ces points, soit qu'elle ne les couvrît que d'une couche d'eau peu épaisse et déjà échauffée par le contact du sable sur lequel elle avoit dû passer auparavant. Mais en allant vers le large, les images renversées sont devenues tellement minces qu'on ne peut plus en distinguer les contours, quoiqu'elles soient encore suspendues sensiblement. Cette élévation successive de l'horizon est fidè-

lement représentée dans la *fig.* 51 qui a été dessinée sur les lieux mêmes, à la vue des objets. Quoique l'inflexion singulière de l'horizon apparent fût visible à l'œil, nous en avons pris des mesures qui la constatent, et qui ne laissent aucun doute sur ce point. En effet, les dépressions de l'horizon, observées dans les diverses parties de sa courbure, n'étoient pas les mêmes, car on avoit au même instant :

Élévation de l'horizon appar. au large,	+ 0′ 0″99	6 obs.	Hor. excellent.
Dépression de l'horizon apparent en *A*.	2′ 25″39		

la dépression de l'horizon en *B* étoit bien plus grande encore ; car une partie du télégraphe *T* avoit son image renversée au dessus de l'horizon apparent, et cependant le sommet *B* des dunes au pied de ce télégraphe, n'excédoit que de 26″ la hauteur de l'horizon de la mer au large. On mettoit sur cet horizon le fil transversal de la lunette, et faisant ensuite tourner le cercle sans changer son inclinaison, on voyoit l'horizon apparent se détacher peu à peu, et s'abaisser au-dessous du fil, et au plus grand abaissement, en *B*, le fil se trouvoit tangent au sommet de la côte sur laquelle le télégraphe paroissoit. En *A*, la distance de l'horizon apparent aux dunes, est égale à l'épaisseur du fil. Les *fig.* 52, 53, 54 et 55 représentent des portions de côtes dont les images renversées sont plus ou moins applaties et ont des contours plus ou moins sentis, selon leur proximité de la mer.

Ces apparences de suspension sans renversement sensible, ont duré autant que la présence de la mer sur la portion de la plage étendue dans la direction des ob-

jets. A mesure que la mer, en se retirant, a découvert la surface du sable, nous avons vu se reproduire dans un ordre inverse, tous les phénomènes que nous avions observés, lorsqu'elle montoit : la suspension augmentoit, ou plutôt l'horizon apparent s'abaissoit, les images renversées commençoient à arrondir leurs contours, et grandissoient successivement; mais l'horizon de la mer au large, conserva toujours la hauteur qui convenoit à la basse température des eaux. Après que le renversement eut reparu et que la mer se fut beaucoup abaissée au-dessous de notre niveau, nous trouvâmes la dépression au large seulement de 0″94; ce qui correspond bien à la grande élévation que nous avons observée précédemment.

Les observations que nous venons de rapporter montrent clairement que, dans le phénomène de la suspension, l'image renversée existe toujours, mais qu'elle est seulement réduite à une épaisseur infiniment petite. La marche des rayons visuels confirme cette vérité; car la ligne aérienne qui s'aperçoit au-dessous des objets, ne peut être que l'image renversée du ciel qui est au-dessus. Or si le ciel est vu renversé, le sommet de l'objet doit l'être aussi par les mêmes rayons; par conséquent l'objet a nécessairement son image renversée au-dessous de lui; et si on ne l'aperçoit pas, c'est parce que les dimensions de cette image sont insensibles dans le sens vertical.

Ce phénomène qui jusqu'ici n'avoit pas été expliqué, se trouve donc ainsi résolu de la manière la plus simple. Nous en avons vu encore plusieurs autres exemples que nous n'avons pas négligé de recueillir, et qui s'accordent

parfaitement avec ce qui précède, comme cela devoit nécessairement arriver. Telles sont les apparences représentées dans les *fig.* 56, 57; ce sont des images du même clocher que nous avons observé tant de fois, mais elles sont vues de plus bas, l'œil étant seulement 0m99 au-dessus du sol. Je dois aussi avertir qu'elles sont observées de diverses places; car les ondulations du sol contribuent certainement à modifier les apparences qu'on observe par la réflexion sur sa surface. Ainsi l'image 56, qui est déjà applatie, est vue de notre station ordinaire. Mais l'image 57 est vue d'un endroit différent. Ici l'image inférieure est infiniment applatie, et le clocher paroît simplement suspendu par sa base. Mais en s'élevant peu à peu sur le sol, on voyoit cette image s'agrandir et s'alonger jusqu'à l'horizon, quoique celui-ci s'abaissât en même temps. Cependant un observateur placé de manière à ne voir que l'image 57, auroit certainement pensé qu'il n'y avoit aucune espèce de renversement. Nous avons aussi observé de ce point le sommet d'une maison dont les cheminées inégalement élevées, présentoient dans leur renversement des longueurs presque égales, comme on le voit dans la *fig.* 58; ce qui est conforme aux expériences faites avec la règle verticale, et représentées dans la *fig.* 10.

Dans ce même point, une petite cabane éloignée de 4236 mètres, nous présenta trois images, deux droites et une renversée entre les deux autres. Voyez *fig.* 59. Mais l'image inférieure étoit extrêmement applatie et c'étoit le sens de sa convexité seule qui indiquoit sa direction.

Peut-être les ondulations du terrein contribuoient-elles à ce phénomène, en multipliant les branches de la caustique.

Cette même maison, vue de notre première station, nous a pendant long-temps embarrassés par les singuliers aspects qu'elle présentoit ; se projetant sur un groupe de dunes sablonneuses, éloignées de 5704 mètres, elle s'élevoit dans l'air avec elles par l'effet du mirage, et le tout formoit dans le ciel un nuage jaunâtre, avec des contours bien terminés, et dans son milieu une sorte de tache ovale avec des bords noirs.

Nous ne pouvions absolument concevoir ce qui produisoit de si singulières apparences, ni comment une portion de dune arrondie pouvoit ainsi présenter une ombre, même dans la partie tournée du côté du soleil. Mais enfin, en observant les modifications de ces aspects bizarres, nous découvrîmes que le prétendu nuage étoit formé par des sommets de dunes suspendues en l'air avec leur image renversée au-dessous, et que la tache noire n'étoit autre chose que le devant d'une maison dont le toit avancé portoit une ombre précisément du côté où nous la soupçonnions le moins, d'après la supposition que c'étoit un corps arrondi. On voit par là combien les objets sont défigurés, combien les jugemens sont incertains dans ces circonstances où l'œil est privé des indications de la perspective aérienne, absolument détruite par les excessives ondulations de l'air. Toutes ces apparences sont représentées dans les *fig.* 60, 61 et 62, avec les modifications successives qu'elles ont éprouvées et qui nous ont fait enfin reconnoître le prestige. On voit

que les contours de l'image inférieure s'aplatissent de plus en plus à mesure que, par l'abaissement de la température, elle descend sur l'horizon : ce qui s'accorde avec les autres résultats que je viens de rapporter.

C'est sans doute à cette diminution excessive de l'image inférieure qu'il faut attribuer tous les phénomènes de suspension, sans renversement sensible, qui s'observent souvent à la mer sur des objets très-bas et très-éloignés, tels que des îles ou des vaisseaux. Nous en avons rapporté des exemples observés par M. de Humboldt en Amérique. Nous avons vu des apparences semblables, M. Mathieu et moi, sur la tour de Dunkerque, en observant, avec une lunette, un navire à la voile à une grande distance, un jour que l'horizon étoit assez clair, quoique légèrement vaporeux. Ce navire étoit entièrement suspendu en l'air, à une hauteur très-petite, mais cependant sensible, au-dessus de l'horizon apparent. Mais, malgré toute l'attention possible, on n'y reconnoissoit point d'image renversée : sans doute cette image existoit, mais elle se trouvoit réduite à des dimensions infiniment petites, comme dans les cas précédens.

Pour montrer en général comment cela peut se faire, supposons, comme dans nos expériences de Dunkerque, *fig.* 11, que la variation de densité n'a lieu que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de laquelle l'observateur se trouve placé; et supposons encore, conformément à ces apparences, que la caustique s'élève aussi au-dessus des couches de densité variables, à la distance où se trouvent les objets dont on observe le renversement. Cela posé, si, par l'œil de l'observateur et dans la couche de den-

sité constante, on mène une ligne droite qui servira d'axe des x, un rayon visuel parti de l'œil, en faisant un angle I avec cet axe, pénétrera dans les couches de densité variables, s'y repliera et en sortira ensuite, en se relevant, pour rencontrer de nouveau l'axe des x à une distance A qui sera fonction de I, de la forme des couches et de la variation de la densité. Si les couches sont planes, le rayon émergent coupera encore l'axe des x sous le même angle I que le rayon incident; mais si les couches ont une courbure quelconque, comme on doit l'admettre en général, le rayon réfléchi fera avec l'axe un angle I' différent de I, mais fonction de cette quantité. Ainsi, en rapportant tout à des coordonnées rectangulaires x et z, l'équation du rayon émergent, devenu ainsi rectiligne au-dessus de l'axe des x, sera

$$x = A + \frac{z}{tang.\ I'}$$

les z étant pris positivement au-dessus de l'axe des x. Supposons que ce rayon ainsi prolongé rencontre un certain point d'un objet éloigné situé pareillement au-dessus de l'axe des x, dans les couches de densité constante. Si nous considérons un autre point du même objet situé infiniment près du premier, dans la même verticale, ou, pour parler plus exactement, à la même distance de l'axe des z, x restera le même; mais l'angle d'incidence I variera, et par suite l'amplitude A, l'angle d'émergence I' et la hauteur z, c'est-à-dire que l'on aura

$$0 = \frac{dA}{dI} - \frac{z}{sin^2.\ I'} \cdot \frac{dI'}{dI} + \frac{1}{tang.\ I'} \cdot \frac{dz}{dI}$$

Soit z' la hauteur à laquelle le premier rayon émer-

gent vient toucher la caustique, ce sera aussi dans ce point qu'il se coupera avec le rayon infiniment voisin, et la condition des intersections sera

$$o = \frac{dA}{dI} - \frac{z'}{sin^2. I'} \cdot \frac{dI'}{dI}$$

Ceci suppose que l'intersection des deux rayons consécutifs se fait dans la couche de densité constante, comme cela est arrivé dans les observations de Dunkerque où la caustique atteignoit et surpassoit des objets fort élevés au-dessus du sol. Maintenant si l'on fait

$$z = z' + h$$

en combinant les deux équations précédentes, on aura

$$o = -\frac{h}{sin^2. I'} \cdot \frac{dI'}{dI} + \frac{1}{tang. I'} \cdot \frac{dz}{dI}$$

ce qui donne

$$dI = \frac{sin. 2I'}{2h. \left(\frac{dI'}{dI}\right)} dz$$

Ce qui nous intéresse spécialement ce sont les images renversées. Dans ce cas il faudra que les trajectoires se coupent avant l'objet : par conséquent le point de tangence de deux trajectoires consécutives sera au-dessous de l'ordonnée z, par conséquent h sera positif.

De plus, nous supposons, comme dans les observations de Dunkerque, que les intersections se font au-dessus de la couche de densité variable. Alors I' augmente quand I augmente, et par conséquent $\frac{dI'}{dI}$ est positif. D'après cela, en examinant la valeur de dI que nous venons de trouver, on découvre les propriétés suivantes :

1°. Le coefficient $\frac{\sin.\ 2\ I'}{2\ h.\ \frac{dI'}{dI}}$ est positif; ainsi dI est de même signe que dz, et I croît en même temps que z.

2°. A partir de la même ligne horizontale, c'est-à-dire des mêmes valeurs de I et de h, on voit que les dI sont proportionnels aux dz. Ainsi les différences de hauteur qui existent dans l'image directe se retrouveront dans les contours de l'image renversée.

Quant aux rapports de l'image renversée avec l'image directe, ils dépendent du coefficient $\frac{\sin\ 2\ I'}{2\ h.\ \frac{dI'}{dI}}$. Par exemple, si les couches sont planes, $I' = I$, et l'on a

$$dI = \frac{\sin.\ 2I}{2\ h} \cdot dz$$

Considérons une ligne circulaire et horizontale concentrique à l'observateur, et menée à la hauteur z. Par une certaine température, tous les points situés sur ce cercle répondront à une même valeur de I, et les contours de l'image seront plus ou moins prononcés, suivant que le rapport $\frac{dI}{dz}$ sera plus ou moins considérable.

Mais supposons que la température s'abaisse. Alors la caustique s'abaisse vers le sol, et h augmente en même temps que I diminue. Par ces deux raisons le rapport de dI à dz devient moindre et l'image renversée s'applatit. Enfin, lorsque $I = 0$, dI est nul quel que soit dz; alors le bas de l'image renversée devient rectiligne, et son épaisseur est infiniment petite. C'est le cas de la suspension sans renversement apparent.

Enfin, pour n'omettre aucun des phénomènes de réfraction extraordinaire dont j'ai pu avoir connoissance, je terminerai ce mémoire par une observation que nous avons faite à Dunkerque M. Mathieu et moi : c'est qu'il arrive fort souvent de voir sur la mer plusieurs horizons très-distincts les uns au-dessus des autres, avec des intervalles aériens qui les séparent. Quelquefois on voit ces intervalles se former sous les yeux, lorsqu'on observe attentivement. La partie la plus voisine de l'observateur devient foncée, la plus éloignée pâlit et enfin disparoît. Ce phénomène est rarement durable, et les horizons interposés varient de nombre et de place sans aucune loi. Le phénomène est quelquefois si marqué que l'on peut prendre hauteur au-dessus d'un horizon ou de l'autre. On en voit, *fig.* 59 *bis*, un des exemples les plus nets que nous ayons observés. Il y avoit ce jour-là deux horizons bien distincts, et sur le plus éloigné on voyoit une barque qui ne présentoit point d'image renversée; quelquefois cette barque étoit elle-même un peu suspendue en l'air. D'après les distances au zénith mesurées au cercle répétiteur, on avoit :

Dépression de l'horizon inférieur *AA'* . . .	3′ 5″4 . .	6 observations.
Dépression de l'horizon supérieur *aa'* . . .	0′ 52″6 . .	6 observations.
Dépression de la partie infér. de la barque, quand elle se détache de l'horizon supérieur .	0′ 41″8 . .	4 observations.

Le centre du cercle étoit à $1^{m}.15$ au-dessus du sol, comme à l'ordinaire, et notre hauteur au-dessus du niveau de la mer n'étoit guère plus considérable. La petite dépression de l'horizon supérieur indique une réfraction

positive fort considérable, tandis que la dépression de l'horizon inférieur indique une réfraction négative. Sans doute ces différences sont produites par de petites variations locales de pression ou de température qui se font sur la surface de la mer, et qui courbent diversement le rayon lumineux. Les bancs de sable extrêmement multipliés sur les côtes de Dunkerque, et dont quelques-uns mêmes se découvrent au loin à la marée basse, peuvent avoir une grande influence sur ces phénomènes, en modifiant la température de l'eau qui les recouvre, et qui, lorsqu'elle est peu profonde, doit s'échauffer davantage par les rayons du soleil, comme on l'observe généralement. Un souffle de vent plus ou moins froid qui s'excitera dans un endroit et non non pas dans un autre, comme cela arrive souvent, peut encore produire des apparences de ce genre, et c'est à cela sans doute qu'il faut attribuer la multiplicité des zones plus ou moins colorées et celle des horizons apparens que l'on aperçoit ordinairement sur la surface de la mer dans les temps variables : ces apparences passagères sont encore des phénomènes produits par la réfraction.

Je ne finirois point si je voulois examiner en détail tous les accidens de ce genre que la nature présente à un observateur attentif. Mon but sera rempli si j'ai réussi à montrer que ces phénomènes si nombreux et si variés ne sont que de simples jeux de la lumière produits par les inflexions des rayons dans les différentes couches d'air.

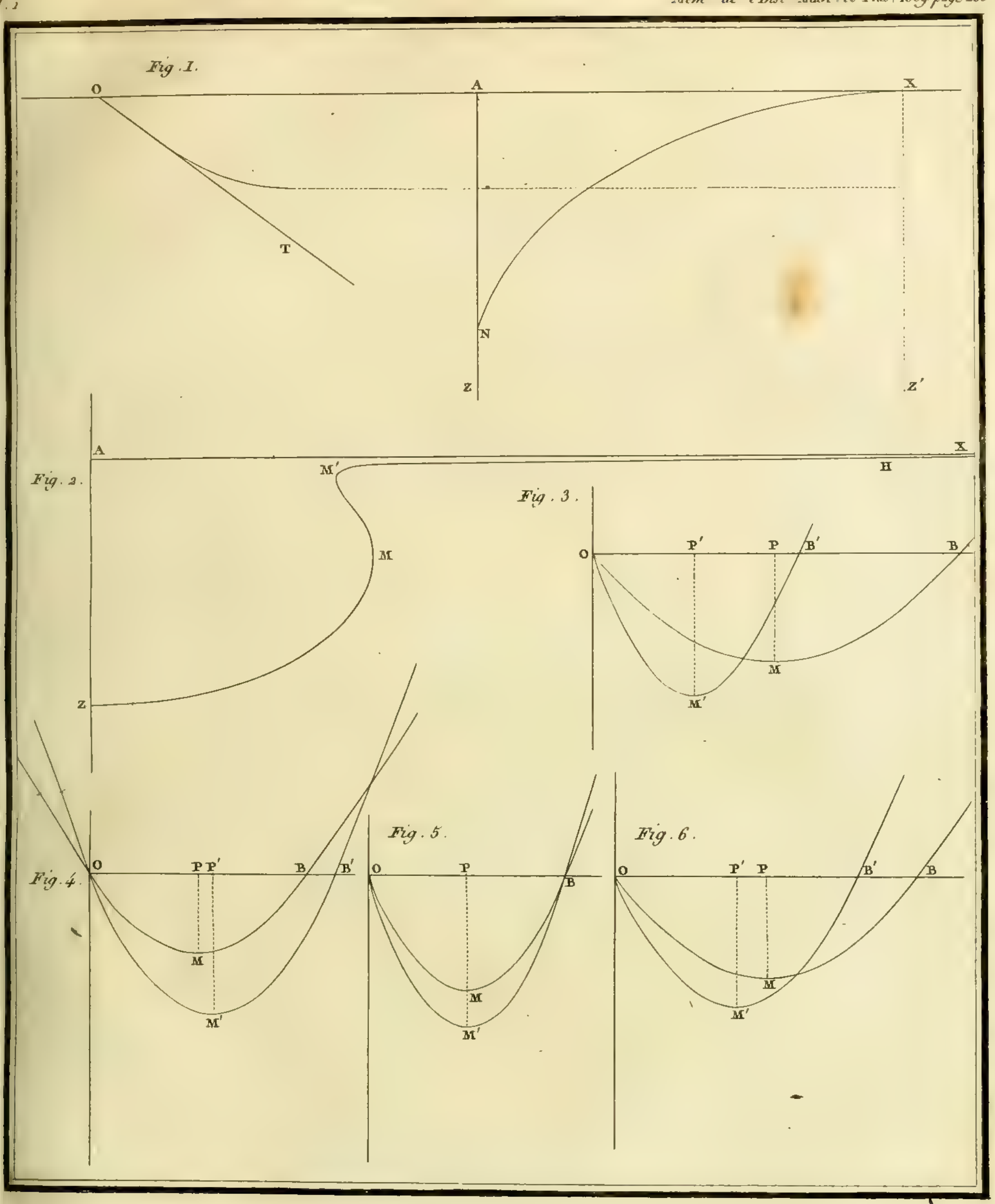
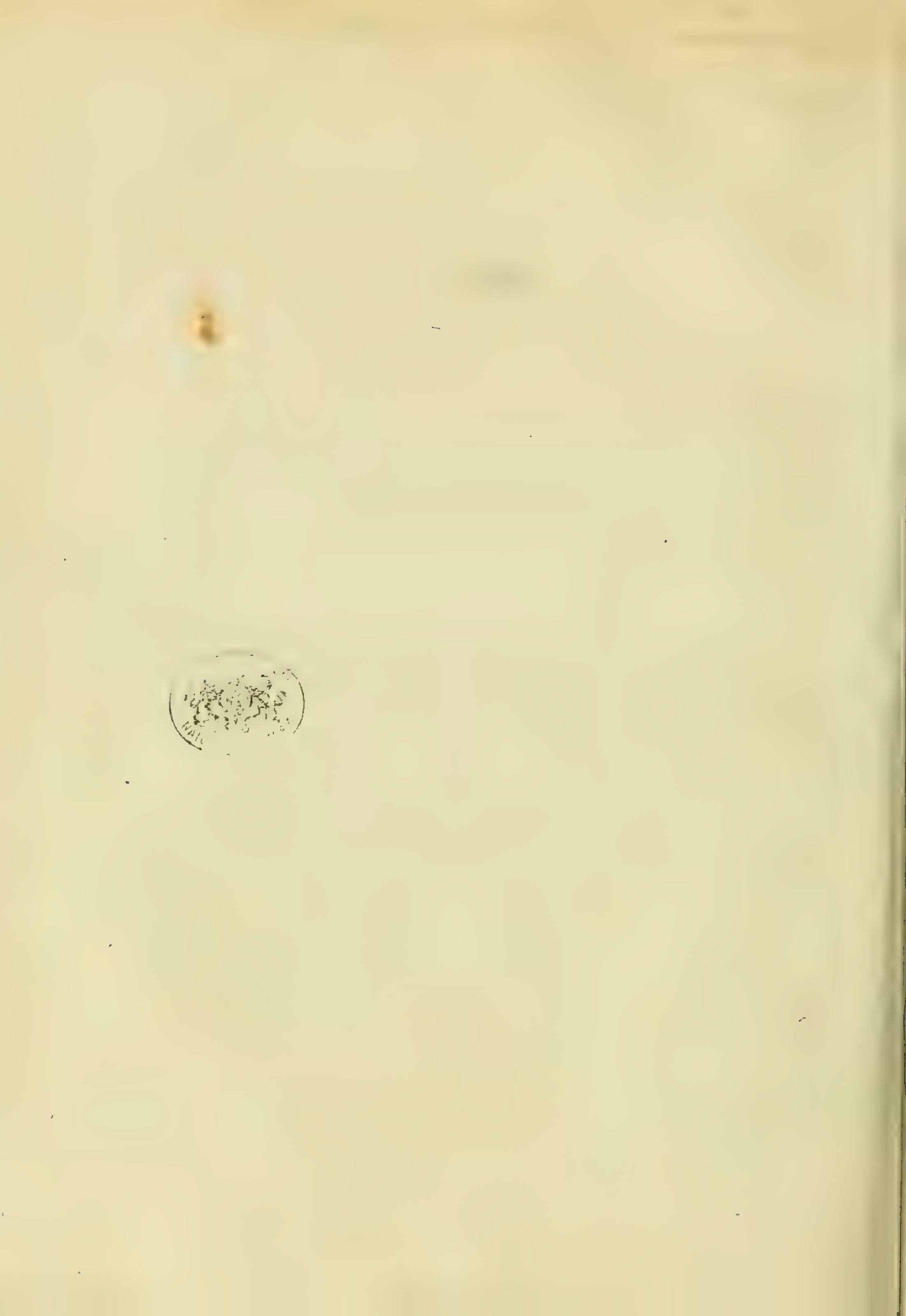
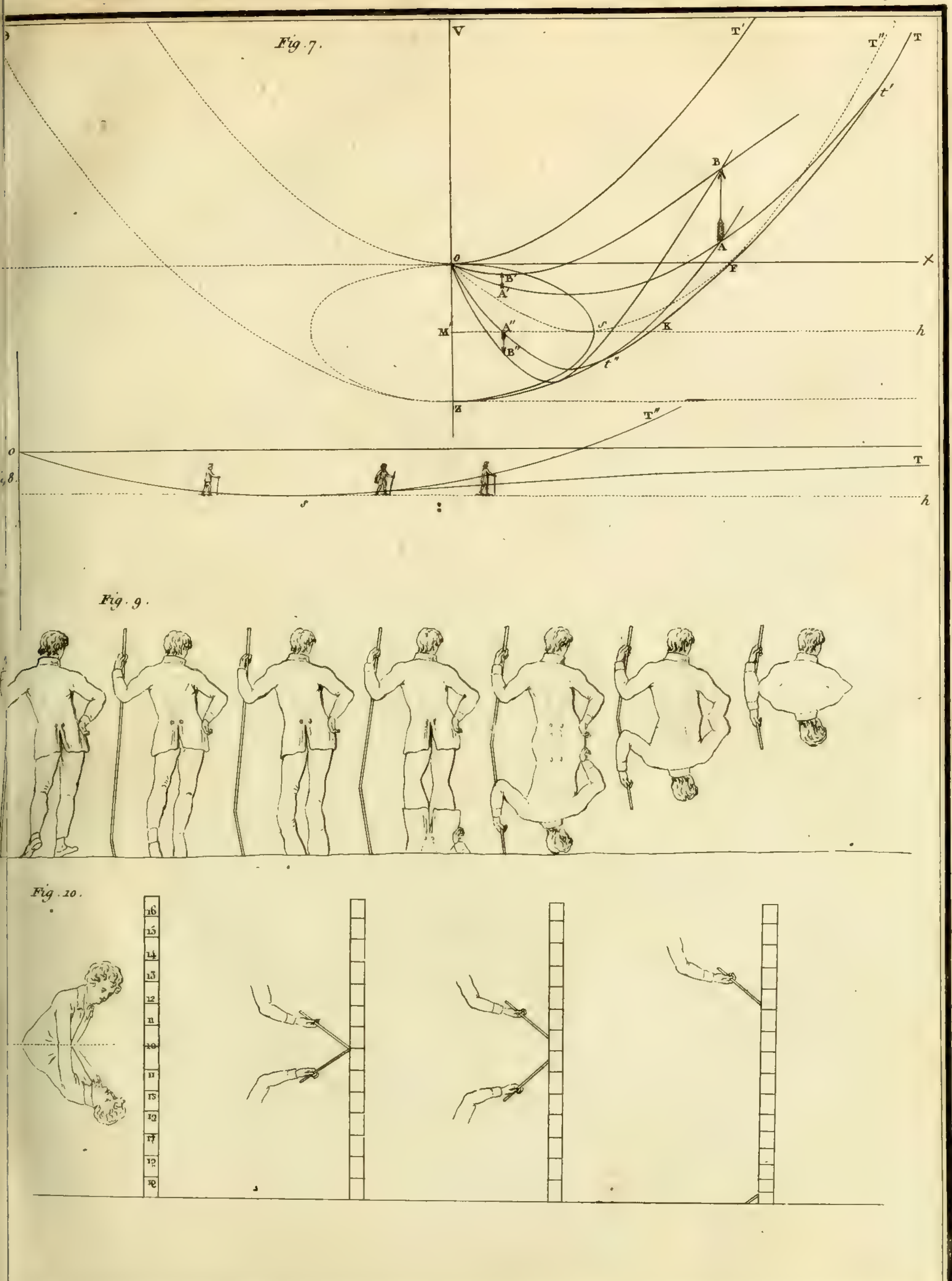


Fig. 1.
O
A
X
T
N
Z
Z′
Fig. 2.
A
X
M′
H
M
Z
Fig. 3.
O
P′
P
B′
B
M
M′
Fig. 4.
O
P P′
B
B′
M
M′
Fig. 5.
O
P
B
M
M′
Fig. 6.
O
P′
P
B′
B
M
M′




Fig. 7.
V
T'
T''
T
t'
B
A
o
X
F
B'
A'
M
A''
B''
s
K
h
t''
Z
T''
o
T
h
s
Fig. 9.
Fig. 10.
16
15
14
13
12
11
10


ATURAL H

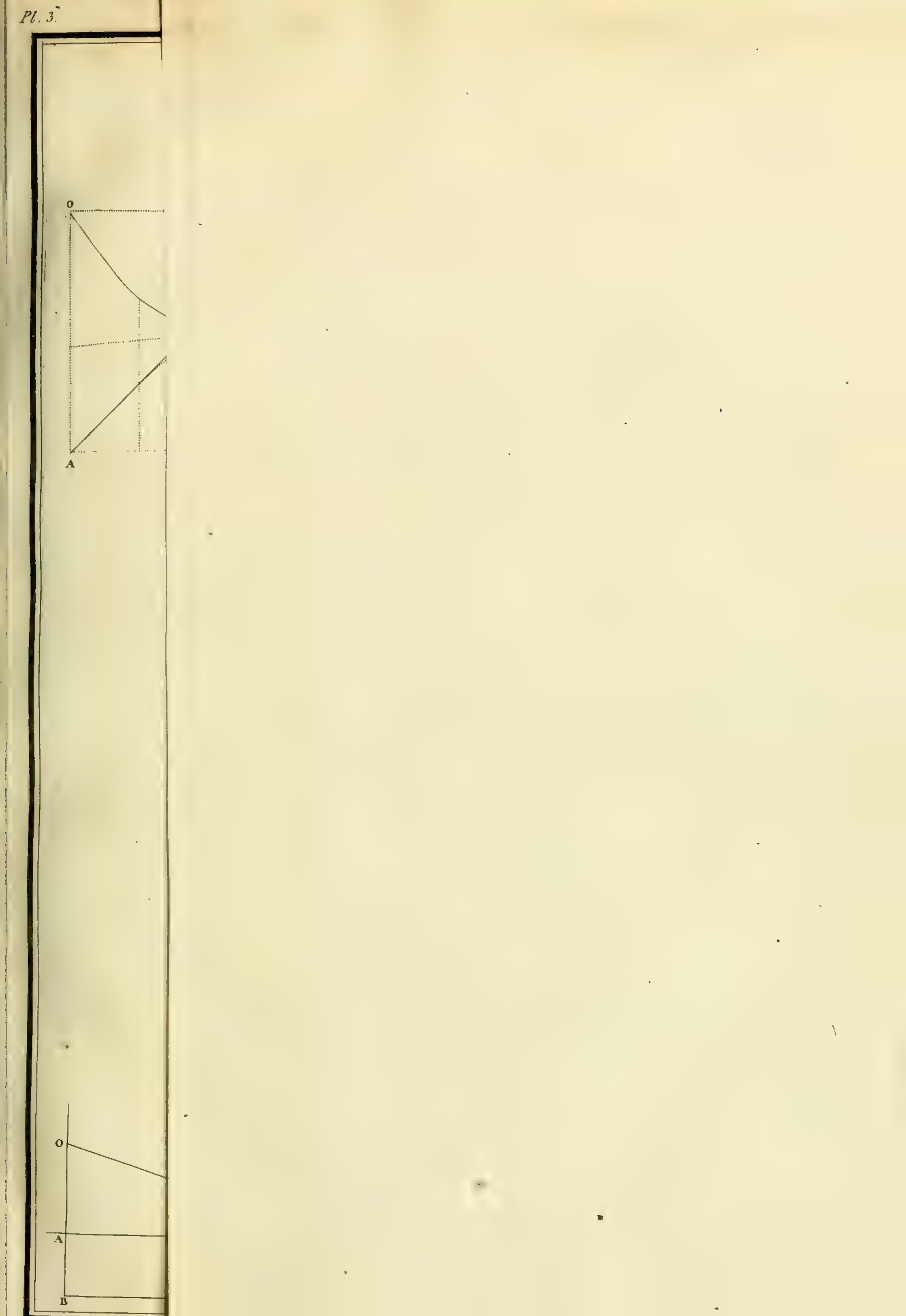

O
A
O
A
B

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

Pl. 4.

Z
m'
m
O
M
M'
M"
Z'

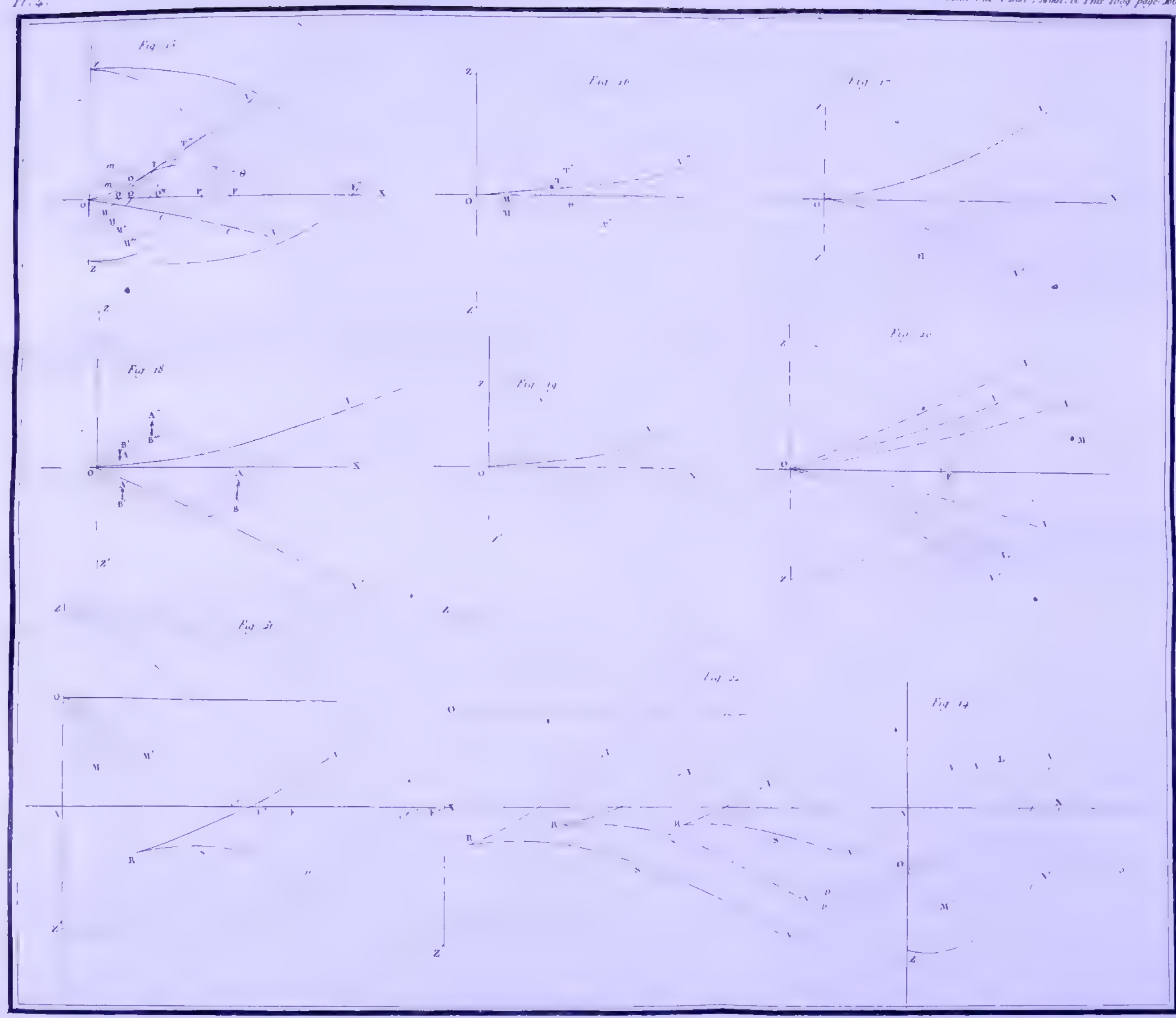
Z
B"
A"
O
A'
B'
Z'

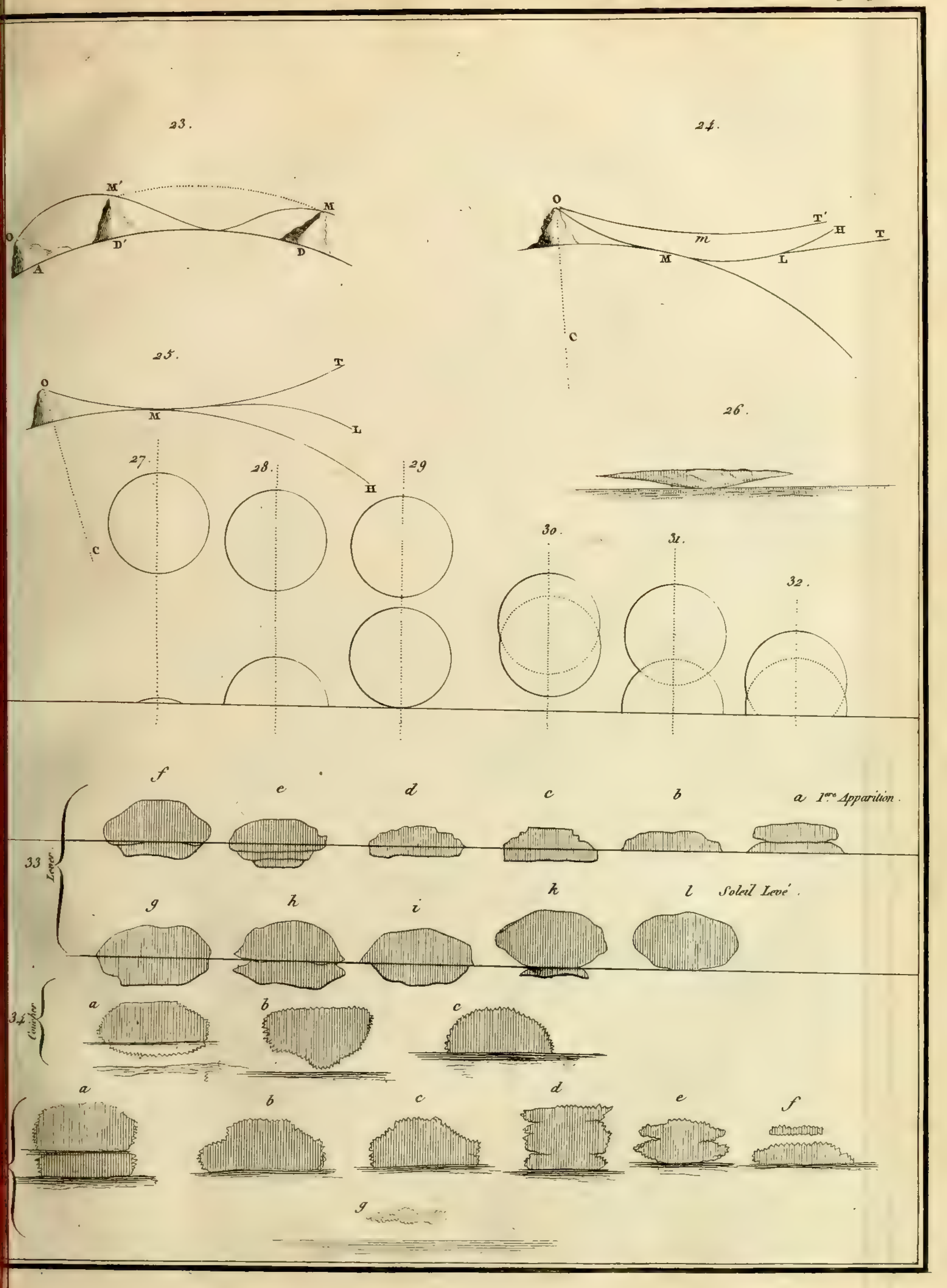
Z
O
M
A
Z'

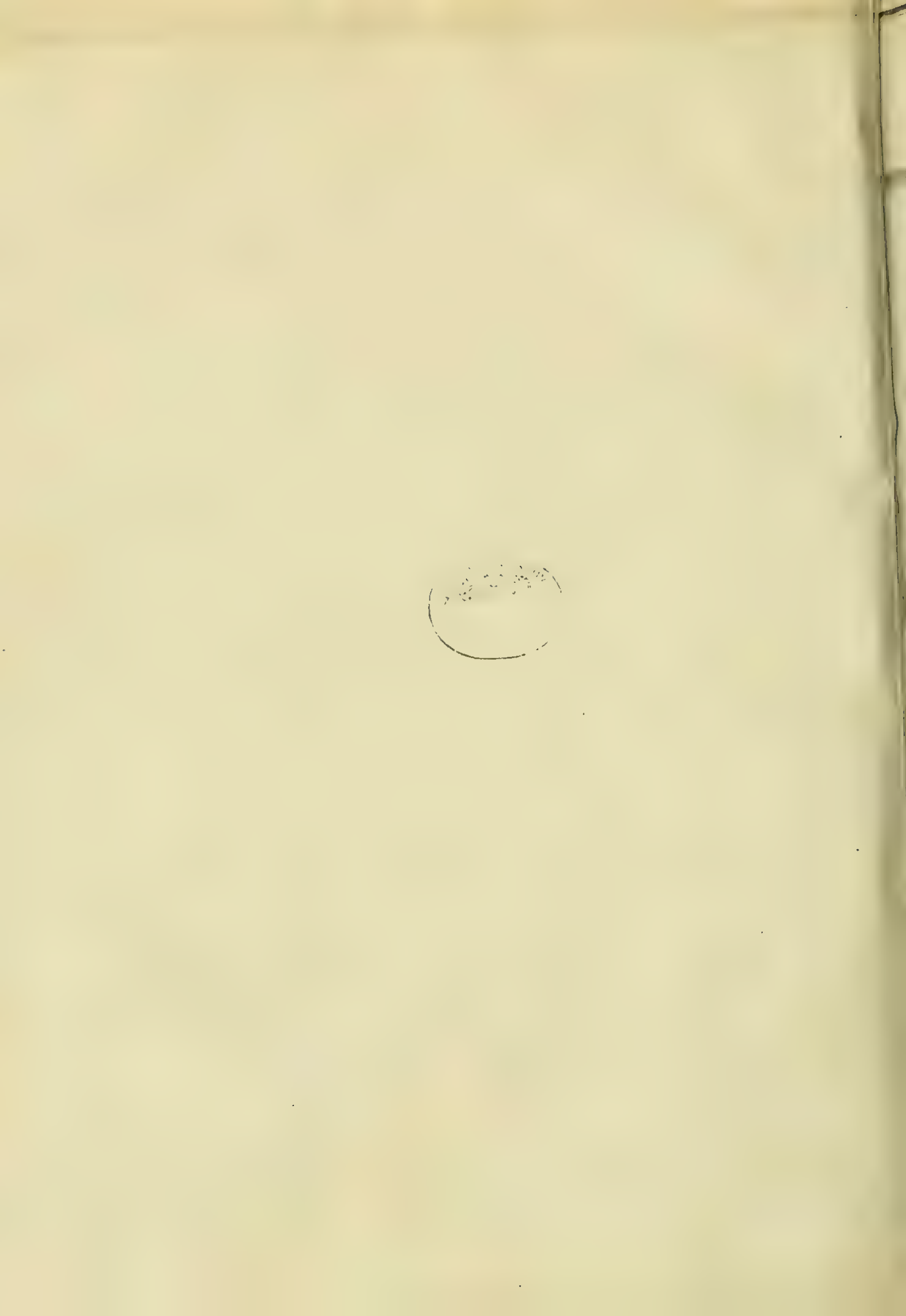
ge

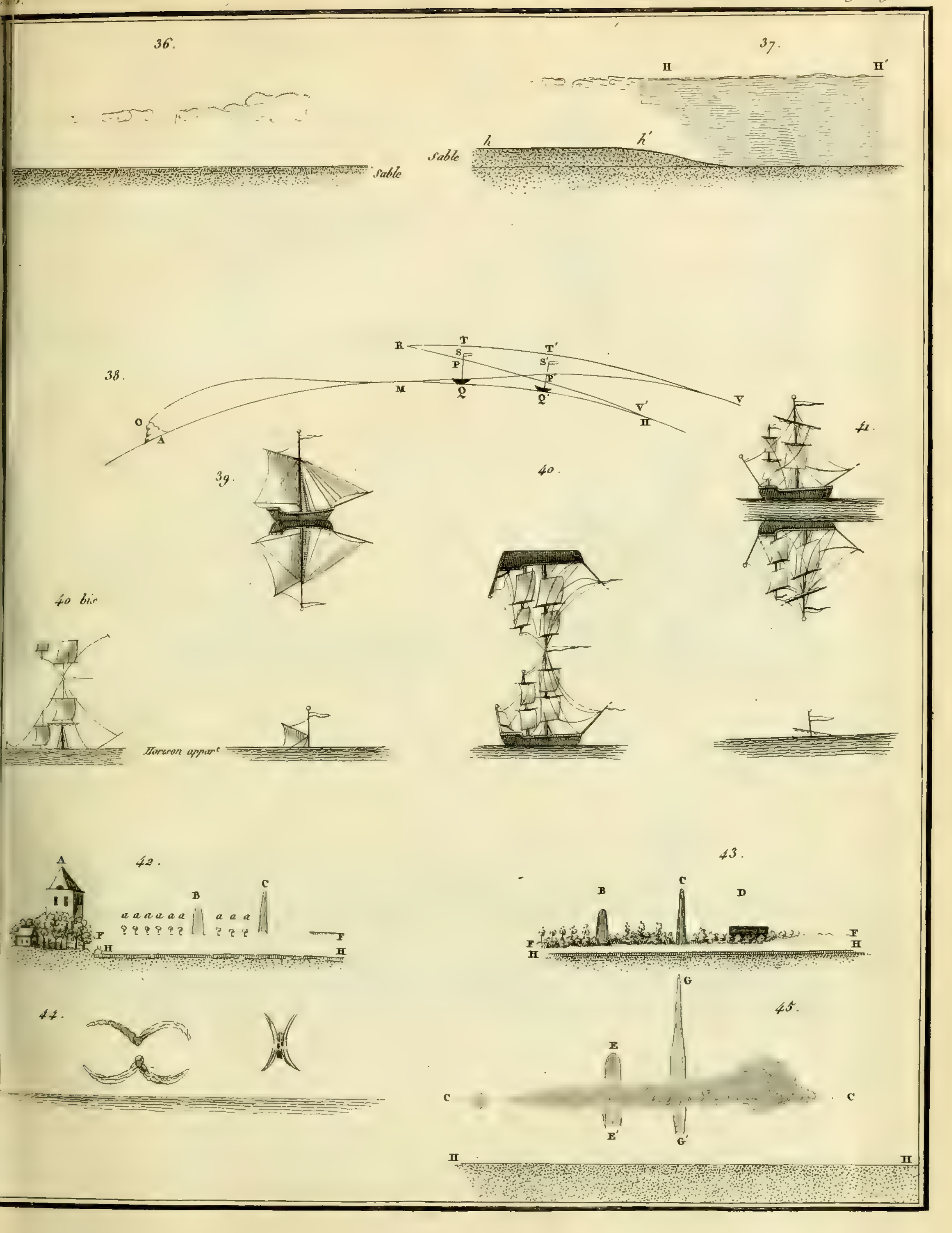
T

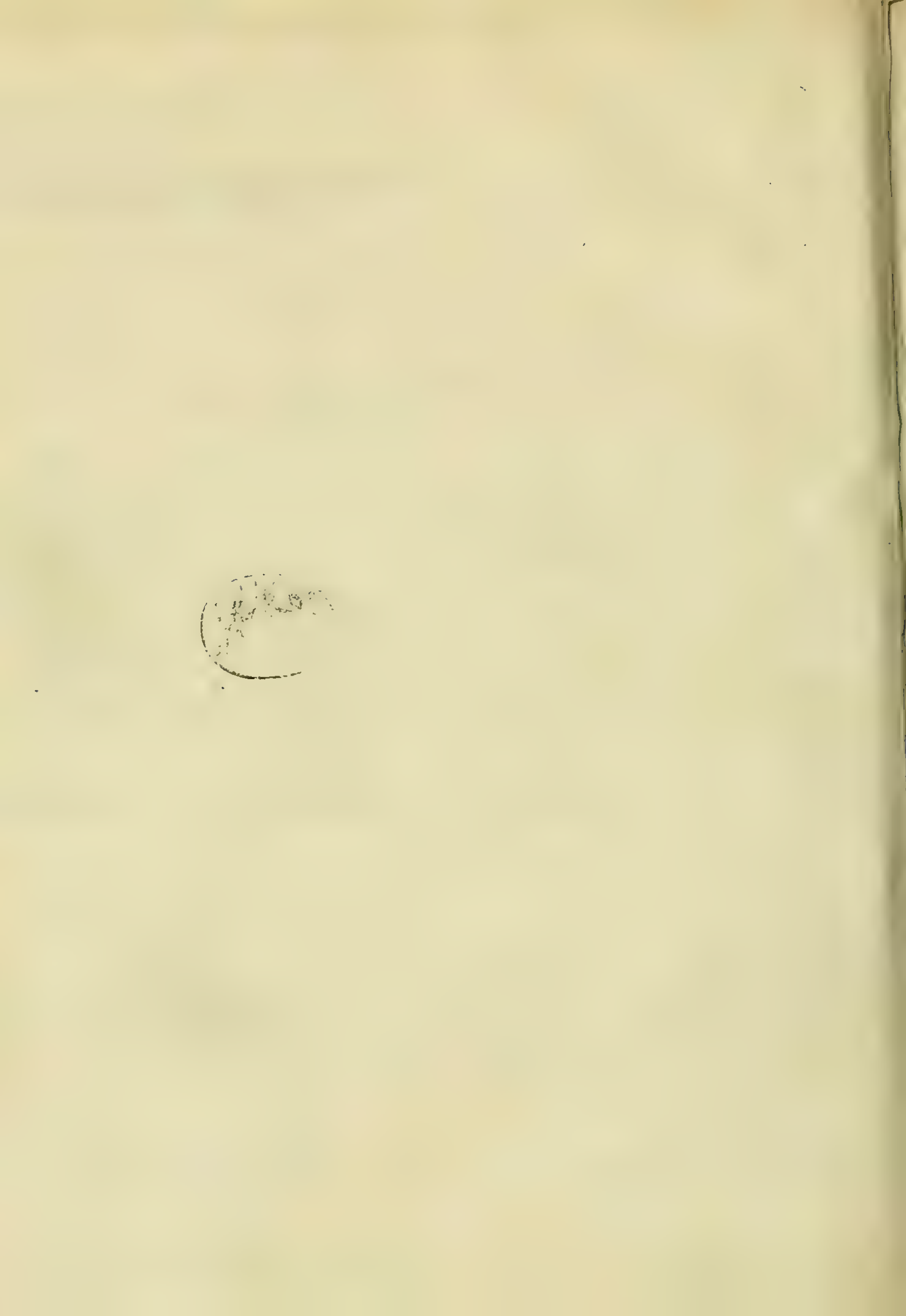
rition

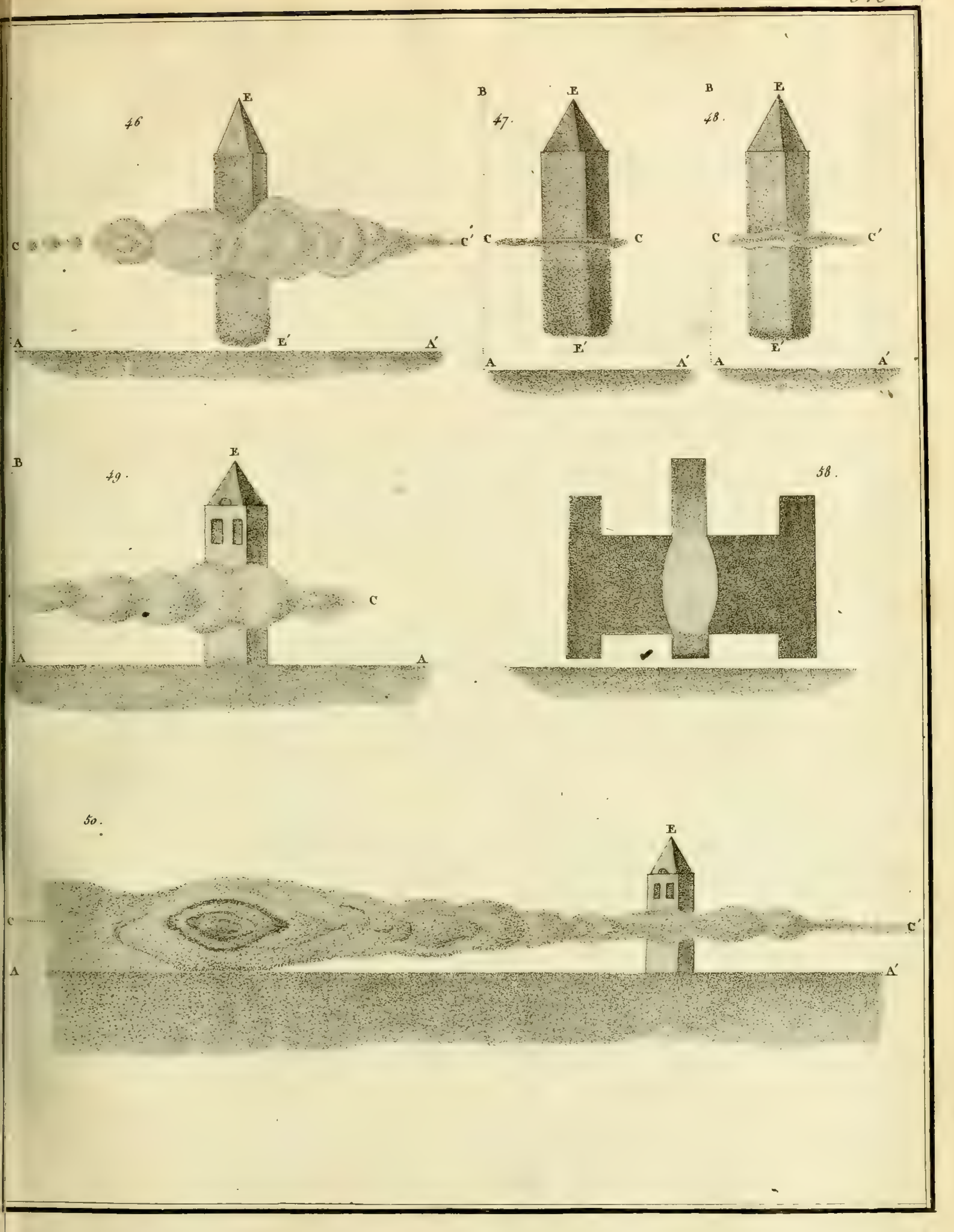

Fig. 16
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 14


23.
M'
M
O
D'
D
A
24.
O
T'
H
T
m
M
L
C
25.
O
T
M
L
H
C
26.
27.
28.
29
30.
31.
32.
f
e
d
c
b
a 1ère Apparition.
33
Lever
g
h
i
k
l Soleil Levé.
34
Coucher
a
b
c
a
b
c
d
e
f
g

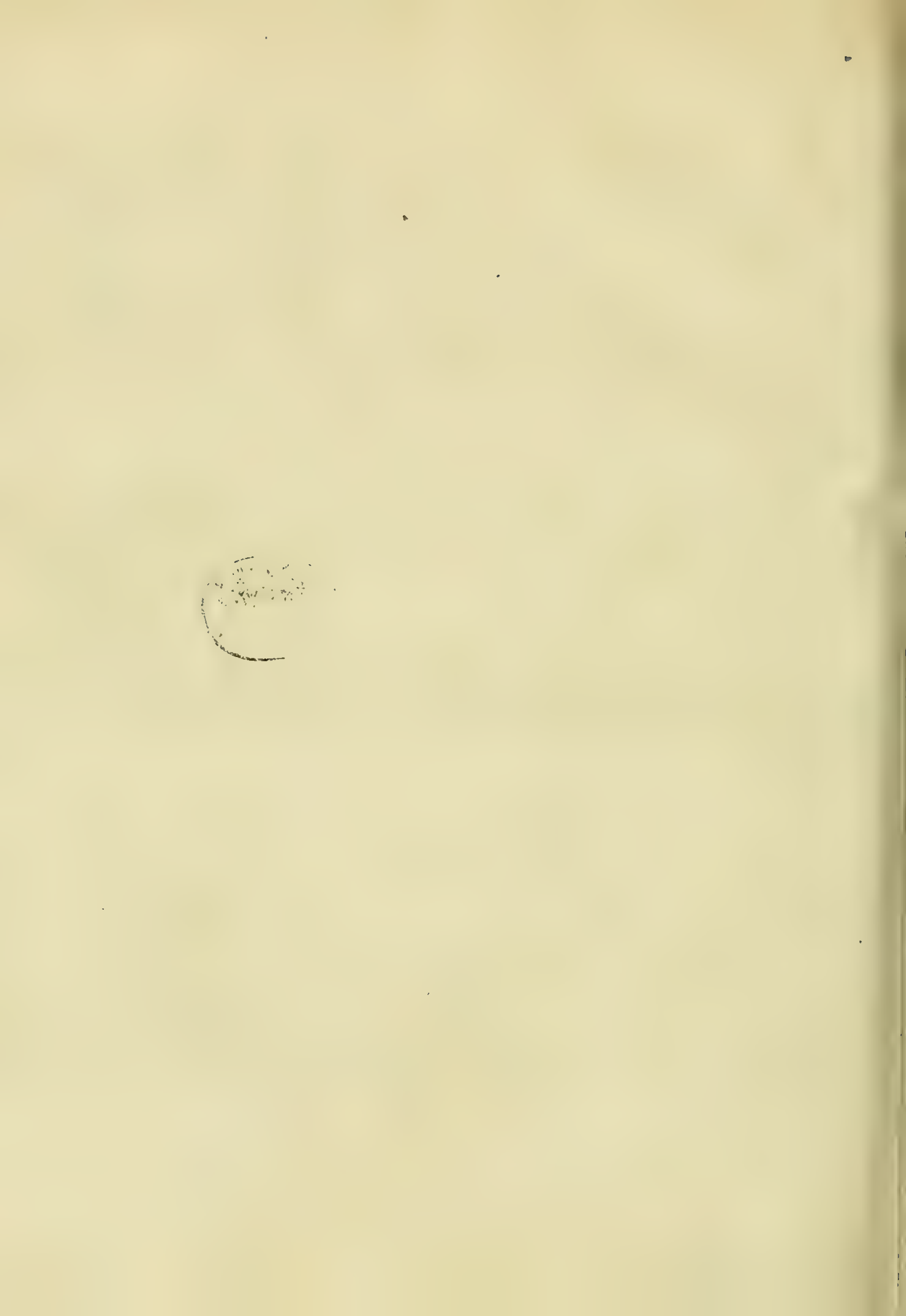


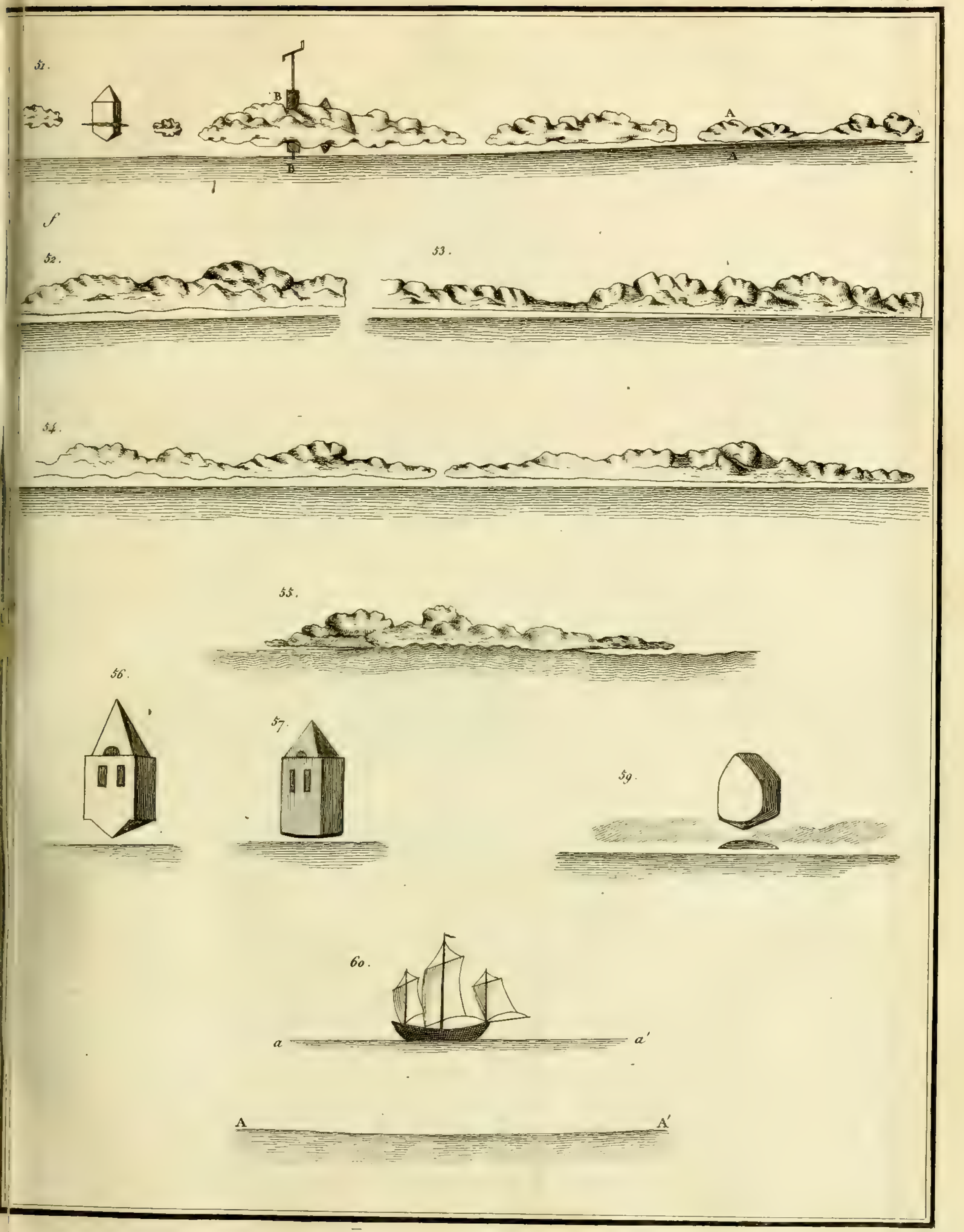

36.
37.
H
H'
h
h'
Sable
Sable
38.
R
T
T'
S
S'
P
P'
M
Q
Q'
V
V'
H
O
A
39.
40.
41.
40 bis
Horison appar.t
42.
A
B
C
F
H
a a a a a a
a a a
43.
B
C
D
44.
45.
E
E'
G
G'
C
C



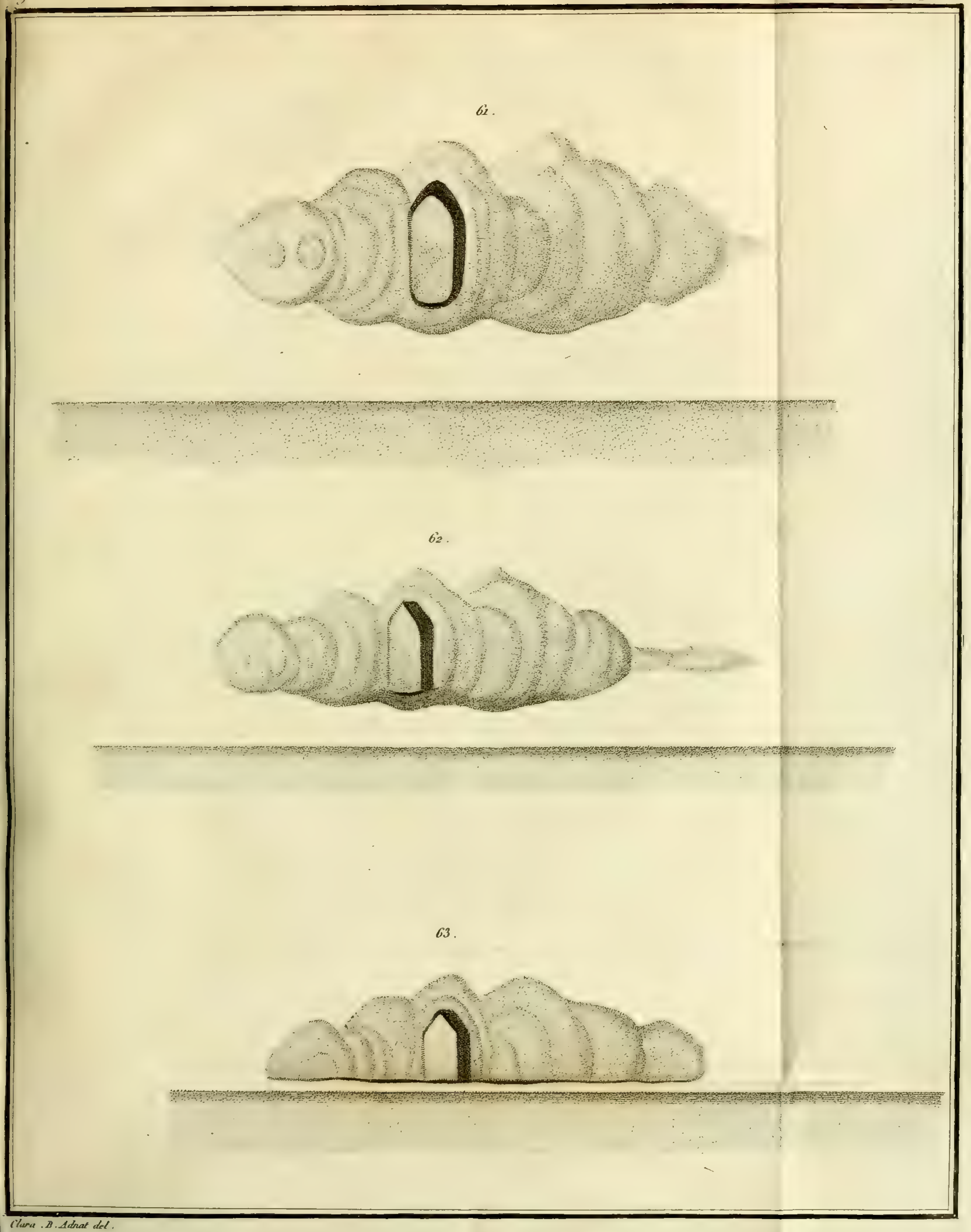


46
E
C
C'
A
E'
A'
B
E
47.
C
C
E'
A
A'
B
E
48.
C
C'
E'
A
A'
B
E
49.
C
A
A
58.
50.
E
C
C'
A
A'




51.
B
A
A
B
f
52.
53.
54.
55.
56.
57.
59.
60.
a
a'
A
A'





Clara. B. Adnat del.



MÉMOIRE
SUR LA TENACITÉ DES MÉTAUX DUCTILES,
ET
OBSERVATIONS
Sur les changemens de densité du plomb par les procédés d'écrouissement, et son altération dans l'eau,

Par M. GUYTON-MORVEAU.

Lu les 29 mai et 19 juin 1809.

La détermination exacte de la force de cohésion ou de la ténacité des diverses substances métalliques, est regardée avec raison comme un des objets les plus importans des recherches des physiciens ; car s'il est vrai de dire que les artistes qui les emploient ne doivent pas faire entrer dans leurs calculs le *maximum* de cette force, attendu les imperfections accidentelles qui en avancent toujours plus ou moins la rupture, la comparaison de leur ténacité sert non seulement à en régler le choix, mais fournit encore un moyen précieux pour en juger la pureté et le degré de perfection de leur fabrication.

C'est ce qui me détermine à proposer quelques obser-

vations sur les rapports de ténacité des métaux établis dans les ouvrages les plus nouveaux.

Du Fer.

On lit dans le système de chimie de Thomson (1), qu'un fil de fer de 2.5 millimètres de diamètre, supporte avant de rompre 226 kilogrammes; et il dit ailleurs, qu'un fil de ce métal, de 2 millimètres de diamètre, est capable de porter, sans se rompre, un poids de 249.659 kilogrammes (2).

Cette dernière expression est précisément celle que j'ai donnée, il y a onze ans, dans un mémoire lu à l'Institut, et qui est imprimé dans le tome XXVe des *Annales de chimie*. Pour juger à quel point ces deux résultats sont inconciliables, il suffit de les comparer par les carrés des diamètres; et l'on voit 1°. qu'en partant de la première évaluation de Thomson, un fil de fer de deux millimètres de diamètre ne porteroit plus que 144.64 kilogrammes au lieu de 249.659; 2°. qu'en prenant pour base du calcul la force de cohésion que j'ai attribuée à un fil de fer de 2 millimètres de diamètre, celui qui auroit 2.5 millimètres de diamètre, devroit porter 390 kilogrammes, au lieu de 226, comme l'indique Thomson.

Il y a donc nécessairement erreur dans l'un ou l'autre des passages cités; et ce qui m'autorise à penser qu'elle

---

(1) Édition française, t. I, p. 151.

(2) *Ibid.* t. I, p. 262.

porte sur le premier, c'est que l'auteur adopte d'ailleurs les rapports de ténacité que j'ai établis dans le même volume des *Annales de chimie*, pour *le cuivre*, *le platine*, *l'argent* et *l'or*.

De l'Étain.

Pour l'*étain* et le *plomb*, les rapports donnés par M. Thomson, diffèrent beaucoup de ceux que j'ai indiqués dans le tableau général des propriétés distinctives des substances métalliques, rédigé, il y a longtemps, pour mes cours à l'école impériale polytechnique. Il paroît qu'il les a tirés des expériences de Muschembroeck, qu'il se borne à citer, mais sans faire connoître ni celles qu'il a adoptées de préférence, ni le principe d'après lequel il en a fait la réduction à d'autres dimensions et à des états différens des métaux. Ce qui étoit d'autant plus nécessaire, que le savant physicien de Leyde a opéré sur des parallélipipèdes fondus, qu'il avertit expressément que les métaux forgés ou tirés à la filière, deviennent en général plus résistans, et que les résultats qu'il a obtenus d'un même métal, de l'étain, par exemple, venu de diverses contrées, diffèrent quelquefois de 0.12, 0.39, et jusqu'à 0.51 (1).

D'après cela, il est difficile de comprendre comment il a conclu des expériences de Muschembroeck, *qu'un*

---

(1) Muschembroeck dit précisément : « L'étain fin d'Angleterre, sans mélange d'autre métal, ne peut être rompu que par un poids de 150 livres; » celui de Malaca, par un poids de 100 livres ». *Cours de physique*, § 1562.

fil d'étain d'environ 2 millimètres, pouvoit supporter, sans se rompre, 242 *hectogrammes* (c'est l'expression qu'en donne la traduction). Si l'on prend pour base du calcul le résultat de l'expérience de Muschembroeck sur l'*étain de Bancas*, que l'on peut regarder comme le plus pur, et dont un parallélipipède de 0.17 de pouce Rhénan (4.448 millimètres de côté) a supporté 104 livres (de Leyde), on n'auroit pour la résistance d'une verge de ce métal, que 75. 15 hectogrammes, au lieu de 242. Mais si cette dernière expression est manifestement trop forte, la première est aussi fort au dessous de la réalité.

En employant de l'étain pur, tiré à la filière, de 2 millimètres de diamètre; serrant chaque bout dans une double gouttière de cuivre légèrement saupoudrée d'émeri fin, au lieu de le prendre à l'étau; négligeant les expériences où il rompt tout près de la pince; prenant enfin le terme le plus élevé, qui est en effet le seul auquel on doive ici s'arrêter, pour ne pas confondre la force de cohésion propre au métal, et les accidens qui l'ont d'avance en partie détruite; on trouvera qu'il peut supporter, avant rompre, 15. 74 kilogrammes.

Du Plomb.

Suivant M. Thomson, un fil *de plomb* de 2 millimètres de diamètre, peut supporter 8. 810 kilogrammes. Cette expression est beaucoup trop élevée si on la rapporte aux premières dimensions du solide; elle est trop foible si on l'applique à celles qu'il a réellement au moment de la rupture. A la vérité Muschembroeck n'a porté le *maximum*

de résistance du plomb pur d'Angleterre ou d'Ecosse, qu'à 30 livres pour des parallélipipèdes de $\frac{17}{100}$ de pouce Rhénan ; ce qui revient à 4. 258 kilogrammes pour un fil de 2 millimètres de diamètre ; mais il n'applique cette évaluation qu'au plomb coulé, et non au plomb battu ou tiré, dont il fait bien sentir la distinction, lorsqu'il dit que la force de cohésion de ce métal peut être plus que triplée par ces opérations, et qu'ayant passé neuf fois à la filière un solide des mêmes dimensions, il a été capable de porter jusqu'à 98 livres.

La table dans laquelle il a rapproché ces résultats, présente un phénomène bien extraordinaire, que M. Thomson n'a pas omis de rappeler, c'est qu'à la différence de tous les autres métaux ductiles, l'écrouissement, soit par la filière, soit par le marteau, au lieu d'augmenter la pesanteur spécifique du plomb, la diminue et peut la réduire de 11.479 à 11.218.

On pense bien qu'un physicien aussi exact que Muschembroeck, n'a pas admis un fait aussi surprenant sans en avoir recueilli des preuves multipliées ; il a porté l'attention jusqu'à examiner si le plomb forgé reprendroit, par la fusion, sa première densité, et il l'a en effet retrouvée.

Je n'ai pas vu sans étonnement que Brisson n'ait pas fait mention de cette particularité ; mais les résultats de ses essais sur l'écrouissement de ce métal, le placent encore dans l'exception, puisqu'il dit avoir observé que le plomb battu à coups de marteau, *ne changeoit point ou presque point de densité par l'écroui*, et qu'ayant eu une

seule fois une augmentation de 0.00287 il pensa qu'elle provenoit de ce qu'il y avoit quelques soufflures dans le métal coulé.

M. Fisher, qui ne parle pas non plus des expériences de Muschembroeck, paroît avoir voulu trancher la difficulté, en posant en principe général, que la *force de cohésion des métaux ductiles est augmentée par des coups de marteau modérés, et que des coups trop forts la diminuent* (1). Mais l'application que l'on voudroit en faire au cas particulier, en supposant que la cohésion des molécules ne peut diminuer sans qu'il y ait augmentation de volume de la masse, ne serviroit qu'à rendre l'anomalie plus frappante, puisque Muschembroeck a constaté en même temps que la ténacité croissoit en proportion de la diminution de densité.

Avant de rechercher la cause de ce phénomène, que le physicien de Leyde n'a pas même soupçonnée, que Thomson avoue être encore inconnue, il convenoit sans doute d'en faire un examen assez rigoureux pour le réduire à ses vraies circonstances; et j'y ai apporté d'autant plus d'attention, que dans un mémoire lu à la classe et imprimé dans le second semestre de 1807, j'ai annoncé, d'après une expérience qui me paroissoit concluante, que le plomb pouvoit acquérir par l'écrouissement, une dureté dont on ne le croyoit pas susceptible (2).

---

(1) *Physique mécanique*, sect. II, chap. VIII, § 1.

(2) *Mémoires de la Classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut*, second semestre de 1807, p. 128. Dans l'épreuve des boulets à bague de plomb, faite à Lafère le 19 août 1801, sous les ordres de l'ins-

J'ai commencé par soumettre à des coups modérés des flans de plomb que j'avois coulés exprès avec le plomb dont on fait usage pour la coupellation, et qui doit être, pour le succès de cette opération, le plus exempt que possible de tout alliage étranger. Après les avoir dérochés au vif à la lime, j'en prenois exactement la pesanteur spécifique, et je les frappois ensuite sur le tas d'acier avec un marteau à planer bien poli, pour ne produire aucun déchirement.

J'avouerai que, quoique bien prévenu par le récit très-détaillé de Muschembroeck, je ne vis pas sans étonnement que la densité étoit diminuée après chaque percussion. Ce qui avoit lieu toutes les fois que le plomb avoit d'abord manifesté le degré de compacité dont il est susceptible, lorsqu'il est fondu et coulé avec les précautions convenables.

Ainsi, par exemple, un de ces flans du poids de 20 grammes, qui avoit d'abord donné une pesanteur spécifique de 11.37272

Frappé de trois coups, ne donna plus que 11.35280

Après quatre autres coups 11.34637

Et après huit coups de suite du même marteau 11.32837

Il m'a paru important d'examiner si le passage au laminoir, qui écrouit tous les métaux ductiles, opéreroit aussi un effet contraire sur le plomb.

Un flan préparé comme ci-dessus, a été passé entre

---

pecteur général d'artillerie, la bague d'un de ces boulets, qui n'avoit pas été coupée par la bouche trop évasée du canon, acquit une telle dureté, que l'effort de quatre hommes appliqués au refouloir en forme de bélier, ne put jamais porter ce boulet à plus de 3 décimètres de distance de la poudre.

deux rouleaux d'acier poli, au point d'être réduit seulement par des pressions très-légères et multipliées, de 2.88 millimètres à 2.56 d'épaisseur, sa densité s'est trouvée diminuée de $\frac{167}{10000}$es.

Le même flan repassé à pressions plus fortes, jusqu'à former un ruban de 52 centimètres de longueur, et de moins de $\frac{2}{100}$es de millimètres d'épaisseur, se trouva avoir perdu de nouveau $\frac{131}{10000}$es de pesanteur spécifique, c'est à-dire $\frac{298}{10000}$es. de sa première densité.

Il ne pouvoit y avoir de doute que l'on observeroit les mêmes changemens de rapport du volume à la masse, en frappant ce métal au mouton ou par le balancier ; mais auroient-ils lieu en le frappant en virole ? Cette question m'a paru devoir fixer mon attention.

Pour la résoudre, j'ai fait faire d'abord trois flans qui, coulés et ajustés sans passer au laminoir, avoient le diamètre et l'épaisseur du flan destiné pour la pièce de 2 francs.

Le *premier* ayant été frappé d'un seul coup, mais fort, entre les deux coins de tête et de revers, perdit près du tiers de sa masse, par la quantité de matière qui remonta subitement au-dessus de la virole. La pesanteur spécifique de la pièce qui avoit reçu les deux empreintes, bien ébarbée, ne se trouva que de 11.208.

Le *second*, placé de même, et frappé de trois coups, mais les deux premiers avec ménagement, de manière qu'ils ne servoient qu'à forcer le flan à remplir plus exactement la virole, il n'y eut pas de changement sensible dans la pesanteur spécifique.

Le *troisième* soumis à la même épreuve et frappé successivement de six coups de balancier, avec la même gradation de force, sa pesanteur spécifique qui étoit auparavant de 11.355, se trouva portée à 11.3973.

Ces résultats n'ayant pas paru suffisans pour fonder une conclusion, M. Gengembre, qui avoit bien voulu coopérer à ces expériences, pensa que l'on ne parviendroit à les rendre décisives, qu'en enfermant le plomb entre deux disques de fer dans une virole assez profonde pour les recevoir; de manière que le métal ne trouvât plus d'issue pour échapper à la pression. On fit une virole exprès dans ces dimensions, dont le rayon du cercle extérieur offroit une résistance de 4 centimètres. Deux coins furent arrasés pour frapper sans empreinte; on prépara en même temps quatre flans du même plomb de coupelle, simplement coulés et ajustés à la lime; on les soumit enfin à la percussion du balancier, la barre ne portant d'abord que ses petites boules, et chargée ensuite de ses grosses boules, percussion qui, dans le dernier cas, peut être évaluée à un poids de 201 kilogrammes tombant de 1 mètre de hauteur (1).

Le tableau ci-joint présente les résultats de ces expériences, et quoiqu'il y ait encore des écarts causés par

---

(1) Cette quantité de mouvement est déduite de la note suivante qui m'a été remise par M. Gengembre. Les deux boules pèsent ensemble 170 kilogrammes; le poids de la barre, rapporté au centre d'oscillation, est d'environ 30 kilogrammes; total 200 kilogrammes. Le chemin parcouru par cette masse est de 1.68 mètres; le temps de la course, 0''.75.

Cette course se faisant d'un mouvement presque uniformément accéléré, on

des accidens, ils me paroissent suffire pour établir que le plomb, lorsqu'il est resserré dans un espace qui ne lui permet pas d'en sortir comme s'il étoit rendu fluide, est susceptible d'acquérir, comme les autres métaux, un degré d'écrouissement qui en augmente la pesanteur spécifique. On remarquera surtout l'augmentation progressive de densité du n° 2, qui de 11.358, a passé d'abord à 11.362, et ensuite à 11.388.

Je ne dois pas omettre deux observations auxquelles ces expériences ont donné lieu; la *première* est la différence de pesanteur spécifique que présente le même plomb fondu et coulé dans les mêmes moules, différence que j'ai trouvée plusieurs fois de 4, 6 et 9 millièmes. On sait que le plomb fondu et refroidi dans des creusets auxquels il adhère à raison d'une oxidation superficielle, présente souvent des cavités intérieures; mais cette circonstance cessant, il est difficile d'imaginer la cause de cette différence, bien constatée par le peu d'accord des physiciens sur la vraie pesanteur spécifique de ce métal; les uns, comme Muschembroeck et Thomson, la portant à 11.470, et le plus grand nombre la réduisant, d'après Brisson, à 11.352. Gellert l'avoit donnée à 11.443, et Kirwan incline pour cette expression qui lui paroît annoncer un plomb plus exempt de fer que celui de Brisson. Mais

---

peut estimer la vitesse, au moment du choc, à 4.48 mètres par seconde; et comme, pendant ce quart de tour, la vis descend de 27 millimètres, le choc est égal à celui d'un poids de 12444 kilogrammes, animé d'une vitesse de 72 millimètres par seconde, ou d'un poids d'environ 201 kilogrammes tombant d'un mètre de hauteur.

Des expans de plomb sous la pression

NUMÉROS	SOUS LE BALANCIER ARMÉ DE GROSSES BOULES, ET TOUJOURS EN VIROLE.			
	COUPS.	POIDS ACTUEL.	PESANTEUR spécifique.	OBSERVATIONS.
N° 1.	it trop être sou- nouvelle			
N° 2.	n troi- puis de grosses . . .	Grammes. 15·941	11·38817	Presque point de trace de matière re-montée.
N° 3.	n troi- puis de grosses	16·029	11·34381	*Idem.*
N° 4.	deux grosses	14·765	11·34381	Il est remonté un peu du métal.

RÉSULTATS

Des expériences sur les changemens de pesanteur spécifique des flans de plomb sous la pression du balancier.

NUMÉROS.	FLANS DE PLOMB COULÉ.		FRAPPÉS EN VIROLE SOUS LE BALANCIER ARMÉ DE PETITES BOULES.				FRAPPÉS SOUS LE BALANCIER ARMÉ DE GROSSES BOULES, ET TOUJOURS EN VIROLE.			
	Poids.	Pesanteur spécifique.	Nombre de coups.	Poids actuel.	Pesanteur spécifique.	OBSERVATIONS.	Nombre de coups.	Poids actuel.	Pesanteur spécifique.	OBSERVATIONS.
N° 1.	Grammes. 16.665	11.3643	1. Non pas très-fort, mais la rotule étant inclinée. .	Grammes. 15.485	11.27278	On voit que la matière a remonté ; ce qui a occasionné une diminution de poids de 1,180 gramme.	Ce n° étoit trop déformé pour être soumis à une nouvelle épreuve.			
N° 2.	16.658	11.3583	2	16.640	11.3621		Frappé d'un troisième coup, puis de deux, avec grosses boules	Grammes. 15.941	11.38817	Presque point de trace de matière remontée.
N° 3.	16.760	11.32424	2	16.760	11.3527	Ce flan avoit probablement quelque cavité lors de la coulée dans le moule.	Frappé d'un troisième coup, puis de deux, avec grosses boules	16.029	11.34381	*Idem.*
N° 4.	16.482	11.37032	3	16.481	11.3855		Frappé de deux coups, avec grosses boules	14.765	11.34381	Il est remonté un peu du métal.

1809.

lorsque j'ai opéré sur du plomb parfaitement pur (à la vérité passé une fois au laminoir) je ne l'ai trouvée que de 11.3517.

Une *seconde* observation, qui m'a d'abord causé bien plus de surprise, c'est l'action très-rapide de l'eau sur ce métal, au point que l'eau distillée, dans laquelle je le tenois suspendu à la balance hydrostatique, prenoit bientôt un coup d'œil laiteux, et formoit à la longue un dépôt de flocons blancs. Il étoit naturel de porter d'abord des soupçons sur la pureté de l'eau; je la changeai plusieurs fois, j'employai successivement celle qui se trouve à la manufacture de produits chimiques de M. Vauquelin, celle qui sert aux opérations de départ à la Monnoie, celle que M. d'Arcet eut la complaisance de me préparer exprès, enfin celle que j'avois redistillée moi-même au feu de lampe dans une cornue de verre : toutes soutinrent les épreuves de tous les réactifs; l'eau de chaux n'y manifesta pas même la présence de l'acide carbonique.

Tous les plombs que j'ai mis dans les mêmes circonstances, ont subi la même action, soit simplement coulés en table, grenaillés ou laminés. Celui qui sert à la coupellation, et qui doit être le plus exempt d'alliage pour servir à cette opération, avoit principalement fixé mon choix; mais M. d'Arcet avoit reconnu qu'il tenoit presque toujours un peu de cuivre; il m'en remit un petit lingot qu'il avoit réduit du muriate de plomb, et en moins de 12 heures, l'eau dans laquelle il fut plongé, devint également laiteuse, et forma le même dépôt; ce qui excluoit

toute idée d'oxidation par l'action galvanique de différens métaux.

On avoit bien publié quelques observations sur la formation d'une matière blanche dans les fontaines de plomb, mais la plupart ne fournissoient aucune lumière, ni sur sa vraie nature, ni sur les conditions essentielles à sa production.

Le traducteur des *Élémens de chimie* de Spielman, dit dans une note, que son frère avoit reconnu pour un véritable sel de Saturne, une pellicule cristalline formée à la surface de l'eau dans une fontaine de plomb (1).

Baumé, *dans sa chimie expérimentale*, regrettoit qu'on n'eût pas fait d'expériences pour savoir si l'eau distillée agissoit sur le plomb ; mais il regardoit l'altération de ce métal dans les fontaines, avant qu'il eût reçu un enduit terreux, comme l'effet de la sélénite de l'eau commune, d'où il résultoit un vitriol de plomb. Nous verrons bientôt ces deux explications démenties par les faits.

Le comte *de Milly* communiqua en 1779, à l'Académie des Sciences, des réflexions sur les dangers des fontaines de plomb, et les termina par le conseil fort sage d'en supprimer au moins les couvercles de ce métal, où il avoit remarqué que l'eau exerçoit principalement son action (2). Il auroit donné la vraie solution, s'il eût fait attention que cette eau n'étoit plus de l'eau commune, mais le produit d'une distillation spontanée.

---

(1) Tome I, page 117.

(2) *Journal de physique*, t. XIII, p. 145.

MM. *Luzuriaga* et *De la Ville* sont jusqu'à présent les seuls qui aient fait état du concours de l'air dans cette altération du plomb. Le premier fit insérer dans le journal physique d'octobre 1784, de curieuses expériences dont il résultoit qu'en agitant dans un flacon fermé, de la grenaille de plomb *mouillée*, les parois se couvroient d'une substance d'un blanc verdâtre, et qu'il y avoit absorption d'un 5e d'air, et de 3 cinquièmes, lorsqu'il employoit de l'air vital.

On trouve enfin dans *les Annales de chimie* du mois d'avril 1806, une lettre de M. De la Ville, adressée à M. Vauquelin, qui lui annonce qu'il a obtenu une quantité d'oxide blanc de plomb, en roulant, dans un baril de ce métal, tenant un 5e. d'eau, de la grenaille de plomb, et y faisant en même temps rentrer de l'air.

On voit que ces deux chimistes ne s'étoient pas imposé la condition de n'employer que de l'eau pure; et d'ailleurs le frottement continuel opéré par le mouvement de rotation, formoit ici une circonstance étrangère au phénomène que j'avois observé.

Ces considérations m'engagèrent d'abord à essayer aussi l'action de l'eau de rivière, simplement filtrée, sur le plomb. Je vis avec surprise que ce métal y restoit intact. Je pris donc le parti de faire marcher de pair les expériences dans l'eau pure et dans l'eau de Seine, avec ou sans concours de l'air atmosphérique, et même avec de l'eau dont j'avois pompé l'air sous le récipient de la machine pneumatique.

Voici les résultats de ces expériences.

Expériences comparatives de l'altération du plomb dans l'eau distillée, dans l'eau de Seine, avec et sans concours de l'air.

Première expérience. Un décagramme de grenaille de plomb bien nette, mis avec de *l'eau distillée* dans un vase ouvert : en moins de 12 heures, l'eau est devenue laiteuse ; elle a commencé à déposer des flocons blancs, d'un éclat argentin.

La même grenaille mise également en vase ouvert avec de *l'eau de Seine :* aucune altération sensible ni à la surface du métal, ni dans la transparence de l'eau après quinze jours.

Deuxième expérience. 20 grammes de plomb de coupelle fondu, mis dans deux seaux de verre, l'un rempli *d'eau distillée*, l'autre de *l'eau de Seine* : dans le premier, même altération que celle ci-dessus ; dans le second, nul changement.

Troisième expérience. Un morceau de plomb de coupelle fondu et coulé, mis dans un verre avec *eau distillée*, et laissé à l'air jusqu'à évaporation totale, s'est couvert d'une couche argentine très-brillante, qui présentoit des apparences de rudimens cristallins. Le fond du verre étoit enduit de même matière très-adhérente.

Quatrième expérience. Le même plomb pur, réduit du muriate, a été soumis à la même épreuve, toujours en vase ouvert : avec *l'eau distillée*, mêmes signes d'altération ; avec *l'eau de Seine*, aucun changement.

Cinquième expérience. Le même plomb laminé en rubans très-minces, a été mis avec de *l'eau distillée* dans un flacon presque plein et bien bouché : il y a eu un commencement d'altération, qui, le sixième jour, n'avoit pas sensiblement augmenté.

Sixième expérience. 20 grammes de plomb de coupelle laminé en rubans très-minces, ont été mis dans un flacon avec de *l'eau distillée*; le flacon porté sous le récipient de la machine pneumatique, et le vide répété jusqu'à ce que l'eau ne fournît plus de bulles, puis le flacon bien bouché : au bout de huit jours, pas le plus léger effet, l'eau conservoit sa limpidité, et les rubans tout leur éclat métallique.

Septième expérience. Pareille quantité de même plomb réduit en rubans minces, a été mise dans un flacon bouché avec *l'eau distillée*, dans laquelle le plomb avoit séjourné en vase fermé, et subi une altération considérable, filtrée depuis et éprouvée par l'hydrosulfure : cinq jours après, aucune action sur le métal, l'eau toujours aussi limpide. Alors ce flacon a été adapté à une pompe à double ajutage, par le moyen de laquelle l'air y a été plusieurs fois introduit et comprimé ; en moins de 24 heures, l'eau a blanchi, il s'est formé à sa surface une très-légère pellicule, et les lames de plomb ont commencé à se couvrir de matière blanche.

Huitième expérience. Une lame de plomb mise dans *l'eau de pluie* en vase ouvert : l'eau, au bout de quinze jours n'étoit pas sensiblement trouble ; la lame étoit en

grande partie couverte de matière blanche. Dans la même eau, purgée d'air et enfermée dans un flacon, aucun signe d'altération.

L'accord de ces résultats me paroît établir clairement que l'eau distillée exerce sur le plomb une action sensible; que cette action n'est déterminée que par le concours de l'air; qu'elle cesse dans les vaisseaux remplis et bien fermés, et plus absolument quand l'eau a été purgée d'air; enfin, ce qu'on n'auroit pas soupçonné, que l'eau de Seine, au contraire, ne produit sur ce métal aucune altération, ni en vaisseau fermé, ni en vaisseau ouvert.

Quelle peut être la cause de cette différence d'action de l'eau distillée et de l'eau de Seine sur le même métal? C'est un nouvel objet de recherche que je n'ai pas cru devoir négliger.

On seroit d'abord tenté de l'attribuer au défaut de concours de l'air dans la dernière, mais il suffit d'en mettre sous le récipient de la machine pneumatique pour s'assurer qu'elle en tient une quantité sensible; quoiqu'à la vérité, les bulles qui s'en sont dégagées dans le vide aient été beaucoup plus rares et infiniment petites en comparaison de celles que fournit l'eau distillée dans les mêmes circonstances. Il restoit donc à examiner si le phénomène tenoit à la seule différence du volume d'air engagé dans l'une et dans l'autre, et surtout si l'eau de rivière, laissée un mois entier sur le plomb dans un vase ouvert, n'avoit pu recevoir de l'atmosphère la quantité d'air qui lui manquoit pour produire le même effet que l'eau distillée; ce qui est, jusqu'à présent, hors de vraisemblance.

Pour interroger à ce sujet l'expérience, j'ai mis des lames de plomb bien nettes dans un flacon à deux goulots, à moitié rempli d'eau de Seine; j'y ai fait passer à diverses reprises jusqu'à 40 décimètres cubes d'air atmosphérique. Le plomb y est resté plusieurs jours sans éprouver la moindre altération.

J'ai remis ensuite la même eau et les mêmes lames dans un flacon très-épais, et par le moyen d'une pompe à double robinet, j'y ai tenu l'air fortement comprimé, renouvellant même de temps en temps la compression; l'eau, comme on devoit s'y attendre, s'est chargée de beaucoup d'air dans cette opération; j'en ai eu la preuve par la quantité qu'elle a rendue sous le récipient de la machine pneumatique. Le plomb est également resté sans altération. Ce n'est donc pas le défaut de concours de l'air qui rend l'action de cette eau impuissante.

On pourroit imaginer que la présence d'une certaine quantité de matière extractive dans l'eau de rivière est un obstacle suffisant à son action sur le plomb; mais si cela étoit, on devroit le faire cesser en filtrant l'eau à travers le charbon; c'est ce qui n'arrive pas, même après plusieurs filtrations.

Seroit-ce donc la très-petite quantité de matières salines que tient cette eau qui en changeroit les propriétés dissolvantes? la chose étoit si peu probable, que cette question ne s'est présentée qu'après avoir parcouru toutes les routes qui paroissoient devoir conduire plus sûrement à la solution de ce problème.

Pour en acquérir une preuve directe, j'ai fait passer,

à froid, sur du sulfate de chaux pulvérisé, de l'eau distillée en vaisseaux de verre, et dont l'action sur le plomb étoit très-sensible au bout de quelques heures; j'y ai tenu, pendant un mois, en vaisseau ouvert, du plomb en grenaille et en lames bien décapées : il n'y a pas eu le moindre signe d'altération. Ainsi l'eau chargée à peine de 0.002 de son poids de ce sel terreux cesse d'agir sur ce métal.

J'ai voulu voir si cette action seroit restituée à l'eau, en lui enlevant ce sel autrement que par la distillation. J'y ai versé peu à peu de l'eau de barite, jusqu'à ce qu'il y en eût en excès. La liqueur filtrée a été abandonnée à l'air libre pour faire passer la barite et la chaux qui s'y trouvoient, à l'état de carbonates, qui en ont été successivement séparés par les filtrations. J'ai mis du plomb dans cette eau devenue très-limpide et ne donnant plus de pellicule : quinze jours après, il n'étoit pas encore sensiblement attaqué.

J'aurois été bien embarrassé d'indiquer la cause de cette inaction, si je n'avois pas vu cette eau se troubler par l'addition de la dissolution d'oxalate de potasse, et si je n'avois en même temps acquis la preuve que ce n'est pas seulement le sulfate de chaux qui produit cette inaction, qu'elle a lieu également dans l'eau chargée de quelques centigrammes des sulfates, nitrates et muriates à base de potasse ou de soude, d'alun, de nitrate de magnésie, etc.

On ne se seroit guères attendu à trouver dans le plomb un réactif aussi sûr pour juger de la pureté des eaux; il faut en excepter cependant celles qui tiendroient des sels

dans lesquels l'acide n'est pas complètement neutralisé, tels que les nitrate et muriate de chaux. Encore ai-je observé qu'une dissolution étendue de ce dernier, quoique rougissant le papier bleu, ne donnoit que de legers signes d'action sur le plomb; que cette action paroissoit s'arrêter au bout de quelques heures; et que l'addition d'un hydrosulfure dans la liqueur n'y manifestoit pas la présence du métal, à la différence de celle qui tenoit du nitrate de chaux.

Ces faits peuvent donner lieu à une autre question non moins importante : quelle est la vraie nature du produit de l'action de l'eau pure sur le plomb? La nécessité absolue du concours de l'air ne permet pas de douter qu'il y ait oxidation. On peut encore en conclure que ce n'est pas la décomposition de l'eau qui fournit l'oxigène : aussi n'ai-je jamais pu obtenir la moindre inflammation en présentant une bougie allumée à l'orifice des vaisseaux, comme on l'observe en débouchant un flacon dans lequel on a tenu quelque temps sous l'eau de la limaille de fer ou de zinc.

M. Delaville, en donnant le nom d'oxide à la matière blanche qu'il obtenoit de la grenaille de plomb roulée dans l'eau commune, avec le concours de l'air, pressentoit déjà que ce n'étoit pas un oxide ordinaire. Sa légèreté, sa forme floconneuse, son éclat argentin presque métallique, les pointes cristallines que l'on aperçoit à la surface du dépôt qu'il forme dans les vaisseaux fermés, l'état de litharge d'un jaune d'or très-brillant qu'il prend lorsqu'on le chauffe sur un têt de kaolin, la rapidité

avec laquelle il passe à l'état de sulfure semblable à la galène et toujours écailleux, lorsqu'il est touché par l'hydrosulfure de potasse; enfin, les gouttelettes d'eau que j'ai observées à la partie supérieure d'un flacon dans lequel j'avois exposé au Soleil une portion bien sèche de la croûte argentine de la troisième expérience, et le peu d'effervescence que cette matière a donnée avec les acides, même long-temps après qu'elle eut été abandonnée à l'air libre, me paroissent fonder, du moins jusqu'à nouvelles recherches, l'opinion que ce produit tient de la nature des hydrates.

Quant à la *ténacité du plomb*, dont l'examen m'a conduit à traiter en passant de ses différens états de densité, et de l'action que l'eau exerce sur ce métal, ce n'est pas seulement le nouvel arrangement que prennent ses molécules, lorsqu'il est frappé ou pressé, avec faculté de changer ses dimensions, qui forme obstacle à la détermination précise de sa force de cohésion; c'est encore sa disposition à un commencement de ramollissement, qui lui permettant de s'allonger avant la solution de continuité, réduit considérablement ses dimensions à l'endroit où elle s'opère.

On ne doit pas être surpris de ce ramollissement après l'observation communiquée à la classe, par M. de Prony, lors de la lecture de la première partie de ce Mémoire, qu'une verge de fer tirée verticalement par une force capable de la rompre, contracte à l'endroit où se prépare la rupture une chaleur insupportable à la main. Cette chaleur ne peut manquer de favoriser ce déplacement des

molécules, sans diminution sensible de leur adhérence, par lequel, Coulomb, dans ses *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion des fils de métal, etc.*, explique la différence de ténacité qu'il avoit observée dans l'acier trempé et dans l'acier recuit à blanc; le premier rompant a bien moindre charge; quoiqu'en général il reconnoisse que le recuit diminue la cohérence des parties, et qu'il en fournisse lui-même un exemple frappant, d'après une expérience sur un fil de cuivre qui portoit 22 livres, et qui en porta à peine 12 ou 14, lorsqu'il eut été recuit à blanc (1).

Ceci nous conduit à un examen plus attentif des diverses espèces de rupture, que Muschembroeck avoit déjà notées en distinguant la cassure âpre, grenue, en quelque sorte tranchée, des métaux peu ductiles, ou rendus tels par des alliages, et la cassure plus ou moins allongée en pyramide, telle qu'il l'avoit reconnue dans ses expériences sur l'or, l'argent, l'étain et le plomb; tandis que l'étain, par exemple, allié d'un peu de bismuth, rompoit sans aucun allongement (2).

Muschembroeck n'a pas fait état des dimensions réduites au point de rupture, lors même qu'elles présentoient une pyramide tronquée, dont il eût été facile de déterminer la solidité. On conçoit qu'il a pu regarder cette observation comme superflue, n'ayant pour objet que de connoître la charge qu'un métal pouvoit tenir en

---

(1) *Mém. de l'Académ. royale des sciences*, année 1784, p. 265.

(2) *Cours de physique, etc.* §§ 1132 - 1177.

suspension à un point fixe, sans se rompre, et sans se déformer; mais il n'est pas moins vrai qu'il subsiste une force de cohésion tant qu'il n'y a qu'allongement; et si l'on admet, avec Coulomb, que cette force n'est pas sensiblement diminuée lorsque la ductilité du métal permet aux parties de glisser les unes sur les autres sans se détacher; si l'on considère en même temps à quel point le plomb est susceptible de cet allongement et l'étonnante facilité avec laquelle la filière du vitrier le transforme en longs rubans à double rainure, on trouvera probablement, dans la réunion de ces circonstances, le moyen de faire disparoître le merveilleux d'une ténacité qui semble augmenter à mesure que la densité diminue. Supposons pour cela que le fil de plomb passé dix fois à la filière, dans l'expérience de Muschembroeck, n'ait été chaque fois rompu que lorsqu'il étoit arrivé au même point de rétrécissement, on sera en droit d'en conclure que l'augmentation apparente de tenacité, n'étoit dans la réalité que le produit d'une même force, c'est-à-dire d'une même charge appliquée à une égale résistance, et rapportée par le calcul à des dimensions progressivement décroissantes. Quand l'observation forceroit d'admettre encore quelque différence bien légère et très-éloignée de la proportion de 1 à 3, assignée par Muschembroeck, il me semble que l'on en trouveroit facilement la véritable cause dans l'état particulier auquel les molécules du métal sont amenées successivement par ce travail: état que l'on peut présumer tout-à-fait analogue à celui que reçoivent le fer et l'acier par la malléation; que l'on reconnoît à la texture

fibreuse qu'ils acquièrent par un nouvel arrangement de leurs parties; qui les constitue tout autrement résistans dans le sens de leur longueur, que par le travers : état bien connu des ouvriers qui ne s'exposent pas à alterner les passages au laminoir dans les deux sens, et surtout des graveurs qui n'ont garde de confier le travail de leur burin à l'extrémité du faisceau de ces fibres. Ce seroit peut-être aussi dans cette disposition qu'il faudroit chercher l'explication du fait observé par M. Rondelet, et qui a été rappelé à la précédente séance par M. de Prony, qu'un simple trait de lime autour d'une verge de fer, en décidoit la rupture par une charge hors de toute proportion avec ce qui lui restoit de solidité.

C'est d'après ces considérations que j'ai dirigé les expériences dont la table suivante présente les résultats, et dans laquelle j'ai placé, dans une colonne séparée, le rapport des poids qui ont décidé la rupture aux dimensions réduites par l'allongement, autant qu'il m'a été possible de les déterminer, au moyen d'un instrument dont le vernier donne le 50e du millimètre.

Pour placer, dans les mêmes circonstances, le plomb fondu et le plomb forgé ou laminé, j'ai été obligé d'employer des parallélipipèdes taillés entre deux têtes prises sur la largeur et destinées à les fixer dans les pinces. Les résultats observés ont été ensuite calculés pour des fils de deux millimètres de diamètre, ou, ce qui est la même chose, pour des solides qui auroient 1.772 millimètre de côté, afin de les rendre comparables entre eux et avec les autres métaux.

Résultats des expériences sur la tenacité du plomb, calculés pour des fils de 2 millimètres de diamètre.

Numéros des expér.	Qualités du plomb.	Poids qui a rompu.	Rapport au point de rupture.	OBSERVATIONS.
1	Plomb de coupelle fondu.	Kilogr. 5.623	Kilogr. 14.119.	Il y a toujours eu allongement avant la rupture, quelquefois de 4 et 5 millimètres. La rupture sur l'épaisseur des lames minces étoit presque en couteau.
2	Plomb *idem* laminé. .	6.552	13.606	
3	Plomb *idem* réduit au laminoir, à 2.16 millimètres d'épaisseur.	6.1184	17.508	
4	Plomb *idem* passé dix fois au laminoir . . .	6.519	10.443	
5	Plomb *id.* seulement dressé au laminoir ajusté au carré . . .	5.4727	12.1029	La rupture a présenté deux pyramides tronquées.
6	Parallélipipède du flan n° 2 frappé en virole.	6.3563	12.581	
7	*Idem* du flan n° 4 . .	5.299	19.037	Une légère torsion a sensiblement réduit les dimensions.
8	Plomb laminé à 1.48 millim. d'épaisseur .	5.874	. . . .	Tiré en longueur.
9	Morceau pris dans la même lame	5.3054	. . . .	Tiré en travers.

On remarque d'abord dans cette table, que le plomb coulé ou simplement dressé au laminoir, a cédé à une

moindre charge que celui qui a été fortement laminé, mais dans une proportion qui n'est au plus que de 56 à 65.

La sixième expérience faite sur le flan de plomb frappé en virole au balancier, entre deux disques de fer, et dont la pesanteur spécifique a été chaque fois augmentée par cette forte percussion, parce que la matière ne pouvoit s'étendre, me paroît fournir la preuve qu'il n'y a pas de relation nécessaire entre la diminution de densité et l'augmentation de la force de cohésion.

Les expériences nos 8 et 9 donnent un exemple de la différence de ténacité d'une même lame de métal tirée sur sa longueur ou en travers.

Si des sept autres expériences, on en retranche deux qui présentent des écarts manifestement causés soit par la difficulté d'obtenir une mesure exacte du point de rupture lorsqu'il se termine en couteau, soit par l'accident d'une légère torsion, on trouvera assez d'accord dans les cinq autres pour en conclure un terme moyen de la ténacité du plomb, qui sera dans le premier cas, c'est-à-dire en prenant pour base les dimensions premières données au parallélipipède, de 5.633 kilogrammes pour un fil de 2 millimètres de diamètre.

Et dans le deuxième cas, ou en calculant d'après le changement des dimensions occasionné par l'allongement du parallélipipède et son rétrécissement au point de rupture, de 12.555 kilogrammes aussi pour un fil de même diamètre.

De sorte que le solide se trouve réduit à moins de moi-

tié lors de la séparation des molécules, qui jusques-là n'ont fait que glisser les unes sur les autres, comme le dit Coulomb, sans diminution sensible de leur force de cohésion.

Ainsi la dernière expression est la vraie mesure de la ténacité de ce métal; la première ne doit être conservée que pour servir d'avertissement dans les arts, des inconvéniens résultant de la mollesse qui lui est propre.

Du Zinc.

L'examen de la ténacité du *zinc* m'a paru mériter une attention particulière, non seulement parce qu'on n'a pu en avoir une mesure même approximative tant que l'on n'a pas employé du zinc pur et malléable, ce qu'on a jusqu'ici négligé, quoique Margraff en eût dès long-temps enseigné les procédés (1); mais encore à raison des usages auxquels il peut être employé dans cet état et dont on a déjà proposé d'importantes applications.

Muschembroeck qui n'opéroit que sur du zinc des fonderies de Goslar, simplement fondu et jeté en moule, n'a porté sa ténacité que de 75 à 83 livres pour des parallélipipèdes de 0.17 de pouce Rhénan (2). En prenant pour base le dernier terme, comme le plus élevé, quoique ce physicien revienne plus fréquemment à la première évaluation, le calcul ne donneroit encore, pour

---

(1) Dissertation IV, n° 14. Voyez aussi *Annales des Arts*, t. XXX, p. 171.

(2) *Cours de physique*, *etc.* § 1129, 1178 et 1187.

un fil de 2 millimètres de diamètre, qu'une résistance d'un peu moins de 6 kilogrammes.

Thomson, s'appuyant sur une observation du même auteur, de laquelle il résulteroit qu'une verge de zinc de 27 millimètres de diamètre pourroit supporter un poids de 1272.63 kilogrammes, a assigné à ce métal une force de cohésion qui seroit de 12.72 kilogrammes pour un fil de 2.5 millimètres de diamètre, et par conséquent de 8.14 pour un fil de 2 millimètres de diamètre; mais il s'est nécessairement glissé quelque inexactitude dans le calcul, car le rapport des carrés des diamètres dont il a déduit ces quantités, les réduiroit à 10.9107 kilomètres pour le premier cas, et à 6.9828 pour le second.

Il étoit facile de juger que toutes ces évaluations se trouveroient fort au dessous de la vérité, lorsqu'on emploieroit du zinc exempt de tout alliage, rendu parfaitement ductile et surtout déjà écroui par le marteau, la filière ou le laminoir.

Pour arriver à des résultats décisifs, j'ai soumis successivement à mes expériences du zinc préparé dans le laboratoire de M. Vauquelin, des feuilles venant des fonderies de Limbourg que M. Descostils m'a remises et qu'il avoit lui-même fait passer au laminoir; enfin des lames, des fils et des parallélipipèdes de zinc purifié et travaillé par MM. Praire et Tournu. La manière dont ils se sont comportés ne m'a guères présenté que les légères différences qui pouvoient venir d'un peu plus ou d'un peu moins d'écrouissement.

Le terme le plus élevé (toujours rapporté à 2 milli-

mètres de diamètre) m'a été donné par le zinc tiré à la filière venant de M. Praire : il n'a rompu qu'à la charge de 53.569 kilogrammes, et après avoir pris un peu d'allongement.

Le terme moyen de huit observations a été de 49.846 kilogrammes. Le zinc que m'a donné M. Vauquelin, simplement travaillé au marteau, a supporté 49.685 kilogrammes : de sorte que l'on peut en assurance porter la ténacité de ce métal pur et écroui à 49.793 kilogrammes, pour un fil de 2 millimètres de diamètre, ou pour un parallélipipède de 3.14159 millimètres carrés.

On ne se seroit pas attendu sans doute à un pareil résultat, et pour faire mieux apprécier la distance à laquelle nous nous trouvions de la vérité par la tradition des expériences faites sur le zinc du commerce, j'ai voulu en offrir la comparaison. Il y en a qui, dans les mêmes dimensions, ne soutient pas 10 kilogrammes; celui qui est coulé en table pour les piles voltaïques s'est rompu à moins de 14; et l'on conçoit facilement que ces ruptures grenues se sont opérées sans allongement sensible, circonstance qui, suivant la remarque de Coulomb, prouve que l'adhérence des molécules est trop foible pour souffrir un déplacement sans rupture.

La pesanteur spécifique du zinc reçoit un leger accroissement par l'écrouissement. C'est sans doute pour l'avoir pris dans ces différens états que les physiciens sont peu d'accord : Fisher l'a réduite à 6.862; Thomson la donne de 6.861 à 7.1, et d'après Brisson, pour le zinc écroui, de 7.1908. J'ai trouvé celle d'une planche de pile vol-

taïque de 6.994; celle du zinc tiré à la filière de M. Praire, de 7.032, et celle du zinc de Limbourg, passé plusieurs fois au laminoir, de 7.2005.

Lorsque que j'ai cherché à la déterminer à la balance hydrostatique, j'ai eu lieu d'observer le même phénomène que le plomb m'avoit offert dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire l'altération du zinc pendant son immersion dans l'eau distillée. Elle est pareillement devenue laiteuse en quelques heures, il s'est formé un dépôt de matière blanche, et à la longue les lames et les fils de ce métal se sont couverts d'une croûte blanche mammelonnée. Mais il y a ici cette différence remarquable, que l'eau de Seine exerce aussi sur le zinc une action un peu plus lente mais très-sensible; que cette action a lieu en vaisseaux fermés, même dans l'eau distillée, purgée d'air, soit par la pompe, soit par une forte ébullition; tandis que le plomb n'y éprouve aucun changement. Ajoutons à ces disparités déjà si frappantes, que le zinc est au nombre des métaux qui décomposent l'eau complètement à une haute température, propriété que n'a pas le plomb; que, comme le dit Thomson, lorsqu'on laisse le zinc en contact avec l'eau, sa surface se noircit, et qu'il y a dégagement de gaz hydrogène (1); et nous serons portés à conclure que l'altération de ces deux métaux dans l'eau ne s'opère pas de la même manière, que les produits qu'elle donne dans les mêmes circonstances ne sont pas de même nature; ce qui vient à l'ap-

---

(1) *Système de chimie*, t. I, p. 558.

pui de l'opinion que j'ai avancée que celui du plomb étoit plutôt une hydrate qu'un simple oxide.

Si l'on rapproche maintenant de la ténacité ainsi déterminée du zinc pur et forgé, la propriété que M. Sméaton lui a le premier reconnue d'être le plus dilatable des métaux, on trouvera un nouveau motif bien puissant de suivre le conseil qu'il donne de l'employer dans la construction des compensateurs, qui pourroient ainsi être réduits à de moindres dimensions; car il paroît qu'il restoit quelque inquiétude sur la solidité nécessaire pour en maintenir la forme.

Cette dilatabilité est, comme je l'ai dit dans mon *Essai de pyrométrie*, de 3108.33 millonièmes, dans le passage de la température de la glace fondante à celle de l'eau bouillante (1). M. Dalton ayant annoncé depuis que M. Sméaton lui paroissoit l'avoir portée trop haut, et que dans ses expériences sur l'eau contenue dans des vases de différentes matières, faisant fonctions de boules thermométriques, il l'avoit trouvée un peu au-dessous de celle du plomb (2); je me suis déterminé à le soumettre à de nouvelles expériences pyrométriques, et pour les mettre à l'abri de toute erreur qui pourroit venir soit de l'inexactitude des corrections, soit des imperfections des instrumens, de placer successivement le zinc et le plomb dans des circonstances absolument semblables, pour les faire passer de la température de la glace à celle de l'eau distillée bouillante;

---

(1) *Mémoires de l'Institut*, second semestre de 1808, p. 32.

(2) *Biblioth. britann.*, mars 1809, p. 218.

et trois observations m'ont donné constamment la dilatabilité du zinc plus grande que celle du plomb, dans le rapport de 32 à 28.4, c'est-à-dire un peu au dessus de celle indiquée par M. Sméaton, qui n'avoit opéré que sur du zinc qui n'avoit subi qu'une légère malléation, et qui n'étoit probablement pas au même degré de pureté que celui dont j'ai formé mon barreau pyrométrique.

Ces expériences confirment donc pleinement le soupçon, annoncé par M. Dalton lui-même, que le zinc dont étoit fait son vase thermométrique, et qui lui avoit été fourni par MM. Hodson et Silvestre, patentés pour la préparation des feuilles de ce métal employées à la couverture des toits, pouvoit tenir, comme il le dit, un peu d'étain, ou, comme il me paroîtroit plus vraisemblable, un peu de fer. Et il ne seroit pas étonnant que dans des travaux de grande fabrique on ne cherchât point à mettre, dans le départ des substances étrangères, une exactitude rigoureuse qui seroit le plus souvent inutile.

Je remarquerai en finissant que la ténacité du zinc rendu malléable ne peut que confirmer l'espérance de l'appliquer avec avantage à la couverture et autres usages analogues (1), par la possibilité de lui conserver assez de solidité avec une moindre épaisseur, et de trouver dans cette diminution plus que la compensation de l'excès de son prix sur celui du plomb que l'on a coutume d'em-

(1) Pott, dans sa *Dissertation sur le zinc*, parle, d'après un ancien auteur allemand, de l'usage de celui qu'on tiroit de l'Inde pour couvrir les toits; mais il ne croyoit pas qu'il fût facile de l'étendre en feuilles.

ployer. On peut aisément se rendre compte qu'un mètre carré de zinc de 1 millimètre d'épaisseur ne peseroit pas plus de 7 kilogrammes, tandis que le mètre carré de plomb, même laminé à demi-ligne ou 1,128 millimètres (le plus mince que l'on puisse employer dans les constructions) pèse au delà de 13 kilogrammes.

Il ne faut pas se dissimuler cependant que la grande dilatabilité du zinc l'exposeroit plus fréquemment encore que le plomb à des déchirures, si on le posoit de manière que ses dimensions ne pussent librement changer suivant les températures. D'autre part, nous avons vu qu'il étoit encore plus susceptible que le plomb d'être altéré par l'eau, et il n'y a qu'un long usage qui puisse faire connoître si le produit de cette action se fixant à sa surface, deviendra, comme pour le plomb, le garant de sa durée, en le défendant d'une nouvelle oxidation.

Le nickel étant aujourd'hui placé dans la classe des métaux ductiles, j'aurois désiré pouvoir le comprendre dans ces observations, mais il ne m'a pas été possible jusqu'à ce jour de m'en procurer d'assez pur pour le soumettre à ces épreuves.

Je ne puis mieux résumer les faits contenus dans ce Mémoire qu'en plaçant ici la série des métaux ductiles, dans l'ordre et avec la mesure de leur ténacité.

Un fil de 2 millimètres de diamètre.		Supporte avant de rompre.
De fer		249·659 kilog.
De cuivre		137·399
De platine		124·690
D'argent		85·062
D'or		68·216
De zinc		49·790
D'étain		15·740
De plomb	Suivant le rapport des dimensions au point de rupture	12·555
	Suivant le rapport du solide avant l'allongement	5·633

P. S. Quelques expériences faites sur le NICKEL, depuis la lecture de ce mémoire, marquent déjà sa place très-près du zinc, puisqu'il a supporté 47.67 kilogrammes. Mais, quoique j'aie opéré sur du nickel qui avoit été purifié avec soin par M. Vauquelin, comme il n'a pas présenté au laminoir ce haut degré de ductilité annoncé par Richter, qui paroît dépendre d'une fusion parfaite, et d'après lequel il a jugé que sa ténacité devoit être considérable, il convient d'attendre de nouveaux essais pour fixer définitivement son rang dans cette série. (Voyez *Annales de chimie*, tome LIII, page 174.

MÉMOIRE

Sur les mouvemens de la lumière dans les milieux diaphanes,

Par M. Laplace.

Lu le 30 janvier 1808.

La lumière, en passant de l'air dans un milieu transparent non cristallisé, se réfracte de manière que les sinus de réfraction et d'incidence sont constamment dans le même rapport; mais lorsqu'elle traverse la plupart des cristaux diaphanes, elle présente un singulier phénomène qui fut d'abord observé dans le cristal d'Islande, où il est très-sensible.

Un rayon qui tombe perpendiculairement sur une face d'un rhomboïde naturel de ce cristal, se divise en deux faisceaux : l'un traverse le cristal sans changer de direction; l'autre s'en écarte dans un plan parallèle au plan mené perpendiculairement à la face, par l'axe du cristal, c'est-à-dire, par la ligne qui joint les deux angles solides obtus de ce rhomboïde, et qui, par conséquent, est également inclinée aux côtés de ces angles : le faisceau réfracté s'éloigne de l'axe, en formant avec lui un plus grand angle que le rayon incident. Nous nommerons *section principale* d'une face naturelle ou artificielle,

un plan mené par cet axe, perpendiculairement à la face, et tout autre plan qui lui est parallèle. La division du rayon lumineux a généralement lieu relativement à une face quelconque, quel que soit l'angle d'incidence : une partie suit la loi de la réfraction ordinaire; l'autre partie suit une loi extraordinaire, reconnue par Huyghens, et qui, considérée comme un résultat de l'expérience, peut être mise au rang des plus belles découvertes de ce rare génie. Il y fut conduit par l'ingénieuse manière dont il envisageoit la propagation de la lumière qu'il concevoit formée des ondulations d'un fluide éthéré. Il supposoit dans les milieux diaphanes ordinaires, la vitesse de ces ondulations plus petite que dans le vide, et la même dans tous les sens; mais dans le cristal d'Islande, il imaginoit deux espèces d'ondulations : dans l'une, la vitesse étoit représentée, comme dans les milieux ordinaires, par les rayons d'une sphère dont le centre seroit au point d'incidence du rayon lumineux sur la face du cristal; dans l'autre, la vitesse étoit variable et représentée par les rayons d'un ellipsoïde de révolution, applati à ses pôles, ayant le même centre que la sphère précédente, et dont l'axe de révolution seroit parallèle à l'axe du cristal. Huyghens n'assignoit point la cause de cette variété d'ondulations; et les phénomènes singuliers qu'offre la lumière, en passant d'un cristal dans un autre, et dont nous parlerons ci-après, sont inexplicables dans son hypothèse. Cela joint aux grandes difficultés que présente la théorie des ondes de lumière, est la cause pour laquelle Newton et la plu-

part des géomètres qui l'ont suivi, n'ont pas justement apprécié la loi qu'Huyghens y avoit attachée. Ainsi cette loi a éprouvé le même sort que les belles lois de Képler, qui furent long-temps méconnues, pour avoir été associées à des idées systématiques dont malheureusement ce grand homme a rempli tous ses ouvrages. Cependant Huyghens avoit vérifié sa loi par un grand nombre d'expériences. L'excellent physicien M. Wollaston ayant fait, par un moyen fort ingénieux, diverses expériences sur la double réfraction du cristal d'Islande, il les a trouvées conformes à cette loi remarquable. Enfin M. Malus vient de faire à cet égard, une suite nombreuse d'expériences très-précises sur les faces naturelles et artificielles de ce cristal, et il a constamment observé entre elles et la loi d'Huyghens, le plus parfait accord : on ne doit donc pas balancer à la mettre au nombre des plus certains, comme des plus beaux résultats de la physique. L'analogie et des expériences directes ont fait voir à M. Malus, qu'elle s'étend encore au cristal de roche, et il est extrêmement vraisemblable qu'elle a lieu pour tous les cristaux qui réfractent doublement la lumière. L'ellipsoïde qui leur est relatif, doit être déterminé par l'expérience ; et sa position par rapport aux faces naturelles du cristal, peut répandre un grand jour sur la nature des molécules intégrantes des substances cristallisées ; car ces molécules doivent, chacune, avoir les mêmes propriétés que le cristal entier.

Voici maintenant un phénomène que la lumière présente, après avoir subi une double réfraction. Si l'on

place à une distance quelconque au-dessous d'un cristal, un second cristal de la même matière ou d'une matière différente, et disposé de manière que les sections principales des faces opposées des deux cristaux soient parallèles ; le rayon réfracté, soit ordinairement, soit extraordinairement, par le premier, le sera de la même manière par le second : mais si l'on fait tourner l'un des cristaux, en sorte que les sections principales soient perpendiculaires entre elles, alors le rayon réfracté ordinairement par le premier cristal, le sera extraordinairement par le second, et réciproquement. Dans les positions intermédiaires, chaque rayon émergent du premier cristal se divisera à son entrée dans le second cristal, en deux faisceaux dont l'intensité respective, dépendante de l'angle que les sections principales font entre elles, varie suivant une loi qui n'est pas moins intéressante à connoître que celle de la double réfraction. Lorsqu'on eut fait remarquer à Huyghens ce phénomène dans le cristal d'Islande, il convint avec la candeur qui caractérise un ami sincère de la vérité, qu'il étoit inexplicable dans ses hypothèses ; ce qui montre combien il est essentiel de les séparer de la loi de réfraction, qu'il en avoit déduite. Ce phénomène indique avec évidence, que la lumière, en traversant les cristaux à double réfraction, reçoit deux modifications diverses en vertu desquelles une partie est rompue *ordinairement*, et l'autre partie est rompue *extraordinairement ;* mais ces modifications ne sont point absolues ; elles sont relatives à la position du rayon par rapport à l'axe du cristal, puisqu'un rayon

rompu *ordinairement* par un cristal, est rompu *extraordinairement* par un autre, si les sections principales de leurs faces opposées sont perpendiculaires entre elles.

Il seroit bien intéressant de rapporter la loi d'Huyghens à des forces attractives et répulsives, ainsi que Newton l'a fait à l'égard de la loi de réfraction ordinaire : il est en effet, très-vraisemblable qu'elle dépend de semblables forces, et je m'en suis assuré par les considérations suivantes qui conduisent à une théorie nouvelle de ce genre de phénomènes.

On sait que le principe de la moindre action a généralement lieu dans le mouvement d'un point qui leur est soumis. En appliquant ce principe à la lumière, on peut faire abstraction de la courbe insensible qu'elle décrit dans son passage du vide dans un milieu diaphane, et supposer son mouvement uniforme, lorsqu'elle y a pénétré d'une quantité sensible. Le principe de la moindre action se réduit donc alors à ce que la lumière parvient d'un point pris au-dehors, à un point pris dans l'intérieur du cristal, de manière que si l'on ajoute le produit de la droite qu'elle décrit au-dehors, par sa vitesse primitive, au produit de la droite qu'elle décrit au-dedans, par la vitesse correspondante, la somme soit un *minimum*. Ce principe donne toujours la vitesse de la lumière dans un milieu diaphane, lorsque la loi de la réfraction est connue, et réciproquement il donne cette loi, quand on connoît la vitesse. Mais une condition à remplir dans le cas de la réfraction extraordinaire, est que la vitesse du rayon lumineux dans le cristal, soit indépendante

de la manière dont il y est entré, et ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal, c'est-à-dire, de l'angle que ce rayon forme avec une ligne parallèle à l'axe. En effet, si l'on imagine une face artificielle perpendiculaire à l'axe, tous les rayons intérieurs également inclinés à cet axe, le seront également à la face, et seront évidemment soumis aux mêmes forces au sortir du cristal : tous reprendront leur vitesse primitive dans le vide ; la vitesse dans l'intérieur est donc pour tous, la même. (*Voyez la note de la fin de ce Mémoire*).

En partant de ces données, je parviens aux deux équations différentielles que donne le principe de la moindre action, et dans lesquelles la vitesse intérieure est une fonction indéterminée de l'angle que le rayon réfracté forme avec l'axe du cristal. J'examine ensuite les deux cas les plus simples auxquels je me borne, parce qu'ils renferment les lois de réfraction, jusqu'à présent observées. Dans le premier cas, le carré de la vitesse de la lumière est augmenté dans l'intérieur du milieu, d'une quantité constante. On sait que ce cas est celui des milieux diaphanes ordinaires, et que cette constante exprime l'action du milieu sur la lumière. Les deux équations précédentes montrent qu'alors les rayons incident et réfracté sont dans un même plan perpendiculaire à la surface du milieu, et que les sinus des angles qu'ils forment avec la verticale, sont constamment dans le même rapport.

Après ce premier cas, le plus simple est celui dans lequel l'action du milieu sur la lumière, est égale à une

constante, plus un terme proportionnel au carré du cosinus de l'angle que le rayon réfracté forme avec l'axe; car cette action devant être la même de tous les côtés de l'axe, elle ne peut dépendre que des puissances paires du sinus et du cosinus de cet angle. L'expression du carré de la vitesse intérieure, est alors de la même forme que celle de l'action du milieu. En la substituant dans les équations différentielles du principe de la moindre action, je détermine les formules de réfraction, relatives à ce cas, et je trouve qu'elles sont identiquement celles que donne la loi d'Huyghens; d'où il suit que cette loi satisfait à la fois au principe de la moindre action, et à la condition que la vitesse intérieure ne dépende que de l'angle formé par l'axe et par le rayon réfracté; ce qui ne laisse aucun lieu de douter qu'elle est due à des forces attractives et répulsives dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Jusqu'ici cette loi n'étoit qu'un résultat de l'observation, approchant de la vérité, dans les limites des erreurs dont les expériences les plus précises sont encore susceptibles; maintenant on peut la considérer comme une loi rigoureuse, puisqu'elle en remplit toutes les conditions.

Une donnée précieuse pour déterminer la nature des forces dont elle dépend, est l'expression de la vitesse, qui est égale à une fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le rayon de l'ellipsoïde d'Huyghens, suivant lequel la lumière se dirige, la vitesse dans le vide étant prise pour unité. La vitesse du rayon *ordinaire* dans le cristal, est comme l'on sait, constante

et égale à l'unité divisée par le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence. Huyghens a reconnu par l'expérience, que ce rapport est à fort peu près représenté par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde; ce qui lie entre elles les deux réfractions ordinaire et extraordinaire. Mais on peut démontrer de la manière suivante, que cette liaison remarquable est un résultat nécessaire de l'action du cristal sur la lumière, et qu'il ne dépend que de la considération qu'un rayon ordinaire se change en rayon extraordinaire, lorsque l'on change convenablement sa position par rapport à l'axe d'un nouveau cristal. Si ce rayon est perpendiculaire à la face artificielle du cristal coupé perpendiculairement à son axe, il est clair qu'une inclinaison infiniment petite de l'axe sur la face, produite par une section infiniment voisine de la première, suffit pour en faire un rayon extraordinaire. Cette inclinaison ne peut qu'altérer infiniment peu l'action du cristal, et la vitesse du rayon dans son intérieur; cette vitesse est donc alors celle du rayon extraordinaire, et par conséquent elle est égale à l'unité divisée par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde. Elle surpasse ainsi généralement celle du rayon extraordinaire, la différence des carrés de ces deux vitesses étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle que l'axe forme avec ce dernier rayon : cette différence représente celle de l'action du cristal sur ces deux espèces de rayons. Elle est la plus grande, lorsque le rayon incident sur une surface artificielle menée par l'axe du cristal, est dans un plan perpendiculaire à cet axe : alors la réfraction extraordinaire suit la même loi

que la réfraction ordinaire ; seulement, le rapport des sinus de réfraction et d'incidence, qui dans le cas de la réfraction ordinaire, est le demi-petit axe de l'ellipsoïde, est égal au demi-grand axe dans la réfraction extraordinaire.

Suivant Huyghens, la vitesse du rayon extraordinaire dans le cristal, est exprimée par le rayon même de l'ellipsoïde; son hypothèse ne satisfait donc point au principe de la moindre action; mais il est remarquable qu'elle satisfasse au principe de Fermat, qui consiste en ce que la lumière parvient d'un point pris au-dehors du cristal, à un point pris dans son intérieur, dans le moins de temps possible; car il est visible que ce principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse. Ainsi l'un et l'autre de ces principes conduisent à la loi de la réfraction, découverte par Huyghens, pourvu que dans le principe de Fermat, on prenne avec Huyghens, le rayon de l'ellipsoïde pour représenter la vitesse, et que, dans le principe de la moindre action, ce rayon représente le temps employé par la lumière à parcourir un espace déterminé pris pour unité. Si les axes de l'ellipsoïde sont égaux entre eux, il devient une sphère, et la réfraction se change en réfraction ordinaire. Ainsi dans ces phénomènes, la nature en allant du simple au composé, fait succéder les formes elliptiques à la forme circulaire, comme dans les mouvemens et la figure des corps célestes.

L'identité de la loi d'Huyghens avec le principe de Fermat a lieu généralement, quel que soit le sphéroïde

qui, dans son hypothèse, représente la vitesse intérieure. Je fais voir très-simplement que cette identité résulte de la manière ingénieuse dont Huyghens envisage la propagation des ondes de lumière; en sorte que cette manière, quoique très-hypothétique, représente encore toutes les lois de réfraction, qui peuvent être dues à des forces attractives et répulsives; puisque le principe de Fermat donne les mêmes lois que celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse.

Pour compléter la théorie précédente, je déduis des formules de réfraction, données par le principe de la moindre action, la réfraction de la lumière par les surfaces intérieures des cristaux diaphanes. A leurs surfaces extérieures, elle se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; mais aux surfaces intérieures, un rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se réfléchit en partie, et se divise par cette réflexion, en deux faisceaux dont je détermine les directions respectives. M. Malus a, le premier, rattaché ces réflexions à la loi de réfraction d'Huyghens, et il a fait à cet égard un grand nombre d'expériences. Leur accord remarquable avec les résultats du principe de la moindre action, achève de démontrer que tous les phénomènes de la réfraction et de la réflexion de la lumière dans les cristaux, sont le résultat de forces attractives et répulsives.

Descartes est le premier qui ait publié la vraie loi de la réfraction ordinaire, que Képler et d'autres physiciens avoient inutilement cherchée. Huyghens affirme dans sa Dioptrique, qu'il l'a vue présentée sous une autre forme,

dans un manuscrit de Snellius, qu'on lui a dit avoir été communiqué à Descartes, et d'où peut-être, ajoute-t-il, ce dernier a tiré le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence. Mais cette réclamation tardive d'Huyghens, en faveur de son compatriote, ne me paroît pas suffisante pour enlever à Descartes, le mérite d'une découverte que personne ne lui a contestée de son vivant. Ce grand géomètre l'a déduite des deux propositions suivantes : l'une, que la vitesse de la lumière parallèle à la surface d'incidence n'est altérée ni par la réflexion ni par la réfraction ; l'autre, que la vitesse est différente dans les milieux divers, et plus grande dans ceux qui réfractent plus la lumière. Descartes en a conclu que si, dans le passage d'un milieu dans un autre moins réfringent, l'inclinaison du rayon lumineux est telle que l'expression du sinus de réfraction soit égale ou plus grande que l'unité, alors la réfraction se change en réflexion, les deux angles de réflexion et d'incidence étant égaux. Tous ces résultats sont conformes à la nature, comme Newton l'a fait voir par la théorie des forces attractives ; mais les preuves que Descartes en a données sont inexactes, et il est assez remarquable qu'Huyghens et lui soient parvenus, au moyen de théories incertaines ou fausses, aux véritables lois de la réfraction de la lumière. Descartes eut à ce sujet, avec Fermat, une longue querelle que les cartésiens prolongèrent après sa mort, et qui fournit à Fermat l'occasion heureuse d'appliquer sa belle méthode *de maximis et minimis*, aux expressions radicales. En considérant cette

matière sous un point de vue métaphysique, il chercha la loi de la réfraction, par le principe que nous avons exposé précédemment, et il fut très-surpris d'arriver à celle de Descartes. Mais ayant trouvé que, pour satisfaire à son principe, la vitesse de la lumière devoit être plus petite dans les milieux diaphanes que dans le vide, tandis que Descartes la supposoit plus grande; il se confirma dans la pensée que les démonstrations de ce grand géomètre étoient fautives. Maupertuis convaincu par les raisonnemens de Newton, de la vérité des suppositions de Descartes, reconnut que la fonction qui dans le mouvement de la lumière est un *minimum*, n'est pas comme Fermat le suppose, la somme des quotiens, mais celle des produits des espaces décrits, par les vitesses correspondantes. Ce résultat étendu à l'intégrale du produit de l'élément de l'espace, par la vitesse dans les mouvemens variables, a conduit Euler au principe de la moindre action, que M. de Lagrange ensuite a dérivé des lois primordiales du mouvement. L'usage que je fais de ce principe, soit pour reconnoître si la loi de réfraction extraordinaire donnée par Huyghens dépend de forces attractives ou répulsives, et pour l'élever ainsi au rang des lois rigoureuses, soit pour déduire réciproquement l'une de l'autre, les lois de la réfraction et de la vitesse de la lumière dans les milieux diaphanes, m'a paru mériter l'attention des physiciens et des géomètres.

Voici présentement mon analyse. Abaissons d'un point quelconque de la direction du rayon lumineux

dans le vide, une perpendiculaire sur la face du cristal; nommons p cette perpendiculaire, θ l'angle d'incidence du rayon et ϖ l'angle que sa projection forme avec une droite invariable située dans le plan de la face, et passant par le point d'incidence du rayon : nommons pareillement, p', θ' et ϖ' les mêmes quantités relatives au rayon réfracté : $p + p'$ sera la distance des deux plans parallèles à la face, et passant respectivement par les deux points pris sur les directions des deux rayons incident et réfracté. La distance des deux plans passant respectivement par les mêmes points, perpendiculairement à la face, et parallèlement à la droite invariable, sera

$$p.\ tang\ \theta.\ sin\ \varpi + p'.\ tang\ \theta'.\ sin\ \varpi'$$

Enfin la distance des deux plans passant respectivement par les mêmes points, perpendiculairement à la face et à la droite invariable, sera

$$p.\ tang\ \theta.\ cos\ \varpi + p'.\ tang\ \theta'.\ cos\ \varpi'$$

Si l'on fait varier les angles θ, ϖ, θ' et ϖ', de manière que les deux points pris sur les directions des rayons, soient fixes; ces trois distances resteront les mêmes, et l'on aura les deux équations différentielles

$$\begin{aligned} o &= \frac{p.\ d\theta.\ sin\ \varpi}{cos^2\ \theta} + p.\ d\varpi.\ tang\ \theta.\ cos\ \varpi \\ &+ \frac{p'.\ d\theta'.\ sin\ \varpi'}{cos^2\ \theta'} + p'.\ d\varpi'.\ tang\ \theta'.\ cos\ \varpi' \\ o &= \frac{p.\ d\theta.\ cos\ \varpi}{cos^2\ \theta} - p.\ d\varpi.\ tang\ \theta.\ sin\ \varpi \\ &+ \frac{p'.\ d\theta'.\ cos\ \varpi'}{cos^2\ \theta'} - p'.\ d\varpi'.\ tang\ \theta'.\ sin\ \varpi' \end{aligned}$$

Suivant le principe de la moindre action, la fonction $\frac{p}{\cos\theta} + \frac{p'v}{\cos\theta'}$, doit être un *minimum*, v étant la vitesse du rayon dans l'intérieur du cristal, lorsqu'il y a pénétré d'une quantité sensible, sa vitesse dans le vide étant prise pour unité; car on peut négliger la partie de l'intégrale $\int v ds$, relative à la courbe imperceptible que décrit le rayon à son passage dans le cristal, et dont nous exprimons l'élément par ds. On a donc

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{p.\, d\theta.\, \sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{p'.\, v d\theta'.\, \sin\theta'}{\cos^2\theta'} \\ & + \frac{p'}{\cos\theta'} . \left[\left(\frac{dv}{d\theta'}\right). d\theta' + \left(\frac{dv}{d\varpi'}\right). d\varpi'\right] \end{aligned}$$

La première des trois équations différentielles précédentes, multipliée par $\sin\varpi$, et ajoutée à la seconde multipliée par $\cos\varpi$, donne

$$\begin{aligned} \frac{p.\, d\theta}{\cos^2\theta} = {} & - \frac{p'.\, d\theta'}{\cos^2\theta'} . \cos(\varpi' - \varpi) \\ & + p'\, d\varpi'.\, \tan\theta'.\, \sin(\varpi' - \varpi) \end{aligned}$$

Cette valeur de $\frac{p.d\theta}{\cos^2.\theta}$, substituée dans la troisième équation différentielle, donne

$$\begin{aligned} o = {} & - \frac{d\theta'.\, \sin\theta}{\cos^2\theta'} . \cos(\varpi' - \varpi) \\ & + d\varpi'.\, \sin\theta.\, \tan\theta'.\, \sin(\varpi' - \varpi) \\ & + \frac{v d\theta'.\, \sin\theta'}{\cos^2\theta'} + \frac{d\theta'}{\cos\theta'} . \left(\frac{dv}{d\theta'}\right) + \frac{d\varpi'}{\cos\theta'} . \left(\frac{dv}{d\varpi'}\right) \end{aligned}$$

En comparant séparément les coefficiens de $d\theta'$ et $d\varpi'$,

on aura les deux équations suivantes données par le principe de la moindre action,

$$\sin\theta.\cos(\varpi'-\varpi)=v.\sin\theta'+\left(\frac{dv}{d\theta'}\right).\cos\theta'\ldots\ldots\quad(1)$$

$$\sin\theta.\sin\theta'.\sin(\varpi'-\varpi)=-\left(\frac{dv}{d\varpi'}\right).\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Quand la loi de réfraction est connue, on a les valeurs de θ et ϖ, en fonctions de θ' et de ϖ'. Ces valeurs substituées dans les deux équations précédentes, donneront la vitesse v du rayon lumineux, correspondante à cette loi, du moins si la loi de réfraction est un résultat de forces attractives et répulsives. Réciproquement, si la vitesse v est donnée, on aura au moyen de ces équations, la loi correspondante de la réfraction.

Dans l'intérieur du cristal, la vitesse ne dépend que des angles formés par la direction du rayon, et par des axes fixes dans l'intérieur du corps. Supposons qu'il n'y ait qu'un axe, et que V soit l'angle formé par cet axe et par la direction du rayon réfracté, v sera fonction de V. Si par l'axe, on mène un plan perpendiculaire à la face du cristal, et que l'on prenne pour la ligne invariable d'où l'on compte les angles ϖ et ϖ' l'intersection de ce plan avec la face; si de plus on nomme λ l'angle que fait avec la face, un plan perpendiculaire à l'axe, on aura

$$\cos V=\cos\lambda.\cos\theta-\sin\lambda.\sin\theta'.\cos\varpi'$$

On aura donc, en regardant v comme fonction de $\cos V$,

$$\left(\frac{dv}{d\theta'}\right)=-\left(\frac{dv}{d.\cos V}\right).(\cos\lambda.\sin\theta'+\sin\lambda.\cos\theta'.\cos\varpi')$$

$$\left(\frac{dv}{d\varpi'}\right) = \left(\frac{dv}{d.\ cos\ V}\right).\ sin\ \lambda.\ sin\ \theta'.\ sin\ \varpi'$$

En multipliant l'équation (1) par $sin\ \theta'.\ sin\ \varpi'$ et en en retranchant l'équation (2) multipliée par $cos\ \varpi'$, on aura

$$sin\ \theta.\ sin\ \varpi = sin\ \theta'.\ sin\ \varpi'.\left[v - cos\ V.\left(\frac{dv}{d.\ cos\ V}\right)\right]\ (3)$$

Si l'on multiplie ensuite l'équation (1) par $sin\ \theta'.\ cos\ \varpi'$, et qu'on l'ajoute à l'équation (2) multipliée par $sin\ \varpi'$, on aura

$$sin\ \theta.\ cos\ \varpi = sin\ \theta'.\ cos\ \varpi'.\left[v - cos\ V.\left(\frac{dv}{d.\ cos\ V}\right)\right] - sin\ \lambda.\left(\frac{dv}{d.\ cos\ V}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ces deux équations donneront la loi de la réfraction extraordinaire, lorsque v sera donné en fonction de $cos\ V$, et réciproquement. De plus, elles satisferont à la condition que la vitesse du rayon lumineux dans l'intérieur du cristal, ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal.

Nous observerons ici que non-seulement v doit être fonction de $cos\ V$, mais qu'il ne doit dépendre que des puissances paires de $cos\ V$; car nous avons observé ci-dessus que la vitesse v est la même pour tous les rayons qui forment avec l'axe, le même angle. Examinons présentement les lois de la réfraction, relatives aux deux expressions les plus simples de la vitesse.

Premier cas.

Le cas le plus simple de tous, est celui dans lequel la vitesse v est constante. Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$sin\ \theta .\ sin\ \varpi = v .\ sin\ \theta' .\ sin\ \varpi'$$
$$sin\ \theta .\ cos\ \varpi = v .\ sin\ \theta' .\ cos\ \varpi'$$

En divisant la première par la seconde, on a

$$tang\ \varpi = tang\ \varpi'$$

ce qui montre que les deux rayons incident et réfracté sont dans un même plan perpendiculaire à la face d'incidence. En ajoutant ensemble les carrés des mêmes équations, on a

$$sin\ \theta' = \frac{sin\ \theta}{v}$$

ce qui donne le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence.

Le cas que nous examinons, est celui des milieux diaphanes ordinaires. On sait qu'alors le carré de la vitesse de la lumière, est augmenté par l'action du milieu, d'une quantité constante qui mesure la force réfractive de ce milieu, et qui est égale à la différence des carrés des sinus d'incidence et de réfraction, divisée par le carré du sinus de réfraction. (*Voy.* le chapitre I du livre X de la *Mécanique céleste*).

Second cas.

Le cas le plus simple après le précédent, est celui dans lequel l'action du milieu est variable et égale à une constante, plus un terme proportionnel au carré du cosinus de l'angle V. Dans ce cas l'expression du carré de la vitesse v est de la forme $\beta^2 + \alpha^2 . \cos^2 . V$; ce qui donne

$$\left(\frac{dv}{d. \cos V}\right) = \frac{\alpha^2 . \cos V}{v}$$

Les équations (3) et (4) deviennent ainsi

$$\sin \theta . \sin \varpi = \frac{\beta^2 . \sin \theta' . \sin \varpi'}{v}$$

$$\sin \theta . \cos \varpi = \frac{\beta^2 . \sin \theta' . \cos \varpi'}{v} - \frac{\alpha^2 . \sin \lambda . \cos V}{v}$$

Ces deux équations donnent

$$\left(\sin \theta . \cos \varpi + \frac{\alpha^2 . \sin \lambda . \cos V}{v}\right)^2 + \sin^2 \theta . \sin^2 \varpi = \frac{\beta^4 . \sin^2 \theta'}{v^2}$$

En multipliant ensuite la dernière des mêmes équations par $\sin . \lambda$, et substituant pour $\sin . \lambda . \cos . \theta' . \cos . \varpi'$, sa valeur $\cos . \lambda . \cos \theta' - \cos V$, on a

$$\left(\sin \lambda . \sin \theta . \cos \varpi + \frac{(\beta^2 + \alpha^2 . \sin^2 \lambda) . \cos V}{v}\right)^2 = \frac{\beta^4 . \cos^2 \lambda . \cos^2 \theta}{v^2}$$

Enfin, en multipliant cette équation par α^2, et en la retranchant de la précédente multipliée par $\beta^2 + \alpha^2$.

$sin^2. \lambda$; en substituant ensuite au lieu de $\alpha^2. \cos^2. V$, sa valeur $v^2 - \beta^2$ et supposant

$$p = \beta^2 + \alpha^2. sin^2 \lambda$$

on trouve après toutes les réductions

$$v = \frac{\beta^2. \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}. \cos \theta'}{\sqrt{\beta^2. p - sin^2 \theta. (\beta^2. \cos^2 \varpi + p. sin^2 \varpi)}}$$

L'expression précédente de $sin\ \theta. sin\ \varpi$, donne ainsi

$$tang\ \theta'. sin\ \varpi' = \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}. sin\ \theta. sin\ \varpi}{\sqrt{\beta^2. p - sin^2 \theta. (\beta^2. \cos^2 \varpi + p. sin^2 \varpi)}} \ldots (5)$$

l'expression de $sin\ \theta. \cos \varpi$, donne en y substituant au lieu de $\cos V$, sa valeur $\cos \lambda. \cos \theta' - sin\ \lambda. sin\ \theta'. sin\ \lambda. \cos \varpi'$,

$$tang\ \theta'. \cos \varpi' = \frac{\beta^2. \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}. sin\ \theta. \cos \varpi}{p. \sqrt{\beta^2. p - sin^2 \theta. (\beta^2. \cos^2 \varpi + p. sin^2 \varpi)}} + \frac{\alpha^2. sin\ \lambda. \cos \lambda}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Comparons maintenant ces résultats à ceux que donne la loi d'Huyghens.

Imaginons une face naturelle ou artificielle du cristal, sur laquelle soit tracée l'ellipse AFE, dont le centre C soit celui d'un ellipsoïde de révolution $AFED$, CD étant le demi-axe de révolution, parallèle à l'axe du cristal. Menons par CD un plan perpendiculaire à la face, et la coupant suivant la droite ACE. Soit RC un rayon incident, et menons par RC un plan perpendiculaire à

la face, et la coupant suivant la droite BCK. Menons encore dans le plan RCK, OC perpendiculaire à CR, et plaçons dans l'angle OCK, la droite OK perpendiculaire à OC, et qui représente la vitesse de la lumière dans le vide, vitesse que nous prendrons pour unité. Dans le plan de l'ellipse AFE, menons par le point K, KT perpendiculaire à CK. Si maintenant on conçoit un plan mené par KT, et tangent au sphéroïde $AFED$, en I; la droite CI sera la direction du rayon réfracté.

Pour réduire cette construction en analyse, nommons, comme précédemment, θ l'angle d'incidence du rayon CR; nommons encore ϖ l'angle que la projection CB de ce rayon sur la face du cristal forme avec AC; nommons pareillement θ' l'angle de réfraction du rayon CI, et ϖ' l'angle que la projection de ce rayon sur la face forme avec CE. Soit a le demi grand axe de l'ellipsoïde, b son demi-axe de révolution, et λ l'angle formé par la face du cristal et par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; cela posé, on trouve les deux équations suivantes :

$$tang\,\theta'.\,sin\,\varpi' = \frac{a^2.\,sin\,\theta.\,sin\,\varpi}{\sqrt{A - a^2.\,sin^2\theta.\,(b^2.\,cos^2\varpi + A.\,sin^2\varpi)}}$$

$$tang\,\theta'.\,cos\,\varpi' = \frac{a^2 b^2.\,sin\,\theta.\,cos\,\varpi}{A.\sqrt{A - a^2.\,sin^2\theta.\,(b^2.\,cos^2\varpi + A.\,sin^2\varpi)}} + \frac{B}{A}$$

A et B étant donnés par les équations

$$A = b^2 + (a^2 - b^2).\,sin^2\lambda$$
$$B = (a^2 - b^2).\,sin\,\lambda.\,cos\,\lambda$$

Je ne donne point ici les démonstrations de ces formules auxquelles M. Malus est parvenu d'une manière élégante, et que les géomètres tireront facilement de la construction d'Huyghens : elles ont, comme on le voit par l'inspection seule, une grande analogie avec les équations (5) et (6) ; mais il est facile de voir qu'elles coïncident entièrement avec elles, en faisant dans les équations (5) et (6)

$$\beta^2 = \frac{1}{a^2}; \quad \alpha^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$$

ce qui donne

$$v = \frac{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2).\cos^2 V}}{ab}$$

Le rayon de l'ellipsoïde est

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2).\cos^2 V}}$$

La vitesse de la lumière rompue extraordinairement dans l'intérieur du cristal, est donc égale à l'unité divisée par ce rayon.

Suivant Huyghens, cette vitesse est représentée par le rayon même ; ses hypothèses ne satisfont donc point au principe de la moindre action : mais elles satisfont à celui de Fermat ; car ce dernier principe revient à celui de la moindre action, en y renversant l'expression de la vitesse.

On peut démontrer très-simplement l'identité de ce principe, et de la manière dont Huyghens envisage la réfraction de la lumière. Il établit que toutes les parties

d'une onde lumineuse, qui sont dans un plan CO perpendiculaire au rayon incident CR, parviennent dans le même temps et suivant des directions parallèles, au plan KI mené par KT tangentiellement au sphéroïde dont C est le centre, et dont les rayons représentent les vitesses de la lumière dans le cristal. En effet, si l'on prend KO pour unité de temps, d'espace et de vitesse; le temps employé à parcourir oc parallèle à OK, sera représenté par co, et par conséquent il sera égal à $\frac{cC}{KC}$. Le temps employé à parcourir ci parallèle à CI, sera au temps employé à parcourir CI, et qu'il suppose être égal au temps employé à parcourir KO, c'est-à-dire à l'unité, comme ci est à CI; ce temps est donc égal à $\frac{Kc}{KC}$. En l'ajoutant à $\frac{Cc}{KC}$, la somme sera l'unité. Ainsi le point o de l'onde parvient en i, dans le même temps que le point O parvient en K. Menons $o'c'$ infiniment près de oc, et parallèlement à cette ligne : le point o' de l'onde parviendra en i', suivant la ligne brisée $o'c'i'$, dans une unité de temps. Menons présentement les droites $c'o$ et $c'i$, et supposons que le point o parvienne en i suivant la ligne brisée $oc'i$; $c'o'$ étant perpendiculaire à CO, la droite $c'o$ peut être supposée égale à $c'o'$, et les temps employés à les parcourir, peuvent être supposés égaux. De plus, le temps employé à parcourir $c'i$ peut être supposé égal au temps employé à parcourir $c'i'$, parce que le plan Ki' touchant en i' le sphéroïde semblable au sphéroïde $AFED$, dont le centre est en c', et dont les dimensions sont diminuées dans la raison de

Kc' à KC, les deux points i et i' peuvent être supposés à la surface de ce sphéroïde. Selon Huyghens, les vitesses suivant $c'i$ et $c'i'$ sont proportionnelles à ces lignes; les temps employés à les parcourir sont donc égaux. Ainsi le temps de la transmission de la lumière suivant la ligne brisée $oc'i$, est égal à l'unité, comme suivant la ligne brisée oci. La différentielle de ces deux temps est donc nulle; ce qui est le principe de Fermat.

Il est clair que ce raisonnement a généralement lieu, quelle que soit la position du point c', et quand il ne seroit pas sur la droite CK, pourvu qu'il soit près de cette droite, sur la face du cristal : ce raisonnement est d'ailleurs indépendant de la nature du sphéroïde dont les rayons représentent les vitesses de sa lumière.

En renversant l'expression de la vitesse, le principe de Fermat donne celui de la moindre action; les lois de réfraction, qui résultent des hypothèses d'Huyghens, sont donc généralement conformes à ce dernier principe, et c'est la raison pour laquelle ces hypothèses représentent la nature.

Le principe de la moindre action peut servir encore à déterminer les lois de la réflexion de la lumière; car quoique la nature de la force qui fait rejaillir la lumière à la surface des corps soit inconnue, cependant on peut la considérer comme une force répulsive qui rend en sens contraire à la lumière, la vitesse qu'elle lui fait perdre; de même que l'élasticité restitue aux corps en sens contraire, la vitesse qu'elle détruit : or on sait que dans ce cas, le principe de la moindre action subsiste tou-

jours. A l'égard d'un rayon lumineux, soit ordinaire, soit extraordinaire, réfléchi par la surface extérieure d'un corps, ce principe se réduit à ce que la lumière parvient d'un point à un autre, par le chemin le plus court de tous ceux qui rencontrent la surface. En effet, la vitesse de la lumière réfléchie est la même que celle de la lumière directe ; et l'on peut établir en principe général, que lorsqu'un rayon lumineux, après avoir éprouvé l'action de tant de forces que l'on voudra, revient dans le vide, il y reprend sa vitesse primitive. La condition du chemin le plus court donne l'égalité des angles de réflexion et d'incidence, dans un plan perpendiculaire à la surface, ainsi que Ptolomée l'avoit déjà remarqué. C'est la loi générale de la réflexion à la surface extérieure des corps.

Mais lorsque la lumière, en entrant dans un cristal, s'est divisée en rayon ordinaire et extraordinaire, une partie de ces rayons est réfléchie par la surface intérieure à leur sortie du cristal. En se réfléchissant, chaque rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se divise en deux autres ; en sorte qu'un rayon solaire, en pénétrant dans le cristal, forme par sa réflexion partielle à la surface de sortie, quatre faisceaux distincts dont nous allons déterminer les directions.

Supposons d'abord les faces d'entrée et de sortie, que nous nommerons *première* et *seconde* face, parallèles. Donnons au cristal une épaisseur insensible, et cependant plus grande que la somme des rayons des sphères d'activité des deux faces. Dans ce cas, on prouvera par le

raisonnement qui précède, que les quatre faisceaux réfléchis n'en formeront sensiblement qu'un seul situé dans le plan d'incidence du rayon générateur, et formant avec la première face, l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Restituons maintenant au cristal son épaisseur : il est clair que, dans ce cas, les faisceaux réfléchis après leur sortie par la première face, prendront des directions parallèles à celles qu'ils avoient prises dans le premier cas ; ces faisceaux seront donc parallèles entre eux et au plan d'incidence du rayon générateur : seulement au lieu d'être sensiblement confondus, comme dans le premier cas, ils seront séparés par des distances d'autant plus grandes, que le cristal aura plus d'épaisseur.

Maintenant si l'on considère un rayon quelconque intérieur, sortant en partie par la seconde face, et en partie réfléchi par elle en deux faisceaux, le rayon sorti sera parallèle au rayon générateur; car la lumière, en sortant du cristal, doit prendre une direction parallèle à celle qu'elle avoit en y entrant, puisque les deux faces d'entrée et de sortie étant supposées parallèles, elle éprouve en sortant, l'action des mêmes forces qu'elle avoit éprouvées en entrant, mais en sens contraire. Concevons par la direction du rayon sorti, un plan perpendiculaire à la seconde face ; et dans ce plan, imaginons au-dehors du cristal une droite passant par le point de sortie, et formant avec la perpendiculaire à la face, mais du côté opposé à la direction du rayon sorti, le même angle que cette direction : enfin concevons un rayon solaire entrant suivant cette droite dans le cristal. Ce rayon

se partagera à son entrée, en deux autres qui, au sortir du cristal par la première face, prendront des directions parallèles au rayon solaire avant son entrée par la seconde face : elles seront visiblement parallèles aux directions des deux faisceaux réfléchis, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux rayons dans lesquels se divise le rayon solaire en entrant par la seconde face, se confondent respectivement dans l'intérieur du cristal, avec les directions des deux faisceaux réfléchis. Or, les formules précédentes donnent les directions des rayons dans lesquels le rayon solaire se divise ; elles donneront donc aussi celle des deux faisceaux réfléchis dans l'intérieur du cristal.

Si les deux faces du cristal ne sont pas parallèles, on aura par les mêmes formules, les directions des deux rayons dans lesquels le rayon générateur se divise en pénétrant par la première face. On aura ensuite par ces formules, les directions de chacun de ces rayons à leur sortie par la seconde face ; ensuite la construction précédente donnera les directions dans l'intérieur des quatre faisceaux réfléchis par cette face ; enfin par nos formules, on conclura leurs directions au sortir du cristal par la première face. On aura donc ainsi tous les phénomènes de la réflexion de la lumière par les surfaces des cristaux diaphanes. On pourroit les déduire directement de l'analyse qui nous a conduits aux formules de la réfraction ; mais la méthode qui précède, est beaucoup plus simple.

NOTE.

Je vais présentement démontrer cette proposition générale, savoir, que de quelque manière qu'une molécule de lumière parvienne du vide, dans un milieu d'une densité quelconque, soit qu'elle y parvienne directement, soit qu'elle n'y parvienne qu'après avoir traversé plusieurs autres milieux; dans tous ces cas, sa vitesse dans ce milieu sera toujours la même. En effet, si l'on nomme v cette vitesse, dm une molécule qui agit sur la lumière, soit par attraction, soit par répulsion; f sa distance à la molécule de lumière; $\varphi\,(f)$ la loi de la force, relative à la distance; on aura, par le principe de la conservation des forces vives,

$$v^2 = a^2 + 2 \int dm.\ df.\ \varphi\,(f)$$

a étant la vitesse de la lumière dans le vide, et l'intégrale devant s'étendre à toutes les molécules qui agissent sur le rayon lumineux. On peut envisager cette intégrale de deux manières. Dans la première on ne la considère que très-près de la surface d'entrée dans le milieu; et l'on conçoit que lorsque le rayon y a pénétré d'une quantité sensible, alors il est également attiré de toutes parts, et sa vitesse ne reçoit plus d'accroissement. C'est

ainsi que Newton a démontré le rapport constant des sinus de réfraction et d'incidence. Dans la seconde manière, on ne considère que l'action éprouvée par le rayon lumineux, de la part des molécules qui en sont éloignées d'une quantité moindre que le rayon de la sphère d'activité sensible de ces molécules; la valeur de $\int dm. df. \varphi(f)$ étant insensible relativement aux autres molécules; parce que l'accélération qu'elles ont produite dans le mouvement du rayon, lorsqu'il s'en est approché, a été détruite par le retardement que ce mouvement a éprouvé lorsque le rayon s'en est éloigné. Cette seconde manière montre avec évidence que la vitesse est la même, de quelque manière que le rayon ait pénétré dans le milieu, et quelles que soient les actions des molécules qu'il a rencontrées; puisque l'intégrale $\int dm. df. \varphi(f)$ est nulle relativement à celles qui sont à une distance perceptible de la molécule lumineuse.

Il suit de là que la lumière, en rentrant dans le vide, après avoir éprouvé l'action d'un nombre quelconque de forces attractives et répulsives, y reprend sa vitesse primitive.

Les mêmes résultats ont lieu relativement aux rayons extraordinaires; car, sans connoître la cause de la réfraction extraordinaire, on peut cependant assurer qu'elle est due à des forces attractives et répulsives qui agissent de molécule à molécule, suivant des fonctions quelconques de la distance, et qui, dans les cristaux, sont modifiées par la figure de leurs molécules intégrantes, par celle des molécules de la lumière et par la manière

dont ces molécules se présentent les unes aux autres. En nommant donc R la résultante de toutes ces forces, et dr l'élément de sa direction, on aura

$$v^2 = a^2 + 2 \int dm.\ Rdr$$

Maintenant il est visible que, relativement à une molécule dm du cristal, l'intégrale $\int Rdr$ est nulle, lorsque le rayon lumineux est à une distance sensible de cette molécule; car dans le passage de ce rayon à travers la sphère d'activité sensible de la molécule, les élémens Rdr sont d'abord positifs, ensuite négatifs, et la somme des premiers est égale à celle des seconds et la détruit. En cela ces forces diffèrent de celles qui naissent du frottement et de la résistance des milieux, et qui, dans toutes les directions, retardent constamment la vitesse. L'intégrale $\int dm.\ Rdr$ ne dépend donc que de l'action que le rayon a éprouvée de la part des molécules dont il n'est éloigné que d'une quantité plus petite que le rayon de la sphère d'activité sensible. Ainsi lorsqu'un rayon extraordinaire est à une distance sensible de la surface d'un cristal, et dans son intérieur, sa vitesse est toujours la même, quelles que soient la nature de cette surface et la manière dont le rayon a pénétré dans le cristal, pourvu que sa direction soit la même. Donc si les forces qui produisent la réfraction extraordinaire sont les mêmes de tous les côtés de l'axe du cristal, la vitesse du rayon dans l'intérieur ne dépendra que de l'angle formé par sa direction avec l'axe. On voit encore que le rayon rentrant dans le vide, y reprendra sa vitesse primitive.

En général, toutes les forces attractives et répulsives de la nature se réduisent en dernière analyse, à des forces semblables agissantes de molécule à molécule. C'est ainsi que j'ai fait voir dans ma *Théorie de l'action capillaire*, que les attractions et répulsions des petits corps qui nagent sur un liquide, et généralement tous les phénomènes capillaires dépendent d'attractions de molécule à molécule, qui ne sont sensibles qu'à des distances imperceptibles. On a essayé pareillement de ramener à des actions de molécule à molécule, les phénomènes électriques et magnétiques : on peut y ramener encore ceux que présentent les corps élastiques. Pour déterminer l'équilibre et le mouvement d'une lame élastique naturellement rectiligne et pliée suivant une courbe quelconque, on a supposé que dans chaque point, son ressort est en raison inverse du rayon de courbure. Mais cette loi n'est que secondaire et dérive de l'action attractive et répulsive des molécules, suivant une fonction de la distance. Pour mettre cette dérivation en évidence, il faut concevoir chaque molécule d'un corps élastique dans son état naturel, en équilibre au milieu des forces attractives et répulsives qu'elle éprouve de la part des autres molécules; les forces répulsives étant dues, soit à la chaleur, soit à d'autres causes. Il faut supposer ensuite que les molécules tendent à reprendre leur position respective naturelle, lorsqu'on les en écarte infiniment peu. Ainsi deux molécules en équilibre entre leurs forces attractives et répulsives, et séparées l'une de l'autre par un intervalle quelconque, reviendront à cette distance mutuelle, soit

qu'on l'augmente, soit qu'on la diminue, si l'une de ces deux conditions est remplie, et alors leur équilibre sera stable. Imaginons présentement une lame très-mince, élastique, rectiligne et fixée par une de ses extrémités à un plan qui lui soit perpendiculaire. En pliant la lame, son élément contigu au plan s'écartera de sa position naturelle, d'un angle infiniment petit que nous désignerons par α. En désignant par f la distance d'une molécule de l'élément à une autre de ses molécules, cette distance variera d'une quantité proportionnelle à α, et il en résultera une action mutuelle de ces molécules, proportionnelle à cette variation, et que nous pouvons exprimer par $h\alpha$. La résultante de toutes ces forces tend à faire reprendre à l'élément, son état naturel; mais de quelque manière qu'elles se combinent, leur résultante ou le ressort de l'élément est nécessairement proportionnel à α, ou à l'angle de contingence, et par conséquent ce ressort est réciproque au rayon de courbure. Ce que nous venons de dire du premier élément de la lame, s'applique à un élément quelconque, en concevant cet élément fixé par une de ses extrémités, à un plan perpendiculaire à l'élément contigu.

Maintenant, si l'on fait varier infiniment peu la position de la courbe; l'angle de contingence α deviendra $\alpha + \delta\alpha$, $\delta\alpha$ étant la variation de cet angle, que nous supposerons infiniment petite par rapport à lui. La distance f de deux molécules de l'élément de la lame, correspondante à cet angle, variera d'une quantité proportionnelle à $\delta\alpha$, et que nous désignerons par $q\,\delta\alpha$. L'ac-

tion mutuelle des deux molécules ayant été exprimée par $h\alpha$, le produit de cette action par l'élément de sa direction sera donc $hq.\ \alpha\delta\alpha$. Cette somme, étendue à toutes les molécules de l'élément entier, sera de la forme $M.\ \alpha\delta\alpha$, M étant un coëfficient indépendant de α et de $\delta\alpha$, et qui sera le même pour tous les élémens de la lame, si elle est partout également épaisse et large, et si la longueur de ses élémens est supposée constante: nous représenterons cette longueur par ds que nous supposerons constant et invariable. La somme de toutes les forces multipliées respectivement par les variations des élémens de leurs directions, sera donc proportionnelle à $\int\alpha.\ \delta\alpha$, et s'il n'y a point de forces étrangères, la lame étant supposée fixe par ses deux extrémités, on aura par le principe des vitesses virtuelles, dans le cas de l'équilibre, $\int\alpha.\ \delta\alpha = 0$; d'où il suit que $\int\alpha^2$ est un *minimum* dans la courbe d'équilibre. α est égal à $\frac{ds}{r}$, r étant le rayon de courbure; $\int\frac{ds^2}{r^2}$ est donc un *minimum* dans cette courbe. ds étant supposé constant, on peut diviser l'intégrale précédente par ds, et la réduire ainsi à une intégrale finie; $\int\frac{ds}{r^2}$ est par conséquent un *minimum* dans la courbe d'équilibre de la lame élastique; ce qui est le principe de Daniel Bernoulli qui a donné à cette intégrale, le nom de *force potentielle*. (Voyez l'ouvrage d'Euler qui a pour titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*)

Enfin la considération des actions *ad distans*, de

molécule à molécule, étendue à la chaleur, conduit d'une manière claire et précise, aux véritables équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les corps solides, et de ses variations à leur surface, et par là cette branche très-importante de la physique rentre dans le domaine de l'analyse.

On est parti, dans la théorie de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, de ce principe donné par Newton, savoir que la chaleur communiquée par un corps à un autre qui lui est contigu, est proportionnelle à la différence de leurs températures. Ainsi une lame infiniment mince d'un corps, communique dans un temps donné très-court, à celle qui la suit, une quantité de chaleur proportionnelle à la conductibilité du corps pour la chaleur, et à l'excès de sa température sur celle de la lame suivante ; mais elle reçoit en même temps de la lame qui la précède, une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de la température de cette lame sur la sienne, et c'est la différence de ces chaleurs reçues et communiquées dans un instant infiniment petit, qui forme la différentielle de sa chaleur. Mais il se présente ici une difficulté que l'on n'a point encore résolue. Les quantités de chaleur reçues et communiquées dans un instant, ne peuvent être que des infiniment petits du même ordre que l'excès de température d'une lame sur celle de la lame qui la suit. La différence des chaleurs reçues et communiquées est donc un infiniment petit du second ordre, dont l'accumulation dans un temps fini, ne pour-

roit élever d'une quantité finie, la température de la lame. Cette difficulté est analogue à celle que présentoient les théories des réfractions astronomiques. On y supposoit l'atmosphère divisée en couches d'une épaisseur infiniment petite, dans lesquelles la lumière se réfracte en passant d'une couche dans la suivante, comme si ces couches avoient une épaisseur finie; ce qui donne à leur action, une valeur infiniment grande. Cette difficulté n'a point lieu dans la théorie des réfractions, que j'ai donnée dans le livre X de la *Mécanique céleste*, où j'ai déduit cette théorie, de l'action *ad distans* des molécules des milieux diaphanes sur la lumière. On fera pareillement disparoître la difficulté précédente, relative à la chaleur, en étendant son action au-delà du contact. L'expérience a fait connoître que cela a lieu dans l'air et dans les milieux rares, et que les corps chauds placés dans ces milieux, transmettent leur chaleur aux corps éloignés, par un rayonnement analogue à celui de la lumière par les corps lumineux. Il paroît naturel d'admettre ce rayonnement de la chaleur dans l'intérieur des corps denses : seulement la chaleur rayonnante intérieure est totalement interceptée par les molécules très-voisines de celle qui les échauffe, et dont l'action échauffante ne s'étend alors qu'à une très-petite distance. C'est à l'expérience à nous apprendre si cette distance est perceptible : nous la supposerons imperceptible, comme la sphère d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

Imaginons présentement une barre cylindrique très-mince, et recouverte d'un vernis qui ne permette point

à sa chaleur de se répandre latéralement au-dehors. Une lame infiniment mince A de la barre, et perpendiculaire à sa longueur, sera échauffée par celles qui la précèdent, et échauffera celles qui la suivent. En nommant donc x la coordonnée de la lame ou sa distance à la première extrémité de la barre, et u sa température; en nommant pareillement $x - s$ la coordonnée d'une lame qui la précède, et dont nous désignerons par u' la température; l'action réciproque des deux lames tendra à échauffer la lame A proportionnellement à la différence $u' - u$ de leurs températures; car cette différence multipliée par une constante K, peut représenter la différence de leurs rayonnemens caloriques, l'une sur l'autre. Si l'on nomme ensuite $u_{,}$ la température d'une lame dont la coordonnée est $x + s$, la différence $u - u_{,}$, multipliée par la constante K, exprimera la chaleur qu'elle reçoit de la lame A; $K.(u' - u) - K.(u - u_{,})$ ou $K.(u' - 2u + u_{,})$ exprimera donc la chaleur qui accroît la température de la lame A. Il faut multiplier cette quantité par ds et par la fonction qui exprime la loi de l'action échauffante relative à la distance, loi que nous désignerons par $\varphi.(s)$. La différence des chaleurs reçues et communiquées par la lame A sera donc

$$K. \int ds. (u' - 2u + u_{,}). \varphi. (s)$$

l'intégrale étant prise depuis s nul jusqu'au-delà de la sphère d'action sensible de la chaleur; et comme à cette limite, la chaleur décroît avec une extrême rapidité à mesure que s augmente, cette intégrale peut être prise

depuis s nul jusqu'à s infini. Maintenant on a, en réduisant en série u' et $u_{,}$, par rapport aux puissances de s,

$$u' - 2u + u_{,} = s^2 . \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \text{etc.}$$

On peut ne considérer que le premier terme de la série, et alors on a

$$K.\int ds.(u' - 2u + u_{,}).\varphi(s) = K.\left(\frac{ddu}{dx^2}\right).\int s^2 ds.\varphi(s)$$

Maintenant l'accroissement de température de la lame A, dans l'instant dt, est proportionnelle à cette quantité multipliée par l'élément dt du temps. En supposant donc que la caractéristique différentielle d ne se rapporte qu'au temps t, on aura

$$\mathrm{d}u = a dt.\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$$

a étant une constante dépendante de la nature du corps. Si l'on fait dans cette équation aux différences partielles, $at = t'$, elle deviendra

$$\mathrm{d}u = dt'.\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$$

et u sera fonction de x et de t'. Ainsi, en supposant deux barres de diverses matières, mais de dimensions égales, échauffées l'une et l'autre à l'origine et de la même manière, à leur première extrémité toujours entretenue à ce même degré de température, u sera, relativement aux deux barres, la même fonction de x et de t' ou at; les temps nécessaires pour que deux lames correspondantes dans chaque barre parviennent a la même température, seront donc réciproques aux cons-

tantes at relatives à ces barres. Si donc on nomme plus *conductible*, la barre qui arrive en moins de temps à une température donnée, on pourra représenter par a la conductibilité de la matière. Mais la barre qui arrive le plus promptement à la même température, peut n'être pas celle qui, dans le même temps, conduit à une distance donnée, le plus de chaleur; car la chaleur conduite dans un temps donné, dépend à la fois de la conductibilité de la matière, et de sa chaleur spécifique, c'est-à-dire de la chaleur nécessaire pour élever d'un même degré sa température.

Dans le cas général où l'on considère les trois dimensions d'un corps solide, la même analyse fait voir que $\left(\frac{du}{dt}\right)$ est égal à une constante multipliée par la somme des trois différences partielles secondes $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{ddu}{dz^2}\right)$, x, y, z étant les trois coordonnées de la molécule.

Cette équation n'est relative qu'au mouvement de la chaleur dans l'intérieur du corps: pour avoir celle de son mouvement à la surface, nous observerons que la perte de chaleur du corps est due à la chaleur qu'il rayonne au dehors. Ce rayonnement est produit, non seulement par la surface, mais encore par les couches qui en sont extrêmement voisines, et qui sont comprises dans la sphère d'action sensible de la chaleur. En vertu de ce rayonnement, la surface parvient en très-peu d'instans, à la température du vide ou du milieu qui l'environne, et il s'établit très-promptement une loi régulière

d'accroissement de la chaleur, depuis cette surface, jusqu'à une très-petite profondeur égale au rayon de la sphère d'action de la chaleur. En nommant u la température de la couche à cette profondeur, les variations de la chaleur des couches supérieures, jusqu'à la surface, seront proportionnelles à celles de u, la chaleur du milieu environnant étant prise pour le terme zéro. Ainsi les quantités de chaleur émises au dehors, dans l'instant dt, par chacune de ces couches, étant proportionnelles à sa température, elles seront proportionnelles à u, et par conséquent la perte de chaleur du corps lui sera aussi proportionnelle. C'est ce qui a été supposé jusqu'ici par les physiciens; mais ils imaginoient que la surface elle-même avoit une température plus élevée que celle du milieu qui l'environne; ce qui est contraire à la loi de continuité. La considération d'une action de la chaleur *ad distans*, a donc encore l'avantage de faire disparoître cette difficulté, et de donner des idées justes et précises du mouvement de la chaleur, à la surface comme à l'intérieur des corps.

La théorie de l'écoulement des liquides par une très-petite ouverture faite à la base du vase qui les contient, nous fournit un exemple de ces lois régulières de mouvement qui s'établissent dans un temps très-court. On sait que la vitesse du liquide qui s'écoule, devient très-promptement proportionnelle à la racine carrée de sa hauteur au-dessus de l'ouverture, et que l'on peut, sans erreur sensible, calculer par cette loi, la quantité de fluide écoulé, en négligeant celle qui s'écoule avant que la loi

soit établie; la même chose a lieu par rapport à l'écoulement de la chaleur, et l'équation de cet écoulement, fondée sur la proportionnalité de la chaleur écoulée dans l'instant dt, à la température u, peut être employée sans crainte d'erreur sensible. En réunissant cette équation à celle du mouvement de la chaleur à l'intérieur, on pourra déterminer pour un instant quelconque, la température de tous les points du corps. Le reste est une affaire d'analyse, et devient étranger à l'objet de cette note dans laquelle j'ai cherché à établir que les phénomènes de la nature se réduisent en dernière analyse, à des actions *ad distans* de molécule à molécule, et que la considération de ces actions doit servir de base à la théorie mathématique de ces phénomènes. Mais de même que les géomètres avoient été conduits aux équations du mouvement de la lumière dans l'atmosphère, en partant d'une supposition inexacte, de même l'hypothèse de l'action de la chaleur limitée au contact, peut conduire aux équations du mouvement de la chaleur dans l'intérieur et à la surface des corps. Je dois observer que M. Fourier est déjà parvenu à ces équations dont les véritables fondemens me paroissent être ceux que je viens de présenter.

La considération de l'action mutuelle de molécules de la matière, fournit encore une démonstration directe du principe des vitesses virtuelles; car en décomposant les actions réciproques des corps, en actions de molécule à molécule, on peut facilement s'assurer que ce principe n'est que l'expression analytique et générale

des conditions auxquelles ces actions doivent être assujéties dans l'état d'équilibre. Lorsqu'un point est en équilibre entre des forces quelconques, il est aisé de voir que si l'on fait varier infiniment peu la position du point, en sorte qu'il soit assujéti aux conditions de son mouvement, et qu'il reste toujours sur la surface ou sur la courbe qu'il doit suivre quand il n'est pas libre ; la somme des forces qui le sollicitent, multipliées chacune par l'espace qu'il parcourt suivant sa direction, est égale à zéro. (*Mécanique céleste*, livre I, nº 3.)

Considérons maintenant un système de points que nous nommerons a, liés entre eux d'une manière quelconque et assujétis à se mouvoir sur des courbes ou sur des surfaces données. On peut concevoir ces courbes, ces surfaces et généralement les liens inflexibles qui unissent ces points, comme étant formés eux-mêmes d'une infinité de points b liés fixement entre eux par des droites immatérielles et invariables ; mais les lignes flexibles et inextensibles qui unissent les points a peuvent être conçues comme formées de points b, unis par des droites immatérielles qui peuvent tourner librement autour de ces points. Cela posé, l'action des points a les uns sur les autres, quand elle n'est pas immédiate, se transmet au moyen des points b. Un point a agit sur le point b qui lui est contigu ; celui-ci agit sur le point b le plus voisin, et ainsi de suite jusqu'à un second point a qui agit de la même manière sur un troisième. Dans ces actions réciproques, la distance mutuelle de deux points b voisins reste constante ; en sorte qu'en nommant f la

distance infiniment petite qui les sépare, et p leur action mutuelle qui, par l'égalité de l'action à la réaction, est la même pour les deux points, le produit $p\delta f$ est nul, δf étant une variation de f compatible avec les conditions de la liaison des parties du système; car f étant constant suivant ces conditions, δf est nul. Dans la nature, δf n'est pas rigoureusement nul, et quelle que soit la force qui unit les points b consécutifs, une force quelconque peut toujours faire varier la distance qui les sépare; mais cette variation est d'autant moindre que la force de cohésion est plus grande; en sorte que la rigidité et l'inextensibilité sont des abstractions qui servent de limites à ces qualités des corps. Pour concevoir l'action immédiate d'un point a sur un autre point, on peut imaginer chacun de ces points, au centre d'une sphère immatérielle et impénétrable qui ne permette pas à ces points de s'approcher au-delà d'une limite égale à la somme des rayons des deux sphères. Dans le choc, les deux sphères se touchent, et la distance f qui sépare les points est à son *minimum*. La variation δf est donc nulle, et en nommant p leur action mutuelle, le produit $p\delta f$ sera nul. Ainsi la pression d'un point a sur une surface, peut être considérée comme le choc de ce point contre un point b de la surface. En concevant ces points au centre des deux sphères que nous venons d'imaginer, la distance f de ces points au moment du choc sera la somme des rayons des sphères, et elle sera perpendiculaire à la surface. Le choc ayant lieu dans la direction de cette distance, il se fera suivant la direction

de la normale. En nommant donc p l'action mutuelle des deux points ou la pression du point a sur la surface, le produit $p\delta f$ sera nul; parce qu'alors δf est la variation de la normale, variation qui est nulle lorsque le point a est assujéti à se mouvoir sur la surface.

Cela posé, considérons un des points quelconques a ou b du système. On peut toujours le concevoir comme un point isolé; mais alors il faut le supposer sollicité non seulement par des forces extérieures, mais encore par l'action des points du système, dont il est infiniment voisin. Soit donc S la force extérieure qui le sollicite, et s la direction de cette force; soit encore f la distance de ce point à un autre infiniment voisin, et p l'action mutuelle de ces deux points; on a par le principe des vitesses virtuelles, qui, comme on l'a vu, a lieu pour un point isolé,

$$0 = S.\ \delta s + \Sigma p.\ \delta' f$$

le signe caractéristique intégral Σ comprenant tous les termes du même genre que celui devant lequel il est placé, et $\delta' f$ étant la variation de f due à la variation de la première extrémité de cette distance, ou du point que l'on considère. On formera des équations semblables pour chaque point du système. En les réunissant, l'action p dans leur somme sera multipliée par $\delta' f + \delta'' f$, $\delta'' f$ étant la variation de f relative à sa seconde extrémité; en sorte que $\delta' f + \delta'' f = \delta f$. On a donc

$$0 = \Sigma.\ S\delta s + \Sigma\ p.\ \delta f \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Mais on a par ce qui précède $o = p\,\delta f$; par conséquent on a

$$o = \Sigma.\, S\delta s$$

ce qui est le principe connu des vitesses virtuelles.

J'ai donné dans le premier livre de la *Mécanique céleste*, n° 14, l'équation (1), et j'ai cherché dans le même n° à établir que $\Sigma.\, p\,\delta f$ est nul. Cela est évident lorsque les points du système sont liés par des droites inflexibles ou des fils inextensibles dont f est la longueur; car alors δf est nul. Cela est encore visible lorsqu'il y a des corps qui peuvent glisser le long de ces fils; dans tous ces cas p représente la tension du fil, qui est la même dans toute sa longueur; cette longueur restant toujours la même, $p\,\delta f$ est nul. Mais la manière dont nous venons d'envisager l'action mutuelle des corps, en la décomposant en actions de molécule à molécule, rend généralement évidente l'égalité de $p\,\delta f$ à zéro, et par conséquent aussi celle de $\Sigma.\, S\,\delta s$ à zéro.

Il est visible que la démonstration précédente a également lieu pour un système de corps, formé en tout ou en partie, de liquides. Elle suppose seulement que les liens immatériels que l'on imagine entre les divers points du système, ne sont ni élastiques ni extensibles avec résistance; autrement le principe des vitesses virtuelles, tel que nous venons de l'énoncer, cesseroit d'être exact, et il faudroit y faire entrer la considération de ces forces d'élasticité et de résistance.

SECOND MÉMOIRE

Sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes,

Par J. L. Lagrange.

Lu le 19 février 1810.

La variation des constantes arbitraires est une méthode nouvelle dont l'analyse s'est enrichie dans ces derniers temps, et dont on a déjà fait des applications importantes. Dans la mécanique, elle sert à étendre la solution d'un problème à des cas où de nouvelles forces, dont on n'avoit pas tenu compte, seroient supposées agir sur les mobiles. Ainsi, lorsqu'après avoir résolu le problème du mouvement d'une planète autour du Soleil, en vertu de la seule attraction de cet astre, on veut avoir égard aussi à l'attraction des autres planètes, on peut, en conservant la forme de la première solution, satisfaire à cette nouvelle condition par la variation des constantes arbitraires, qui sont les élémens de la théorie de la planète.

Les observations avoient depuis long-temps indiqué les variations de ces élémens; mais Euler est le premier

qui ait cherché à les déterminer par l'analyse. Ses formules étant de peu d'usage par leur complication, et n'ayant pas même toute l'étendue que la question peut comporter, M. Laplace et moi en donnâmes de plus générales et plus simples, que nous parvînmes ensuite à réduire au plus grand degré de simplicité.

Enfin je viens de donner dans un mémoire lu à cette Classe le 13 mars 1809, et imprimé dans le volume des *Mémoires de* 1808, une théorie complète de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique. J'étois parvenu d'abord, par une analyse assez compliquée, à un résultat simple et inespéré; j'ai ensuite trouvé moyen d'arriver directement et par un calcul très-court à ce même résultat, comme on le voit dans l'*Addition* et dans le *Supplément* au mémoire cité, imprimés dans le même volume. Mais l'application des formules générales aux problèmes particuliers demandoit encore un long calcul, à cause des éliminations qu'il falloit faire pour obtenir séparément l'expression de la variation de chacune des constantes devenues variables. Heureusement une considération très-simple que je vais exposer et qui m'avoit échappé, facilite et simplifie extrêmement cette application et ne laisse plus rien à desirer dans la théorie analytique de la variation des constantes, relativement aux questions de mécanique.

On peut regarder cette théorie comme toute concentrée dans la formule très-simple que j'ai donnée dans le *Supplément* cité, et qui consiste en ce que la différence partielle d'une certaine fonction dépendante des seules

forces ajoutées au système, prise relativement à une quelconque des constantes arbitraires, est toujours égale à une fonction des variables du problème et de leurs différences prises séparément par rapport au temps et par rapport aux constantes arbitraires, laquelle fonction jouit de cette propriété singulière et très-remarquable, qu'en y substituant les valeurs des variables exprimées par le temps et par les constantes arbitraires, elle doit devenir indépendante du temps, et ne plus contenir que les mêmes constantes, avec leurs différences premières.

Cette circonstance de l'évanouissement de la variable, qui représente le temps dans la fonction dont il s'agit, m'a fait penser que si les variables étoient exprimées par des séries de puissances ascendantes du temps, la fonction dont nous parlons ne contiendroit, après les substitutions, que les premiers termes tous constans de ces séries et les coefficiens des seconds, à cause des différences premières des variables qui se trouvent dans la fonction. Or ces quantités sont justement les constantes arbitraires que l'intégration introduit naturellement dans l'expression finie des variables, lorsqu'elles dépendent d'équations différentielles du second ordre, comme cela a lieu dans tous les problèmes de la mécanique. Il suit de là qu'en adoptant ces constantes arbitraires il suffira d'avoir égard aux deux premiers termes des expressions des variables réduites en séries.

Mais on voit par notre formule du *Supplément* que les différentielles des variables, relativement au temps, ne s'y trouvent que dans les différences partielles de la

fonction de ces variables que nous avons nommée T, et qui n'est autre chose que la moitié de la force vive du système. Si donc on suppose que les valeurs de ces différences partielles soient aussi réduites en séries de puissances du temps, leurs premiers termes ne dépendront que des premiers termes et des coefficiens des seconds termes des séries des premières variables. On pourra donc, pour plus de simplicité, adopter les premiers termes de ces nouvelles séries pour constantes arbitraires, à la place des coefficiens des seconds termes des premières séries. De cette manière il suffira dans les substitutions d'avoir égard aux seuls premiers termes de ces différentes séries; et la simple inspection de notre formule fait voir qu'alors la différentielle partielle de la fonction des forces, relativement à chacune des constantes arbitraires est égale à la différentielle d'une seule de ces constantes : de sorte qu'on a ainsi directement les différentielles de ces constantes devenues variables, exprimées de la manière la plus simple par les différences partielles de la même fonction.

Maintenant on sait que toutes les constantes arbitraires que les différentes intégrations peuvent introduire, sont toujours réductibles à ces constantes arbitraires primitives; car pour cela il n'y a qu'à supposer zéro le temps dans les différentes équations intégrales qu'on aura obtenues. On aura ainsi les nouvelles constantes arbitraires en fonctions de celles qu'on avoit adoptées, et l'on en déduira facilement, par les opérations connues, les valeurs de leurs différentielles exprimées en différences

partielles de la même fonction, mais rapportées à ces nouvelles constantes arbitraires. Tout cela ne dépend plus que d'un calcul connu, et nous donnerons les formules générales qui en résultent. Ce sera le complément de notre théorie de la variation des constantes.

M. Poisson a lu, le 16 octobre dernier, à cette Classe, un *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, lequel est imprimé dans le volume qui vient de paroître du *Journal de l'École polytechnique*. Ce mémoire contient une savante analyse qui est comme l'inverse de la mienne, et dont l'objet est d'éviter les éliminations que celle-ci exigeoit. L'auteur parvient en effet, par un calcul assez long et délicat, à des formules qui donnent directement les valeurs des différentielles des constantes arbitraires devenues variables. Ces formules ne coïncident pas immédiatement avec celles que je donne dans ce mémoire, parce qu'elles renferment les constantes arbitraires en fonctions des variables du problème et de leurs différentielles, au lieu que les nôtres ne renferment ces constantes qu'en fonctions d'autres constantes; mais il est facile de se convaincre *à priori* qu'elles conduisent aux mêmes résultats.

Voici maintenant notre analyse d'après les principes que nous venons d'exposer.

1. En conservant les noms donnés dans le premier mémoire, on a cette formule générale trouvée dans le *Supplément* (page 364) :

$$\frac{d\Omega}{da}\,dt = \frac{dr}{da}\,\delta.\frac{dT}{dr'} + \frac{ds}{da}\,\delta.\frac{dT}{ds'} + \frac{du}{da}\,\delta.\frac{dT}{du'}$$

$$- \frac{d.\frac{dT}{dr'}}{da}\,\delta r - \frac{d.\frac{dT}{ds'}}{da}\,\delta s - \frac{d.\frac{dT}{du'}}{da}\,\delta u$$

où la caractéristique δ indique des différences relatives uniquement aux constantes arbitraires contenues dans les expressions des variables r, s, u.

Le point capital de cette formule est que le second membre de l'équation doit devenir indépendant du temps après la substitution des valeurs de r, s, u, comme je l'ai démontré d'une manière fort simple dans l'article 34 de l'*Addition*. C'est pourquoi si on suppose, ce qui est toujours permis,

$$r = \alpha + \alpha' t + \alpha'' t^2 + \text{etc.}$$
$$s = \beta + \beta' t + \beta' t^2 + \text{etc.}$$
$$u = \gamma + \gamma' t + \gamma'' t^2 + \text{etc.}$$

et ensuite

$$\frac{dT}{dr'} = \lambda + \lambda' t + \lambda'' t + \text{etc.}$$
$$\frac{dT}{ds'} = \mu + \mu' t + \mu'' t + \text{etc.}$$
$$\frac{dT}{du'} = \nu + \nu' t + \nu'' t + \text{etc.}$$

tous les termes de ces séries, excepté les premiers, s'en iront après les substitutions : de sorte qu'il suffira de substituer dans la formule générale α, β, γ, λ, μ, ν à la place des quantités r, s, u, $\frac{dT}{dr'}$, $\frac{dT}{ds'}$, $\frac{dT}{du'}$; ce qui la réduira d'abord à la forme

$$\frac{d\Omega}{da}\,dt = \frac{d\alpha}{da}\,\delta\lambda + \frac{d\beta}{da}\,\delta\mu + \frac{d\gamma}{da}\,\delta\nu$$
$$- \frac{d\lambda}{da}\,\delta\alpha - \frac{d\mu}{da}\,\delta\beta - \frac{d\nu}{da}\,\delta\gamma$$

Et comme T est une fonction de r, s, u et de $r' = \frac{dr}{dt}$, $s' = \frac{ds}{dt}$, $u' = \frac{du}{dt}$, il est clair que les premiers termes λ, μ, ν seront donnés en fonctions de α, β, γ et de α', β', γ', et que ces fonctions seront semblables aux fonctions $\frac{dT}{dr'}$, $\frac{dT}{ds'}$, $\frac{dT}{du'}$ de r, s, u, r', s', u'.

2. Les équations différentielles entre les variables r, s, u et t étant du second ordre, les constantes arbitraires que l'intégration introduit naturellement dans les expressions de r, s, u sont leurs valeurs initiales α, β, γ, ainsi que les valeurs initiales α', β', γ' de $\frac{dr}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$. Donc si, à la place de ces trois dernières constantes, on prend les trois constantes λ, μ, ν, qui sont données en α, β, γ et α', β', γ', on pourra représenter les six constantes arbitraires du problème par les six quantités α, β, γ, λ, μ, ν.

Ainsi, en substituant successivement, dans la formule précédente, chacune de ces quantités à la place de a, qui représente une des constantes arbitraires, et changeant la caractéristique δ en d, puisque les variations des constantes arbitraires se rapportent maintenant au temps t, on aura tout de suite les six équations

$$\frac{d\Omega}{d\alpha}\,dt = d\lambda;\ \frac{d\Omega}{d\beta}\,dt = d\mu;\ \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt = d\nu;$$

$$\frac{d\Omega}{d\lambda}\,dt = -\,d\alpha;\ \frac{d\Omega}{d\mu}\,dt = -\,d\beta;\ \frac{d\Omega}{d\nu}\,dt = -\,d\gamma.$$

qui sont, comme l'on voit, sous la forme la plus simple qu'il soit possible.

3. Mais, quelles que soient les constantes arbitraires qu'on veuille employer dans les expressions des variables r, s, u, elles ne peuvent être que des fonctions des constantes α, β, γ, α', β', γ', qu'on trouvera facilement en faisant $t = 0$ dans les équations qui donnent les valeurs de r, s, u, et dans leurs différentielles, et changeant r, s, u, r', s', u' en α, β, γ, α', β', γ'.

Ainsi, comme les quantités λ, μ, ν sont données aussi en α, β, γ, α', β', γ', on aura les nouvelles constantes que nous désignerons maintenant par a, b, c, f, g, h en fonctions des constantes α, β, γ, λ, μ, ν.

Donc, en différenciant les valeurs de a, b, c, etc., et substituant les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ qu'on vient de trouver, on aura, en divisant par dt,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{da}{d\alpha}\times\frac{d\Omega}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta}\times\frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma}\times\frac{d\Omega}{d\nu}$$
$$+\frac{da}{d\lambda}\times\frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu}\times\frac{d\Omega}{d\beta} + \frac{da}{d\nu}\times\frac{d\Omega}{d\gamma}$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{db}{d\alpha}\times\frac{d\Omega}{d\lambda} - \frac{db}{d\beta}\times\frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{db}{d\gamma}\times\frac{d\Omega}{d\nu}$$
$$+\frac{db}{d\lambda}\times\frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{db}{d\mu}\times\frac{d\Omega}{d\beta} + \frac{db}{d\nu}\times\frac{d\Omega}{d\gamma}$$

etc.

Or, en regardant Ω comme fonction de a, b, c, f, g, h, et ces quantités comme fonctions de α, β, γ, λ, μ, ν, on a par les formules connues

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = \frac{da}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{da} + \frac{db}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{db} + \frac{dc}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{dc} + \frac{df}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{df} + \frac{dg}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{dg} + \frac{dh}{d\alpha} \times \frac{d\Omega}{dh}$$

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \frac{da}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{da} + \frac{db}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{db} + \frac{dc}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{dc} + \frac{df}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{df} + \frac{dg}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{dg} + \frac{dh}{d\beta} \times \frac{d\Omega}{dh}$$

etc.

4. Faisant toutes ces substitutions dans les expressions précédentes de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, etc., et ordonnant les termes suivant les différences partielles de Ω, on voit d'abord que le coefficient de $\frac{d\Omega}{da}$ est nul dans la valeur de $\frac{da}{dt}$ que celui de $\frac{d\Omega}{db}$ est nul dans la valeur de $\frac{db}{dt}$, et ainsi des autres; qu'ensuite, en employant des symboles $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, etc. analogues à ceux du premier mémoire, tels que l'on ait

$$[a, b] = -\frac{da}{d\alpha} \times \frac{db}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta} \times \frac{db}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma} \times \frac{db}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda} \times \frac{db}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu} \times \frac{db}{d\beta} + \frac{da}{d\nu} \times \frac{db}{d\gamma}$$

$$[a, c] = -\frac{da}{d\alpha} \times \frac{dc}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta} \times \frac{dc}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma} \times \frac{dc}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda} \times \frac{dc}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu} \times \frac{dc}{d\beta} + \frac{db}{d\nu} \times \frac{dc}{d\gamma}$$

$$[b, c] = -\frac{db}{d\alpha} \times \frac{dc}{d\lambda} - \frac{db}{d\beta} \times \frac{dc}{d\mu} - \frac{db}{d\gamma} \times \frac{dc}{d\nu} + \frac{db}{d\lambda} \times \frac{dc}{d\alpha} + \frac{db}{d\mu} \times \frac{dc}{d\beta} + \frac{db}{d\nu} \times \frac{dc}{d\gamma}$$

etc.

on aura ces formules :

$$\frac{da}{dt} = [a, b]. \frac{d\Omega}{db} + [a, c]. \frac{d\Omega}{dc} + [a, f]. \frac{d\Omega}{df} + [a, g]. \frac{d\Omega}{dg} + [a, h]. \frac{d\Omega}{dh}$$

$$\frac{db}{dt} = -[a, b]. \frac{d\Omega}{da} + [b, c]. \frac{d\Omega}{dc} + [b, f]. \frac{d\Omega}{df} + [b, g]. \frac{d\Omega}{dg} + [b, h]. \frac{d\Omega}{dh}$$

$$\frac{dc}{dt} = -[a, c]. \frac{d\Omega}{da} - [b, c]. \frac{d\Omega}{db} + [c, f]. \frac{d\Omega}{df} + [c, g]. \frac{d\Omega}{dg} + [c, h]. \frac{d\Omega}{dh}$$

etc.

dans lesquelles la loi de la continuation est évidente, en remarquant que les symboles changent de signe quand on change l'ordre des deux lettres renfermées entre les crochets, mais sans changer de valeur. Ainsi $[b, a] = - [a, b]$, $[c, b] = - [b, c]$, etc.

Ces formules donnent, comme l'on voit, la solution la plus directe et la plus simple du problème de la variation des constantes arbitraires; et elles s'étendent à autant de constantes qu'on voudra.

MÉMOIRE

Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités.

Par M. Laplace.

Lu le 9 avril 1810.

L'analyse conduit souvent à des formules dont le calcul numérique, lorsqu'on y substitue de très-grands nombres, devient impraticable, à cause de la multiplicité des termes et des facteurs dont elles sont composées. Cet inconvénient a lieu principalement dans la théorie des probabilités, où l'on considère les événemens répétés un grand nombre de fois. Il est donc utile alors de pouvoir transformer ces formules en séries d'autant plus convergentes, que les nombres substitués sont plus considérables. La première transformation de ce genre est due à Stirling qui réduisit de la manière la plus heureuse, dans une série semblable, le terme moyen du binome élevé à une haute puissance; et le théorême auquel il parvint, peut être mis au rang des plus belles choses que l'on ait trouvées dans l'analyse. Ce qui frappa surtout les géomètres, et spécialement Moivre qui s'étoit occupé long-temps de cet objet, fut l'introduction de la

racine carrée de la circonférence dont le rayon est l'unité, dans une recherche qui sembloit étrangère à cette transcendante. Stirling y étoit arrivé au moyen de l'expression de la circonférence par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des produits en nombre infini, expression que Wallis avoit donnée. Ce moyen indirect laissoit à désirer une méthode directe et générale pour obtenir non-seulement l'approximation du terme moyen du binome, mais encore celle de beaucoup d'autres formules plus compliquées, et qui s'offrent à chaque pas dans l'analyse des hasards. C'est ce que je me suis proposé dans divers mémoires publiés dans les volumes de l'Académie des sciences pour les années 1778 et 1782. La méthode que j'ai présentée dans ces mémoires, transforme généralement en séries convergentes, les intégrales des équations linéaires aux différences ordinaires ou partielles, finies et infiniment petites; lorsqu'on substitue de grands nombres dans ces intégrales. Elle s'étend encore à beaucoup d'autres formules semblables, telles que les différences très-élevées des fonctions. Ces séries ont le plus souvent pour facteur, la racine carrée de la circonférence, et c'est la raison pour laquelle cette transcendante s'est offerte à Stirling; mais quelquefois, elles renferment des transcendantes supérieures dont le nombre est infini.

Parmi les formules que j'ai transformées de cette manière, l'une des plus remarquables est celle de la différence finie de la puissance d'une variable. Mais on a fréquemment besoin, dans les questions de probabilités,

de ne considérer qu'une partie de ses termes, et de l'arrêter quand la variable, par ses diminutions successives, devient négative. Ce cas a lieu, par exemple, dans le problème où l'on cherche la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbes d'un nombre quelconque de comètes, est comprise dans des limites données, toutes les inclinaisons étant également possibles; problème dont la solution sert à reconnoître si ces orbes participent à la tendance primitive des orbes des planètes et des satellites, pour se rapprocher du plan de l'équateur solaire. En résolvant ce problême, par la méthode que j'ai donnée pour ce genre de questions, dans le volume de l'Académie des sciences de l'année 1778; la probabilité dont il s'agit, est exprimée par la différence finie de la puissance d'une variable qui décroît uniformément, les degrés de la puissance et de la différence étant le nombre même des orbes que l'on considère, et la formule devant être arrêtée, quand la variable devient négative. Le calcul numérique de cette formule est impraticable pour les comètes déjà observées; car il faut considérer près de cinquante termes très-composés, et qui étant alternativement positifs et négatifs, se détruisent presque entièrement; de sorte que, pour avoir le résultat final de leur ensemble, il faudroit les calculer séparément avec une précision supérieure à celle que l'on peut obtenir au moyen des tables les plus étendues, de logarithmes. Cette difficulté m'a long-temps arrêté : je suis enfin parvenu à la vaincre, en considérant le problême sous un point de vue nouveau, qui m'a conduit à exprimer la probabilité

cherchée, par une série convergente, dans le cas général où les facilités des inclinaisons suivent une loi quelconque. Ce problême est identique avec celui dans lequel on cherche la probabilité que la moyenne des erreurs d'un grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données ; et il résulte de ma solution, qu'en multipliant indéfiniment les observations, leur résultat moyen converge vers un terme fixe ; de manière qu'en prenant de part et d'autre de ce terme, un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat moyen tombera dans cet intervalle, finira par ne différer de la certitude, que d'une quantité moindre que toute grandeur assignable. Ce terme moyen se confond avec la vérité, si les erreurs positives et négatives sont également possibles ; et généralement ce terme est l'abcisse de la courbe de facilité des erreurs, correspondante à l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de cette courbe, l'origine des abcisses étant celle des erreurs.

En comparant les deux solutions du problême, obtenues par les méthodes dont je viens de parler ; on a par des séries convergentes, la valeur de la différence finie des puissances élevées d'une variable, et celles de beaucoup d'autres fonctions pareilles, en les arrêtant au point où la variable devient négative ; mais ce moyen étant indirect, j'ai cherché une méthode directe pour obtenir ces approximations, et j'y suis parvenu à l'aide d'équations aux différences partielles finies et infiniment petites, dont ces fonctions dépendent ; ce qui conduit à divers théorêmes curieux. Ces approximations se

déduisent encore très-simplement, du passage réciproque des résultats imaginaires aux résultats réels, dont j'ai donné divers exemples dans les mémoires cités de l'Académie des sciences, et tout récemment dans le tome VIII du *Journal de l'École polytechnique*. Il est analogue à celui des nombres entiers positifs, aux nombres négatifs et aux nombres fractionnaires, passage dont les géomètres ont su tirer par induction beaucoup d'importans théorêmes : employé comme lui avec réserve, il devient un moyen fécond de découvertes, et il montre de plus en plus la généralité de l'analyse. J'ose espérer que ces recherches qui servent de supplément à celles que j'ai données autrefois sur le même objet, pourront intéresser les géomètres.

Pour appliquer ces recherches aux orbes des comètes, j'ai considéré toutes celles que l'on a observées jusqu'en 1807 inclusivement. Leur nombre s'élève à 97, et parmi elles, cinquante-deux ont un mouvement direct, et quarante-cinq, un mouvement rétrograde : l'inclinaison moyenne de leurs orbes à l'écliptique diffère très-peu de la moyenne de toutes les inclinaisons possibles, ou d'un demi angle droit. On trouve par les formules de ce mémoire, qu'en supposant les inclinaisons, ainsi que les mouvemens directs et rétrogrades, également faciles; la probabilité que les résultats observés devroient se rapprocher davantage de leur état moyen, est beaucoup trop foible, pour indiquer dans ces astres une tendance primitive à se mouvoir tous sur un même plan et dans le même sens. Mais si l'on applique les mêmes formules,

aux mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites; on voit que cette double tendance est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

I.

On suppose toutes les inclinaisons à l'écliptique également possibles depuis zéro jusqu'à l'angle droit, et l'on demande la probabilité que l'inclinaison moyenne de n orbites sera comprise dans des limites données.

Désignons l'angle droit par h, et représentons par k, la loi de facilité des inclinaisons d'une orbite. Ici k sera constant, depuis l'inclinaison nulle jusqu'à l'inclinaison h. Au-delà de cette limite, la facilité est nulle; on pourra donc généralement représenter la facilité par $k(1 - l^h)$, pourvu qu'on ne fasse commencer son second terme qu'à l'inclinaison h, et que l'on suppose l égal à l'unité dans le résultat du calcul.

Cela posé, nommons t, t_1, t_2, etc. les inclinaisons des n orbites, et supposons leur somme égale à s; nous aurons

$$t + t_1 + t_2 \cdots\cdots + t_{n-1} = s$$

La probabilité de cette combinaison est évidemment le produit des probabilités des inclinaisons t, t_1, t_2, etc., et par conséquent elle est égale à $k^n.(1 - l^h)^n$. En prenant la somme de toutes les probabilités relatives à chacune des combinaisons dans lesquelles l'équation pré-

cédente a lieu, on aura la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera égale à s. Pour avoir cette somme de probabilités, on observera que l'équation précédente donne

$$t = s - t_1 - t_2 \ldots\ldots - t_{n-1}$$

Si l'on suppose d'abord $t_2, t_3 \ldots\ldots t_{n-1}$, constans; les variations de t ne dépendront que de celles de t_1, et pourront s'étendre depuis t nul, auquel cas t_1 est égal à $s - t_2 \ldots\ldots - t_{n-1}$ jusqu'à $t = s - t_2 \ldots\ldots - t_{n-1}$; ce qui rend t_1 nul. La somme de toutes les probabilités relatives à ces variations est évidemment

$$k^n. (1 - l^{i})^n. (s - t_2 - t_3 \ldots\ldots - t_{n-1})$$

Il faut ensuite multiplier cette fonction par dt_2, et l'intégrer depuis t_2 nul jusqu'à $t_2 = s - t_3 \ldots\ldots - t_{n-1}$; ce qui donne

$$\frac{k^n. (1 - l^{i})^n}{1.2}. (s - t_3 \ldots\ldots - t_{n-1})^2$$

En continuant ainsi jusqu'à la dernière variable, on aura la fonction

$$\frac{k^n. (1 - l^{i})^n. s^{n-1}}{1.2.3 \ldots \overline{n-1}}$$

Il faut enfin multiplier cette fonction par ds, et l'intégrer dans les limites données, que nous représenterons par $s - e$ et $s + e'$; et l'on aura

$$\frac{k^n. (1 - l^{i})^n}{1.2.3 \ldots n}. [(s + e')^n - (s - e)^n]$$

pour la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans ces limites. Mais on doit faire ici une observation importante. Un terme quelconque, tel que $Q. l^{rh}. (s - e)^n$ ne peut avoir lieu qu'autant qu'un nombre r des variables $t, t_1 \ldots\ldots t_{n-1}$ commence à surpasser h; car ce n'est qu'ainsi que le facteur l^{rh} peut être introduit. Il faut alors augmenter chacune d'elles, de la quantité h dans l'équation

$$t + t_1 + t_2 \cdots\cdots + t_{n-1} = s$$

ce qui revient à faire partir ces variables de zéro, en diminuant s de rh. Le terme $Q. l^{rh}. (s - e)^n$ devient ainsi $Q. l^{rh}. (s - rh - e)^n$. De plus, comme les variables t, t_1, etc. sont nécessairement positives, ce terme doit être rejeté lorsque $s - rh - e$ commence à devenir négatif. Par ce moyen la fonction précédente devient, en y faisant $l = 1$,

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (s + e')^n - n.(s + e' - h)^n \\ + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(s + e' - 2h)^n \\ - \text{etc.} \\ - (s - e)^n + n.(s - e - h)^n \\ - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(s - e - 2h)^n \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

en rejetant les termes dans lesquels la quantité sous le signe de la puissance, est négative. Cet artifice étendu

à des lois quelconques de facilités, donne une méthode générale pour déterminer la probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque d'observations sera comprise dans des limites données. (Voyez les *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1778, page 240 et suivantes.)

Pour déterminer k nous ferons $n = 1$, $s + e' = h$, et $s - e$ nul. La formule précédente devient alors $k.h$; mais cette quantité doit être égale à l'unité, puisqu'il est certain que l'inclinaison doit tomber entre zéro et h. On a donc $k = \frac{1}{h}$; ce qui change la formule précédente dans celle-ci :

$$\frac{1}{1.2.3.\ldots.n.\,h^n}.\left\{\begin{array}{l} \quad(s + e')^n - n.\,(s + e' - h)^n \\ + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\,(s + e' - 2h)^n \\ - \text{etc.} \\ - (s - e)^n + n.\,(s - e - h)^n \\ - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\,(s - e - 2h)^n \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (a)$$

Si l'on fait $s + e' = nh$ et $s - e = 0$, la probabilité que la somme des inclinaisons sera comprise entre zéro et nh, étant la certitude ou l'unité, la formule précédente donne

$$n^n - n.\,(n-1)^n + \frac{n.\,n-1}{1.2}.\,(n-2)^n - \text{etc.} = 1.2.3\ldots.n$$

ce que l'on sait d'ailleurs.

II.

Appliquons cette formule aux inclinaisons des orbites des planètes. La somme des inclinaisons des autres orbites à celle de la terre, étoit en degrés décimaux, de $91°,4187$ au commencement de 1801. Si l'on fait varier les inclinaisons depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence, on fait disparoître la considération des mouvemens rétrogrades ; car le mouvement direct se change en rétrograde, quand l'inclinaison surpasse un angle droit. Ainsi la formule précédente donnera la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des dix autres planètes à l'écliptique, ne surpassera pas $91°,4187$, en y faisant $n = 10°$, $h = 200°$, $s + e' = 91°,4187$, $s - e = 0$. On trouve alors cette probabilité égale à $\frac{1,0972}{(10)^{10}}$; par conséquent la probabilité que la somme des inclinaisons doit surpasser celle qui a été observée, est égale à $1 - \frac{1,0972}{(10)^{10}}$. Cette probabilité approche tellement de la certitude, que le résultat observé devient invraisemblable dans la supposition où toutes les inclinaisons sont également possibles. Ce résultat indique donc avec une très-grande probabilité, l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les orbites des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique ou plus naturellement, du plan de l'équateur solaire. Il en est de même du sens du mouvement des onze planètes, qui est celui de la rotation du soleil. La probabilité que cela

n'a pas dû avoir lieu, est $1 - \frac{1}{2^{10}}$. Mais si l'on considère que les dix-huit satellites observés jusqu'ici font leurs révolutions dans le même sens que leurs planètes respectives, et que les rotations observées au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens; on aura $1 - \frac{1}{2^{42}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu dans l'hypothèse d'une égale possibilité des mouvemens directs et rétrogrades. Ainsi l'existence d'une cause commune qui a dirigé ces mouvemens dans le sens de la rotation du soleil, est indiquée par les observations, avec une probabilité extrême.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur les mouvemens des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'en 1807 inclusivement, en comptant pour la même, les diverses apparitions de celle de 1759, est de quatre-vingt-dix-sept dont cinquante-deux ont un mouvement direct, et quarante-cinq un mouvement rétrograde. La somme des inclinaisons des orbites des premières est de 2622°,944, et celle des inclinaisons des orbites des autres est de 2409°,089. L'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est de 51°,87663. Si dans la formule (a) de l'article précédent, on suppose $c' = c$ et $s = \frac{1}{2} nh$, elle devient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.\,2^n}\left\{\begin{array}{l} \left(n+\frac{2e}{h}\right)^n - n.\left(n+\frac{2e}{h}-2\right)^n \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left(n+\frac{2e}{h}-4\right)^n \\ -\text{ etc.} \\ -\left(n-\frac{2e}{h}\right)^n + n.\left(n-\frac{2e}{h}-2\right)^n - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Dans le cas présent $n = 97$, $h = 100^\circ$, $e = 182^\circ,033$, et alors elle donne la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $50^\circ \pm 1^\circ,87664$; mais le nombre considérable des termes de cette formule, et la précision avec laquelle il faut avoir chacun d'eux, en rend le calcul impraticable. Il est donc indispensable de chercher une méthode d'approximation pour ce genre d'expressions analytiques, ou de résoudre le problème d'une autre manière. C'est ce que j'ai fait par la méthode suivante.

III.

Je conçois l'intervalle h divisé dans un nombre infini $2\,i$ de parties égales que je prends pour l'unité, et je considère la fonction

$$c^{-i\varpi\sqrt{-1}} + c^{-(i-1)\varpi\sqrt{-1}} \ldots\ldots + c^{-\varpi\sqrt{-1}} + 1 + c^{\varpi\sqrt{-1}} \ldots\ldots + c^{(i-1).\varpi\sqrt{-1}} + c^{i\varpi\sqrt{-1}}$$

En l'élevant à la puissance n, le coefficient de $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$ du développement de cette puissance, exprimera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme

des inclinaisons des orbites, est égale à l. Cette puissance peut être mise sous la forme

$$(1 + 2\cos.\varpi + 2\cos.2\varpi \ldots\ldots + 2\cos.i\varpi)^n$$

En la multipliant par $d\varpi.\, c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, le terme multiplié par $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement de la puissance, deviendra indépendant de ϖ dans le produit; d'où il est facile de conclure que l'on aura le coefficient de ce terme, en prenant l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi.\cos.l\varpi.(1 + 2\cos.\varpi \ldots\ldots + 2\cos.i\varpi)^n \qquad (a')$$

depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$, π étant la demi-circonférence, ou 200°; car les termes de l'intégrale dépendans de ϖ ne redeviennent tous nuls à la fois, et pour la première fois, que dans ces limites.

Maintenant on a

$$1 + 2\cos.\varpi \ldots\ldots + 2\cos.i\varpi = \frac{\cos.i\varpi - \cos.\overline{i+1}\,\varpi}{1 - \cos.\varpi}$$

$$= \cos.i\varpi + \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\varpi.\sin.i\varpi}{\sin.\tfrac{1}{2}\varpi}$$

Soit $i\varpi = t$, on aura

$$\cos.i\varpi + \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\varpi.\sin.i\varpi}{\sin.\tfrac{1}{2}\varpi} = \cos.t + \frac{\dfrac{\cos.t.\sin.t}{2i}}{\dfrac{\sin.t}{2i}}$$

Le second membre de cette équation devient, à cause de i infini,

$$2\,i.\frac{\sin.t}{t}$$

De plus, si l'on fait

$$l = i\,r\sqrt{n}$$

on aura

$$\cos.\ l\varpi = \cos.\ (rt\sqrt{n})$$

La fonction (a′) devient donc

$$\frac{(2i)^n}{i\pi}.\int dt.\ \cos.\ (rt\sqrt{n}).\left(\frac{\sin.\ t}{t}\right)^n \qquad (a'')$$

On a, en réduisant *sin. t* en série,

$$\log.\left(\frac{\sin.\ t}{t}\right)^n = n.\log.\left(1 - \frac{1}{1.2.3}.\ t^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}.\ t^4 - \text{etc.}\right)$$

$$= -\frac{nt^2}{6} - \frac{n}{180}.\ t^4 - \text{etc.}$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin.\ t}{t}\right)^n = c^{-\frac{nt^2}{6} - \frac{n}{180}.\ t^4 - \text{etc.}}$$

$$= c^{-\frac{nt^2}{6}}.\left(1 - \frac{n}{180}.\ t^4 - \text{etc.}\right)$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. La fonction (a″) prend alors cette forme:

$$\frac{(2i)^n}{i\pi}.\int dt.\cos.\ rt\sqrt{n}.\ c^{-\frac{nt^2}{6}}.\left(1 - \frac{n}{180}.\ t^4 - \text{etc.}\right) \qquad (a''')$$

Considérons les différens termes de cette fonction. On a d'abord, en réduisant en série *cos.* $rt\sqrt{n}$, et faisant

$$t' = t\sqrt{\frac{n}{6}}$$

$$\int dt.\ \cos.\ rt\sqrt{n}.\ c^{-\frac{nt^2}{6}}$$
$$=\sqrt{\tfrac{6}{n}}.\int dt'.c^{-t'^2}.\left(1-\frac{r^2}{1.2}.6.t'^2+\frac{r^4}{1.2.3.4}.6^2.t'^4-\text{etc.}\right)$$

L'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini, parce que i étant infini, t ou $i\varpi$ devient infini à la limite $\varpi=\pi$; l'intégrale relative à t' doit donc être prise depuis t' nul jusqu'à t' infini. Dans ce cas on a, comme je l'ai fait voir dans les Mémoires cités de l'Académie des sciences pour l'année 1778,

$$\int dt'.\ c^{-t'^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

On a ensuite, en intégrant par parties,

$$\int t'^2.\ dt'.\ c^{-t'^2}=-\tfrac{1}{2}t'.\ c^{-t'^2}+\tfrac{1}{2}\int dt'.\ c^{-t'^2}$$

En prenant l'intégrale depuis t' nul jusqu'à t' infini, ce second membre se réduit à $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Généralement on a, dans les mêmes limites,

$$\int t'^{2m}.\ dt'.\ c^{-t'^2}=\frac{1.3.5\ \ldots\ \overline{2m-1}}{2^m}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

On aura donc

$$\int dt.\ \cos.\ rt\sqrt{\pi}.\ c^{-\frac{nt^2}{6}}$$
$$=\sqrt{\frac{6}{n}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.\left(1-\tfrac{3}{2}.r^2+\frac{(\frac{3}{2})^2.\ r^4}{1.2}-\text{etc.}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{6}{n}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.\ c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

Le premier terme de la fonction (a‴) devient ainsi

$$\frac{(2\,i)^n}{2\,i\,\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} \cdot c^{-\frac{3}{2} \cdot r^2}$$

Considérons présentement le terme

$$\int n t^4 .\ dt\ c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ \cos.\ r t \sqrt{n}$$

En intégrant par parties, ce terme devient

$$-3 t^3 . c^{-\frac{t^2 n}{6}} . \cos. rt\sqrt{n} + 3 \int c^{-\frac{t^2 n}{6}} . d. (t^3 . \cos. rt\sqrt{n})$$

Mais on a

$$3 \int c^{-\frac{t^2 n}{6}} . d. (t^3 .\ \cos.\ r t \sqrt{n})$$

$$= 9 \int t^2 .\ c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ \cos.\ rt \sqrt{n}$$

$$+ 3\ r .\ \frac{d}{dr} . \int t^2 .\ dt .\ c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ \cos.\ rt \sqrt{n}$$

on a ensuite

$$\int t^2 .\ dt .\ c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ \cos.\ rt \sqrt{n}$$

$$= -\frac{3\,t}{n} .\ c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ \cos.\ rt \sqrt{n}$$

$$+ \frac{3}{n} . \int c^{-\frac{t^2 n}{6}} .\ d.\ (t .\ \cos.\ rt \sqrt{n})$$

et

$$\int c^{-\frac{t^2 n}{6}} . d. (t. \cos. rt\sqrt{n})$$

$$= \int dt. \cos. rt\sqrt{n}. c^{-\frac{t^2 n}{6}} + r. \frac{d}{dr}. \int dt. c^{-\frac{t^2 n}{6}} \cos. rt\sqrt{n}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{n}}. \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}. \left(c^{-\frac{3}{2}r^2} + r. \frac{d}{dr}. c^{-\frac{3}{2}r^2}\right)$$

En réunissant ces valeurs, et prenant l'intégrale depuis t nul jusqu'à t infini, on aura

$$\int n t^4 dt. c^{-\frac{t^2 n}{6}} \cos. rt\sqrt{n} = \frac{3^3}{n}. \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}. c^{-\frac{3}{2}r^2}. (1 - 6r^2 + 3r^4)$$

On peut obtenir facilement de cette autre manière, l'intégrale

$$\int dt. \cos. rt\sqrt{n}. t^{2f}. c^{-\frac{t^2 n}{6}}$$

pour cela on substituera, au lieu de $\cos. rt. \sqrt{n}$, sa valeur $\frac{c^{rt\sqrt{-n}} + c^{-rt\sqrt{-n}}}{2}$. Considérons d'abord l'intégrale

$$\tfrac{1}{2} \int dt. c^{rt\sqrt{-n}}. t^{2f}. c^{-\frac{nt^2}{6}}$$

nous la mettrons sous cette forme

$$\tfrac{1}{2} c^{-\frac{3}{2}r^2}. \int dt. c^{-\frac{1}{6}.(t\sqrt{n} - 3r\sqrt{-1})^2}. t^{2f}$$

Faisons

$$\frac{t\sqrt{n} - 3r\sqrt{-1}}{\sqrt{6}} = t'$$

cette intégrale deviendra

$$\tfrac{1}{2} c^{-\frac{3}{2}r^2}. \sqrt{\frac{6}{n}}. \int dt'. c^{-t'^2}. \frac{(t'\sqrt{6} + 3r\sqrt{-1})^{2f}}{n^f}$$

Mais elle doit être prise depuis $t' = -\frac{3r\sqrt{-1}}{6}$ jusqu'à l'infini. La partie $\frac{1}{2}c^{-rt\sqrt{-n}}$ de $cos.\ rt\sqrt{n}$, donnera pareillement l'intégrale

$$\tfrac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}r^2}.\sqrt{\frac{6}{n}}.\int dt'.\ c^{-t'^2}.\frac{(t'\sqrt{6}-3r\sqrt{-1})^{2f}}{n^f}$$

l'intégrale étant prise depuis $t' = 3r\sqrt{-1}$ jusqu'à l'infini. De là il est aisé de conclure que l'intégrale $\int dt.\ t^{2f}\ cos.\ rt\sqrt{n}.\ c^{-\frac{nt^2}{6}}$, est égale à

$$\tfrac{1}{2}c^{-\frac{3}{2}r^2}.\sqrt{\frac{6}{n}}.\int dt'.\ c^{-t'^2}.\frac{(t'\sqrt{6}-3r\sqrt{-1})^{2f}}{n^f}$$

l'intégrale étant prise depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = +\infty$, ou, ce qui revient au même, à la partie réelle de l'intégrale

$$c^{-\frac{3}{2}r^2}.\sqrt{\frac{6}{n}}.\int dt'.\ c^{-t'^2}.\frac{(t'\sqrt{6}+3r\sqrt{-1})^{2f}}{n^f}$$

l'intégrale étant prise depuis t' nul jusqu'à t' infini. En faisant $2f = 4$, on a

$$\int dt.\ t^4 cos.\ rt\sqrt{n}.c^{-\frac{nt^2}{6}} = \frac{c^{-\frac{3}{2}r^2}}{n^2\sqrt{n}}.3^3.(1-6r^2+3r^4).\sqrt{\tfrac{3}{2}\pi}$$

ce qui coïncide avec le résultat précédent. La fonction (a''') sera ainsi réduite dans la série descendante suivant les puissances de n,

$$\frac{(2i)^n}{2i\sqrt{\pi}}.\sqrt{\frac{6}{n}}.\ c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left(1-\frac{3}{20.n}.(1-6r^2+r^4)-\text{etc.}\right)$$

On aura la somme de toutes les fonctions comprises entre $-l$ et $+l$, en observant que 1 est la différentielle de l; or cette différentielle est $idr\sqrt{n}$; on peut donc substituer $dr\sqrt{n}$ au lieu de $\frac{1}{i}$. La somme de toutes les fonctions dont il s'agit, est ainsi en doublant l'intégrale,

$$(2i)^n \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \int dr.\, c^{-\frac{3}{2}r^2} \cdot \left(1 - \frac{3}{20.n} \cdot (1 - 6r^2 + 3r^4) + \text{etc.}\right)$$

Pour avoir la probabilité que la somme des inclinaisons sera comprise entre $-l$ et $+l$, il faut diviser la fonction précédente par le nombre de toutes les combinaisons possibles, et ce nombre est $(2i)^n$. On a donc pour cette probabilité

$$\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \int dr.\, c^{-\frac{3}{2}r^2} \cdot \left(1 - \frac{3}{20.n} \cdot (1 - 6r^2 + 3r^4) + \text{etc.}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \left(\int dr.\, c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3r}{20.\,n} \cdot (1 - r^2).\, c^{-\frac{3}{2}r^2}\right)$$

mais on a $2i = h$; $\frac{l}{i} = r\sqrt{n}$; les limites de l'intégrale sont donc $-\frac{h}{2} \cdot r\sqrt{n}$ et $+\frac{h}{2} \cdot r\sqrt{n}$; par conséquent la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites sera comprise dans les limites $\frac{1}{2}h - \frac{rh}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2}h + \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, sera exprimée par l'intégrale précédente.

Si l'on fait $\frac{3}{2}\, r^2 = s^2$, cette intégrale devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} . \int ds.\ c^{-s^2}. \left(1 - \frac{3}{20.\ n}.(1 - 4\, s^2 + \tfrac{4}{3}\, s^4) + \text{etc.}\right)$$

ou

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} . \left\{ \begin{array}{l} \int ds.\ c^{-s^2} \\ - \frac{1}{20.\ n} .\ c^{-s^2}.\ (3\, s - 2\, s^3) + \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (a^{IV})$$

Lorsque la valeur de s à sa limite est fort grande, alors $\int ds.\ c^{-s^2}$ approche de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, de manière à en différer moins que d'une grandeur quelconque donnée, si l'on augmente indéfiniment le nombre n; de plus, les termes suivans $- \frac{1}{20.\ n}.\ c^{-s^2}.\ (3\, s - 2\, s^3)$ deviennent alors entièrement insensibles. On peut donc, par l'accroissement de n, resserrer à la fois les limites $\pm \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, et augmenter en même temps la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites tombera entre les limites $\frac{1}{2}\, h \pm \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, de manière que la différence de la certitude à cette probabilité, et l'intervalle compris entre ces limites, soient moindres que toute grandeur assignable.

Lorsque s est fort petit, on a par une série convergente,

$$\int ds.\ c^{-s^2} = s - \frac{1}{1.2} . \frac{s^3}{3} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{s^5}{5} - \text{etc.}$$

Cette série peut être employée, lorsque s ne surpasse

pas $\frac{3}{2}$; mais lorsqu'il le surpasse, on peut faire usage de la fraction continue que j'ai donnée dans le dixième livre de la *Mécanique céleste*,

$$\int ds.\, c^{-s^2} = \tfrac{1}{2}.\sqrt{\pi} - \frac{c^{-s^2}}{2s}\left\{\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\text{etc.}}}}}}\right\}$$

q étant égal à $\frac{1}{2s^2}$. La fraction continue $\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\text{etc.}}}$ se réduit, suivant que l'on s'arrête au premier, au second, etc. termes, dans les fractions suivantes alternativement plus grandes et plus petites que la fraction continue,

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{1+q};\ \frac{1+2q}{1+3q};\ \frac{1+5q}{1+6q+3q^2};\ \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2};\ \text{etc.}$$

Les numérateurs de ces fractions se déduisent les uns des autres, en observant que le numérateur de la fraction $i^{\text{ième}}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{\text{ième}}$, plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{\text{ième}}$ multiplié par $(i-1)\,q$. Les dénominateurs se déduisent les uns des autres de la même manière.

IV.

Nous pouvons maintenant appliquer nos formules,

aux comètes observées, en faisant usage des données de l'article II. On a d'après ces données,

$$n = 97\,;\; h = 100^\circ\,;$$

$$\frac{r\,h}{2\sqrt{n}} = 1^\circ, 87763\,;$$

ce qui donne

$$s = \frac{1^\circ, 87763}{100^\circ} \cdot 2\sqrt{97} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0, 452731.$$

On peut ici faire usage de l'expression de l'intégrale $\int ds.\, c^{-s^2}$ en série, et alors on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int ds.\, c^{-s^2} = 0, 4941.$$

La probabilité que l'inclinaison moyenne doit être comprise dans les limites $50^\circ \pm 1^\circ, 87663$ est par la formule (a^{IV}), égale à 0, 4933, ou $\frac{1}{2}$ à fort peu près; la probabilité que cette inclinaison doit être au-dessous est donc $\frac{1}{4}$; et la probabilité qu'elle doit être au-dessus, est $\frac{1}{4}$. Toutes ces probabilités sont trop peu différentes de $\frac{1}{2}$, pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbes planétaires.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que sur 97 comètes, quarante-cinq au plus seront rétrogrades, est la somme des

quarante-six premiers termes du binome $(p+q)^{97}$, en faisant $p=q=\frac{1}{2}$; mais la somme des quarante-huit premiers est la moitié du binome ou $\frac{1}{2}$; d'où il est facile de conclure que la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{2}-\frac{97.96.....50}{1.2.3....48.2^{97}}\left\{1+\frac{48}{50}+\frac{48.47}{50.51}\right\};$$

or on a

$$\frac{97.96......50}{1.2.3......48.2^{97}}=\frac{1.2.3....97}{(1.2.3....49)^2}.\frac{49}{2^{97}};$$

de plus on a généralement, lorsque s est un grand nombre,

$$1.2.3......s=s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}\left\{1+\frac{1}{12.s}+\text{etc.}\right\}.$$

Ce qui donne

$$\frac{1.2.3....97}{(1.2.3....49)^2}.\frac{49}{2^{97}}=\frac{\left(\frac{48,5}{49}\right)^{98}.c.\frac{1165}{1164}}{\sqrt{\pi.48,5.}\left(\frac{589}{588}\right)^2}.$$

On trouve ainsi la probabilité cherchée égale à 0,2713, fraction beaucoup trop grande, pour qu'elle puisse indiquer une cause qui ait favorisé dans l'origine, les mouvemens directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites, ne paroît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

V.

Si l'on néglige les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, l'intégrale

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int ds \,.\, c^{-s^2}$, ou $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \int dr \,.\, c^{-\frac{3}{2}r^2}$ exprime la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\frac{h}{2} - \frac{rh}{2\sqrt{n}}$, et $\frac{h}{2} + \frac{rh}{2\sqrt{n}}$; mais cette même probabilité est, par l'art. II, égale à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.\,2^n}\left\{\begin{array}{l} (n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n \\ + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.} \\ - (n-r\sqrt{n})^n + n.(n-r.\sqrt{n}-2)^n \\ - \text{etc.} \end{array}\right\};$$

cette fonction est donc égale à l'intégrale précédente. Or on a sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puissance n dans le premier membre, l'équation suivante,

$$\begin{array}{l} (n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}. \\ (n+r\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.} \\ = (n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n + \text{etc.} \\ + (n-r\sqrt{n})^n - n.(n-r\sqrt{n}-2)^n + \text{etc.} \end{array}$$

Le premier membre est, comme l'on sait, égal à $1.2.3\ldots n.\,2^n$; la seconde expression de la probabilité devient ainsi, en éliminant $(n - r\sqrt{n})^n - n.(n-r\sqrt{n}-2)^n +$ etc. au moyen de sa valeur donnée par l'équation précédente,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.\,2^{n-1}}\left\{\begin{array}{l} (n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n \\ + \text{etc.} \\ - 1.2.3\ldots n.\,2^{n-1}. \end{array}\right\}$$

en l'égalant à l'intégrale qui exprime la même probabilité, on aura cette équation remarquable,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.} \\ -1.2.3\ldots n.2^{n-1}\end{array}\right\}(b);$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\int dr.\, c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

Si au lieu d'éliminer $(n-r\sqrt{n})^n - n.(n-r\sqrt{n}-2)^n$ + etc., on éliminoit $(n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n$ + etc., on auroit une équation qui coïncideroit avec la précédente, en y faisant r négatif; ainsi cette équation a lieu r étant positif ou négatif, l'intégrale devant commencer avec r, et la série des différences devant s'arrêter, lorsque la quantité élevée à la puissance n, devient négative.

L'équation (b) différenciée par rapport à r, donne

$$\frac{\sqrt{n}}{1.2.3\ldots\overline{n-1}.2^n}.\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1} \\ +\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\,c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

en différenciant encore, on aura

$$\frac{n}{1.2.3\ldots\overline{n-2}.2^n}.\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n-2} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-2} \\ +\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$=-3r.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\,c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

En continuant de différencier ainsi, on aura d'une manière très-approchée, les valeurs des différentielles successives du premier membre de l'équation (b), pourvu que le nombre de ces différenciations soit très-petit relativement au nombre n. Toutes ces équations ont lieu, r étant positif ou négatif; et lorsque r est nul, elles deviennent

$$\frac{\sqrt{n}}{1.2.3\ldots\overline{n-1}.2^n}.\left\{\begin{array}{l} n^{n-1} - n.(n-2)^{n-1} \\ + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n-4)^{n-1} \\ - \text{etc.}\end{array}\right\} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}};$$

$$\frac{n}{1.2.3\ldots\overline{n-2}.2^n}.\left\{\begin{array}{l} n^{n-2} - n.(n-2)^{n-2} \\ + \text{etc.}\end{array}\right\} = 0;$$

$$\frac{n.\sqrt{n}}{1.2.3\ldots\overline{n-3}.2^n}.\left\{\begin{array}{l} n^{n-3} - n.(n-2)^{n-3} \\ + \text{etc.}\end{array}\right\} = -3.\sqrt{\frac{3}{2\pi}};$$

$$\frac{n^2}{1.2.3\ldots\overline{n-4}.2^n}.\left\{n^{n-4} - n.(n-2)^{n-4} + \text{etc.}\right\} = 0;$$

etc.

Les seconds membres de ces équations sont zéro, lorsque l'exposant de la puissance est de la forme $n-2s$; ce qu'il est facile de voir d'ailleurs, en observant que

$$n^{n-2s} - n.(n-2)^{n-2s} + \text{etc.}$$

est la moitié de la série $n^{n-2s} - n.(n-2)^{n-2s} + \text{etc.}$, sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puis-

sance $n-2s$, série qui étant la différence finie n^{ieme} d'une puissance moindre que n, est nulle.

On peut, en intégrant successivement l'équation (b), obtenir des théorêmes analogues, sur les différences des puissances supérieures à n; ainsi l'on a par une première intégration,

$$\frac{1}{1.2.3..\overline{n+1}\sqrt{n}.2^n}\left\{\begin{matrix}(n+r\sqrt{n})^{n+1}-n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1}\\ +\text{etc.}-N_n\end{matrix}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\iint dr^2\, c.^{-\frac{1}{2}r^2}; \text{(b')}$$

les intégrales commençant avec r, et N_n étant égal à

$$n^{n+1}-n.(n-2)^{n+1}+\text{etc.}$$

Pour déterminer cette fonction, nous observerons que l'on a

$$n^{n+1}-n.(n-2)^{n+1}+\text{etc.}$$

$$=n.\left\{n^n-n.(n-2)^n+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n-4)^n-\text{etc.}\right\}$$

$$+2n.\left\{\begin{matrix}(n-1+r'\sqrt{n-1})^n-(n-1).\\ (n-1+r'\sqrt{n-1}-2)^n+\text{etc.}\end{matrix}\right\}$$

en faisant $r'\sqrt{n-1}=-1$. On a ensuite

$$n^n-n.(n-2)^n+\text{etc.}=1.2.3.....n.2^{n-1}$$

car le premier membre de cette équation est la moitié de la série des différences, sans l'exclusion des quantités négatives élevées à la puissance n. De plus, si l'on

change dans l'équation (b'), n dans $n-1$, r en r', et si l'on y suppose ensuite $r' = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ on aura à très-peu près

$$(n-1+r'\sqrt{n-1})^n - (n-1).(n-1+r'\sqrt{n-1}-2)^n + \text{etc.}$$

$$= N_{n-1} + 1.2.3\ldots n.\sqrt{n-1}.2^{n-1}.$$

$$\left\{-\frac{1}{2\sqrt{n-1}} + \frac{1}{2.(n-1)}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right\}$$

on aura donc

$$N_n = 2n.N_{n-1} + 1.2.3\ldots n.2^{n-1}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

si l'on fait

$$N_n = 1.2.3\ldots\ldots\ldots n.2^n.\delta_n;$$

on aura

$$\delta_n - \delta_{n-1} = \tfrac{1}{2}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

ce qui donne à très-peu près, en intégrant

$$\delta_n = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\tfrac{1}{3}.\overline{n+1}.\sqrt{n}$$

il est facile de voir que l'on peut négliger ici la constante arbitraire. Donc

$$N_n = 1.2.3\ldots\overline{n+1}.2^n.\sqrt{n}.\tfrac{1}{3}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

partant

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\overline{n+1}.\,2^n\sqrt{n}}.\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n+1}-n.\,(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1}\\ +\text{ etc.}\end{array}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{3}.\sqrt{\frac{3}{2\pi}}+\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\iint dr^2.\,c^{-\frac{3}{2}r^2}.$$

En intégrant de nouveau, on a

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\overline{n+2}.\,2^n.n}.\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n+2}-n.\,(n+r\sqrt{n}-2)^{n+2}\\ +\text{ etc}\\ -n^{n+2}+n.\,(n-2)^{n+2}-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\,\frac{r}{3}+\tfrac{1}{4}.\,r^2+\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\iiint dr^3.\,c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

toutes les intégrales devant commencer avec r. Mais on a

$$n^{n+2}-n.\,(n-2)^{n+2}+\text{etc.}=1.2.3\ldots\overline{n+2}.\,2^{n-1}.\,\frac{n}{6};$$

En effet, on a, comme on sait,

$$\Delta^n.\,u=\left(c^{\alpha\frac{du}{dx}}-1\right)^n$$

en appliquant à la caractéristique d, les exposans des puissances de $\frac{du}{dx}$, dans le développement du second membre de cette équation; et α étant la variation de x.

Si l'on fait $u = x^{n+2}$, on aura, sans exclusion des puissances des quantités négatives

$$(x + 2n)^{n+2} - n.(x + 2n - \alpha)^{n+2} + \text{etc.}$$

$$= 1.2.3\ldots\overline{n+2}.\ \alpha^n.\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha n x}{2} + \frac{\alpha^2 n^2}{8} + \frac{\alpha^2 n}{3.8}\right\}$$

ce qui donne sans cette exclusion, et faisant $x = -n$, et $\alpha = 2$,

$$n^{n+2} - n.(n-2)^{n+2} + \text{etc.} = 1.2.3\ldots\overline{n+2}.\ 2^n.\ \frac{n}{6}$$

et avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^{n+2} - n.(n-2)^{n+2} + \text{etc.} = 1.2.3\ldots\overline{n+2}.\ 2^{n-1}.\ \frac{n}{6};$$

on a donc

$$\frac{1}{1.2.3..\overline{n+2}.\ 2^n.n}.\left\{\begin{matrix}(n+r\sqrt{n})^{n+2} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n+2} \\ + \text{etc.}\end{matrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{12} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\frac{r}{3} + \tfrac{1}{4}r^2 + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.\iiint dr^3.\ c^{-\frac{3}{2}.r^2}$$

et ainsi de suite.

VI.

Le problème que nous avons résolu dans l'article I, relativement aux inclinaisons, est le même que celui dans lequel on se propose de déterminer la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre n d'observations sera comprise dans des limites données, en supposant que les erreurs de chaque observation, puissent également

s'étendre dans l'intervalle h. Nous allons maintenant considérer le cas général dans lequel les facilités des erreurs suivent une loi quelconque.

Divisons l'intervalle h, dans un nombre infini de parties $i+i'$, les erreurs négatives pouvant s'étendre depuis zéro jusqu'à $-i$, et les erreurs positives, depuis zéro jusqu'à i'. Par chaque point de l'intervalle h, élevons des ordonnées qui expriment les facilités des erreurs correspondantes; nommons q le nombre des parties comprises depuis l'ordonnée relative à l'erreur zéro, jusquà l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de la courbe formée par ces ordonnées. Cela posé, représentons par $\varphi\left(\frac{s}{i+i'}\right)$, la probabilité de l'erreur s pour chaque observation, et considérons la fonction

$$\varphi\left(\frac{-i}{i+i'}\right).c^{-i\varpi.\sqrt{-1}}+\varphi\left(\frac{-(i-1)}{i+i'}\right).c^{-(i-1).\varpi.\sqrt{-1}}\ldots.$$
$$+\varphi\left(\frac{o}{i+i'}\right)\ldots\ldots+\varphi\left(\frac{i'-1}{i+i'}\right).c^{(i'-1).\varpi\sqrt{-1})}$$
$$+\varphi\left(\frac{i'}{i+i'}\right).c^{i'\varpi\sqrt{-1}}.$$

En élevant cette fonction, à la puissance n; le coefficient de $c^{r\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de cette puissance, sera la probabilité que la somme des erreurs de n observations sera r; d'où il suit qu'en multipliant la fonction précédente par $c^{-q\varpi.\sqrt{-1}}$, et élevant le produit à la puissance n, le coefficient de $c^{r\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de ce produit, sera la probabilité que la somme des erreurs sera $r+nq$. Ce produit est

$$\left\{\int \varphi\left(\frac{r}{i+i'}\right) c^{(r-q)\varpi\sqrt{-1}}\right\}^n ; (o)$$

le signe $\int$ devant s'étendre depuis $r = -i$ jusqu'à $r = i'$. Si l'on fait

$$\frac{r}{i+i'} = \frac{x}{h}; \quad \frac{q}{i+i'} = \frac{q'}{h}; \quad \frac{1}{i+i'} = \frac{dx}{h}$$

la fonction (o) devient, en réduisant les exponentielles en séries

$$\frac{(i+i')^n}{h^n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \int dx.\varphi\left(\frac{x}{h}\right) + (i+i').\varpi.\sqrt{-1}.\int\left(\frac{x-q'}{h}\right).\ dx.\varphi\left(\frac{x}{h}\right) \\ - \frac{(i+i')^2}{1.2}.\varpi^2.\int\frac{(x-q')^2}{h^2}.dx.\ \varphi\left(\frac{x}{h}\right) \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}^n$$

x est l'abcisse dont l'ordonnée est $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$, l'origine des abcisses correspondant à l'ordonnée relative à l'erreur zéro: q' est l'abcisse correspondante à l'ordonnée du centre de gravité de l'aire de la courbe: les intégrales doivent être prises depuis $x = \frac{-ih}{i+i'}$ jusqu'à $x = \frac{i'h}{i+i'}$. On a par la nature du centre de gravité de la courbe,

$$\int \frac{(x-q')}{h}.\ dx.\ \varphi\left(\frac{x}{h}\right) = 0;$$

la fonction précédente devient ainsi, en faisant

$$k = \int dx.\ \varphi\left(\frac{x}{h}\right); \quad k' = \int\frac{(x-q')^2}{h^2}.\ dx.\ \varphi\left(\frac{x}{h}\right); \text{ etc.}$$

$$\frac{(i+i')^n}{h^n}.\ k^n.\left\{1 - \frac{k'}{2k}.(i+i')^2.\ \varpi^2 + \text{etc.}\right\}^n$$

Si, conformément à l'analyse de l'article IV, on multiplie la fonction (o) par $2\ cos.\ l\varpi$; le terme indépendant de ϖ dans le produit, exprimera la probabilité que la somme des erreurs sera ou $nq - l$, ou $nq + l$; en multipliant ce produit par $d\varpi$, et intégrant depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$, l'intégrale divisée par π, exprimera cette probabilité qui sera ainsi, en rejetant les puissances impaires de ϖ, qui sont multipliées par $\sqrt{-1}$, et qui résultent du développement des sinus de ϖ et de ses multiples dans la fonction (o),

$$\frac{(i+i')^n.\ k^n}{h^n} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int d\varpi . cos.\ l\varpi . \left[1 - \frac{k'}{2\,k} . (i+i')^2 . \varpi^2 + \text{etc.}\right]^n . \quad (o')$$

Soit présentement

$$(i + i').\ \varpi = t$$

on aura

$$log. \left[1 - \frac{k'}{2\,k} . (i + i')^2 .\ \varpi^2 + \text{etc.}\right]^n$$
$$= n.\ log. \left(1 - \frac{k'}{2\,k} .\ t^2 + \text{etc.}\right)$$
$$= n. \left(- \frac{k'}{2\,k} .\ t^2 + \text{etc.}\right)$$

ce qui donne pour $1 - \frac{k'}{2\,k} . (i + i')^2 .\ \varpi^2 + \text{etc.}$, une expression de cette forme

$$c^{-\frac{k'}{2\,k} . n t^2} . \ (1 + An.\ t^4 + \text{etc})$$

La fonction (o') deviendra donc

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(i+i')^n.\,k^n}{h^n}.\,\frac{2}{\pi}.\,\frac{1}{(i+i')}.\\ \int dt.\,cos.\left(\frac{lt}{i+i'}\right).\,c^{-\frac{k'}{2k}.nt^2}.\,(1+An.\,t^4+\text{etc.})\end{array}\right\}.\;(o'')$$

L'erreur de chaque observation devant nécessairement tomber dans l'intervalle h, on a

$$\frac{(i+i').\,k}{h}=1$$

Soit $\frac{l}{i+i'}=r\sqrt{n}$, l'expression précédente deviendra, en n'ayant égard qu'à son premier terme,

$$\frac{2}{\pi.\,(i+i')}.\int dt.\,cos.\,rt\sqrt{n}.\,c^{-\frac{k'}{2k}.\,nt^2}$$

ce qui, en intégrant depuis t nul jusqu'à t infini, devient par l'analyse de l'article III,

$$\frac{2}{(i+i')\sqrt{\pi}}.\sqrt{\frac{k}{2k'.\,n}}.\,c^{-\frac{k}{2k'}.\,r^2}$$

Si l'on multiplie cette fonction par dl; en l'intégrant, on aura la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $nq\pm l$, ou $nq\pm(i+i')\,r.\sqrt{n}$; or on a $dl=(i+i').\,dr.\sqrt{n}$, cette probabilité sera donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\sqrt{\frac{k}{2k'}}.\int dr.\,c^{-\frac{k}{2k'}.\,r^2}$$

$i+i'$ étant égal à h, et q' pouvant être substitué pour q, les limites précédentes deviendront

$$nq' \pm h.\ r\sqrt{n}$$

et celles de la moyenne des erreurs, seront

$$q' \pm \frac{rh}{\sqrt{n}}$$

Dans le cas que nous avons considéré dans l'article III, q' est nul; $k = h$; $k' = \frac{1}{12}.h$; l'expression précédente devient en y faisant $r = \frac{1}{2}r'$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}.\ \int dr'.\ c^{-\frac{3}{2}r'^2}$$

et les limites de la moyenne des erreurs sont $\pm\ \frac{\frac{1}{2}r'h}{\sqrt{n}}$, c'est ce qui est conforme à l'article cité.

En général, q' est nul, lorsque la courbe des facilités des erreurs est symétrique de chaque côté de l'ordonnée correspondante à l'erreur zéro. Si la loi des facilités est représentée par A. $(\frac{1}{4}h^2 - x^2)$, on aura $k = \frac{A}{6}h^3$; $2k' = \frac{A}{60}.h^3$; et par conséquent

$$\frac{k}{2k'} = 10$$

ainsi la probabilité que l'erreur moyenne des observations sera comprise dans les limites $\pm\ \frac{rh}{\sqrt{n}}$, sera

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\ \sqrt{10}\int dr.\ c^{-10r^2}$$

En appliquant à ce cas, la méthode de l'article I, on aura l'expression de la même probabilité, par une suite d'un très-grand nombre de termes, analogue à celle des différences finies, par laquelle nous avons déterminé la probabilité dans le cas d'une égale facilité des erreurs. Mais cette nouvelle suite que nous avons donnée dans les mémoires cités de l'Académie des sciences pour l'année 1778, page 249, est trop compliquée pour offrir par sa comparaison avec l'expression précédente de la probabilité, des résultats qui puissent intéresser les géomètres.

Dans le cas où les erreurs peuvent s'étendre à l'infini, l'analyse précédente donne encore la probabilité que l'erreur moyenne d'un très-grand nombre d'observations sera resserrée dans des limites données. Pour voir comment on peut alors appliquer cette analyse, supposons que $c^{-\frac{x}{p}}$ soit l'expression de la facilité des erreurs, l'exposant de c devant toujours être négatif, et le même pour des erreurs égales positives et négatives. En supposant les erreurs positives, on aura $\int dx.\ c^{-\frac{x}{p}} = p.\left\{1 - c^{-\frac{h}{2p}}\right\}$, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à $x = \frac{1}{2} h$. Pour avoir la valeur entière de k, il faut doubler cette quantité, parce que les erreurs négatives donnent une quantité égale à la précédente; en supposant donc h assez grand pour que $c^{-\frac{h}{2p}}$ dispa-

roisse devant l'unité, ce qui a lieu exactement dans le cas de h infini; on aura à très-peu près

$$k = 2p.$$

on trouvera de la même manière en prenant l'intégrale $\int \frac{x^2 dx}{h^2} \cdot c^{-\frac{x}{p}}$,

$$k' = \frac{4p^3}{h^2}$$

ainsi

$$\frac{k}{2k'} = \frac{h^2}{4p^2};$$

la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm \frac{rh}{\sqrt{n}}$ sera donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{h}{2p} \cdot \int dr. \, c^{-\frac{h^2}{4p^2} \cdot r^2}$$

soit $rh = r'p$; les limites deviennent $\pm \frac{r'p}{\sqrt{n}}$, et la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans ces limites, devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dr' . c^{-r'^2};$$

alors la considération de h supposé infini, disparoît.

VII.

Le moyen qui nous a conduit à l'équation (b) de l'article V, laissoit à désirer une méthode directe pour y arriver; sa recherche est l'objet de l'analyse suivante.

Désignons par $\varphi(r, n)$ le second membre de cette équation, qu'il s'agit de déterminer : en la différenciant par rapport à r, elle donnera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\overline{n-1}.\,2^n}\cdot\left\{\begin{array}{l}(n + r.\sqrt{n})^{n-1}\\ -\,n.(n+r.\sqrt{n}-2)^{n-1}\\ +\text{ etc.}\end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\varphi'(r, n).$$

$\varphi'(r, n)$, $\varphi''(r, n)$, etc. désignant les différences successives de $\varphi(r, n)$, divisées par les puissances correspondantes de dr. Mais on a

$$\begin{aligned}
&(n + r.\sqrt{n})^{n-1} - n.(n + r.\sqrt{n} - 2)^{n-1}\\
&\quad + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+r.\sqrt{n} - 4)^{n-1} - \text{etc.}\\
&\quad = (n - 1 + r'.\sqrt{n-1})^{n-1}\\
&\quad - \overline{n-1}.(n - 1 + r'.\sqrt{n-1} - 2)^{n-1}\\
&\quad + \text{etc.}\\
&\quad - (n - 1 + r''.\sqrt{n-1})^{n-1}\\
&\quad + \overline{n-1}.(n - 1 + r''.\sqrt{n-1} - 2)^{n-1}\\
&\quad - \text{etc.}
\end{aligned}$$

en faisant

$$r'.\sqrt{n-1} = r.\sqrt{n}+1;\ r''.\sqrt{n-1} = r.\sqrt{n}-1.$$

L'équation (b) donne en y changeant n dans $n-1$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\overline{n-1}.2^{n-1}}.\left\{\begin{array}{l} (n-1+r'.\sqrt{n-1})^{n-1} \\ -\overline{n-1}.(n-1+r'.\sqrt{n-1}-2)^{n-1} \\ +\text{ etc.} \\ -(n-1+r''.\sqrt{n-1})^{n-1} \\ +\overline{n-1}.(n-1+r''.\sqrt{n-1}-2)^{n-1} \\ -\text{ etc.} \end{array}\right\}$$
$$= \varphi(r', n-1) - \varphi(r'', n-1;$$

on a donc cette équation aux différences partielles finies et infiniment petites,

$$\varphi(r', n-1) - \varphi(r'', n-1) = \frac{2}{\sqrt{n}}\varphi'(r, n);\ (\text{p}).$$

On peut obtenir une seconde équation, de cette manière. On a

$$(n+r.\sqrt{n})^n - n.(n+r.\sqrt{n}-2)^n$$
$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+r.\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.}$$

$$= (n+r.\sqrt{n}).\left\{\begin{array}{l} (n+r.\sqrt{n})^{n-1} \\ -\overline{n+1}.(n+r.\sqrt{n}-2)^{n-1} \\ +\text{ etc.} \end{array}\right\}$$

$$+\ 2n.\left\{\begin{array}{l} \quad(n + r.\sqrt{n} - 2)^{n-1} \\ -\ \overline{n - 1}\ (n + r.\sqrt{n} - 4)^{n-1} \\ +\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

L'équation (b) donne en la différenciant par rapport à r

$$\frac{n + r.\sqrt{n}}{1.2.3\ldots.n.2^n}.\left\{\begin{array}{l} (n+r.\sqrt{n})^{n-1} - n.(n+r.\sqrt{n}-2)^{n-1} \\ +\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n}\right).\varphi'(r,n);$$

et la même équation donne en y changeant comme ci-dessus, n dans $n-1$, et faisant

$$r''.\sqrt{n-1} = r.\sqrt{n} - 1,$$

$$\frac{2n}{1.2.3\ldots.n.2^n}.\left\{\begin{array}{l} \quad(n - 1 + r''.\sqrt{n-1})^{n-1} \\ -\ \overline{n - 1}.\ (n - 1 + r''.\sqrt{n-1} - 2)^{n-1} \\ +\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \varphi(r'', n-1) + \tfrac{1}{2}$$

donc

$$\frac{1}{1.2.3\ldots.n.2^n}.\left\{\begin{array}{l} (n+r.\sqrt{n})^n - n.(n+r.\sqrt{n} - 2)^n \\ +\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n}\right).\varphi'(r,n) + \varphi(r'', n-1) + \tfrac{1}{2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n}\right).\varphi'(r,n) + \varphi(r'', n-1) = \varphi(r,n); \quad \text{(q)}$$

Cette équation combinée avec l'équation (p) donne

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r}{n}\right).\varphi'(r,n) + \varphi(r', n-1) = \varphi(r,n); \quad \text{(q')}$$

On a

$$r' = r\left[1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}.\left[1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \text{etc.}\right]$$
$$r'' = r\left[1 + \frac{1}{2\,n} + \frac{3}{8\,n^2} + \text{etc.}\right]$$
$$- \frac{1}{\sqrt{n}}.\left[1 + \frac{1}{2\,n} + \frac{3}{8\,n^2} + \text{etc.}\right].$$

En substituant ces valeurs dans les équations (q) et (q′), et en développant en série, les fonctions $\varphi\,(r', n - 1)$ et $\varphi\,(r'', n - 1)$; on voit que ces deux équations ne diffèrent qu'en ce que les termes affectés de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ont des signes contraires; on peut donc égaler séparément à zéro, les termes du développement de l'équation (q), qui n'ont point $\sqrt{n}$, pour diviseur, et alors on a une équation de cette forme,

$$\frac{1}{2\,n}.\left[3\,r.\,\varphi'\,(r, n - 1) + \varphi''\,(r, n - 1)\right]$$
$$= \varphi\,(r, n) - \varphi\,(r, n - 1)$$
$$- \frac{r}{n}.\left[\varphi'(r, n) - \varphi'\,(r, n - 1)\right]; \quad (r)$$
$$+ \frac{M}{n^2} + \frac{M'}{n^3} + \text{etc.}$$

M, M', etc. étant des fonctions rationnelles et entières de r, multipliées par les différentielles de $\varphi\,(r, n - 1)$, et qu'il est facile de former. On trouve ainsi

$$M = -\frac{3r}{8}.\ \varphi'(r, n-1) - \frac{(4+r^2)}{8}.\ \varphi''(r, n-1)$$

$$-\frac{r}{4}.\ \varphi'''.(r, n-1) - \frac{1}{24}.\ \varphi^{IV}.(r, n-1).$$

L'équation (ρ) donne en l'intégrant, et désignant par $\varphi_{,}(r, n)$, l'intégrale $\int dr.\ \varphi(r, n)$, commençante avec r, et observant que $dr' = dr'' = \frac{dr\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$;

$$\varphi_{,}(r', n-1) - \varphi_{,}(r'', n-1) = \frac{2}{\sqrt{n-1}}.\ \varphi(r, n)$$

En substituant pour r' et r'', leurs valeurs précédentes, et développant en série, les fonctions $\varphi_{,}(r', n-1)$ et $\varphi_{,}(r'', n-1)$, on a une équation de cette forme,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n-1}}.\left[\varphi(r', n) - \varphi(r, n-1)\right] \\ = &\frac{1}{6n\sqrt{n-1}}.\left[3r.\ \varphi'(r, n-1) + \varphi''(r, n-1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (r')$$

$$+\frac{N}{n^2.\sqrt{n-1}} + \frac{N'}{n^3.\sqrt{n-1}} + \text{etc.}$$

N, N', etc. étant des fonctions de la même nature que M, M', etc. et qu'il est facile de former de la même manière : on trouve ainsi,

$$N = \frac{3r}{8}.\ \varphi'(r, n-1) + \frac{(4+3r^2)}{24}.\ \varphi''(r, n-1)$$

$$+\frac{r}{12}.\ \varphi'''(r, n-1) + \frac{1}{120}.\ \varphi^{IV}.(r, n-1)$$

Si l'on substitue dans l'équation (r), au lieu de

$\varphi(r, n) - \varphi(r, n-1)$, sa valeur donnée par l'équation (r'); on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3n}.\left[3r.\varphi'(r, n-1) + \varphi''(r, n-1)\right] \\ = -\frac{r}{6n^2}.\frac{d}{dr}.\left[3r.\varphi(r,n-1) + \varphi''(r,n-1)\right] \\ + \frac{M+N}{n^2} + \frac{M'+N'}{n} + \text{etc.} \\ - \frac{r}{n^3}.\frac{d.N}{dr} - \frac{r}{n^4}.\frac{dN'}{dr'} \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (s)$$

Pour intégrer cette équation, supposons

$$\varphi(r, n-1) = \Psi(r) + \frac{\Pi(r)}{n} + \frac{\Gamma(r)}{n^2} + \text{etc.}$$

en substituant cette expression dans l'équation précédente, et comparant les coefficiens des puissances descendantes de n; on aura les équations suivantes,

$$0 = 3r.\Psi'(r) + \Psi''(r)$$

$$3r.\Pi'(r) + \Pi''(r) = -\frac{1}{2}r.\frac{d}{dr}.\left[3r.\Psi'(r) + \Psi''(r)\right].$$

$$+ 3.(\overline{M} + \overline{N});$$

$\overline{M}$ et $\overline{N}$, étant ce que deviennent M et N, lorsqu'on y change $\varphi(r, n-1)$ dans $\Psi(r)$. En continuant ainsi, on aura les équations nécessaires pour déterminer $\Gamma(r)$ et les fonctions suivantes.

La première équation donne en l'intégrant

$$\Psi'(r) = A.c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

A étant une constante arbitraire. Pour intégrer la seconde, on doit observer que les expressions précédentes de M et de N, donnent

$$\overline{M} = \frac{3A.r}{4}(1-r^2).c^{-\frac{3}{2}r^2}; \overline{N} = -\frac{3Ar}{20}.(1-r^2).c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

L'équation en $\Pi'(r)$ devient ainsi

$$3r.\Pi'(r) + \Pi''(r) = \frac{36.A.}{20}.(r-r^3).c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

En la multipliant par $c^{\frac{3}{2}r^2}$, et intégrant, on aura

$$\Pi'(r) = B.c^{-\frac{3}{2}r^2} + \frac{3A}{20}.(6r^2 - 3r^4).c^{-\frac{3}{2}r^2}$$

B étant une seconde arbitraire. On aura de la même manière $\Gamma'(r)$, etc.; et l'on obtiendra ainsi $\varphi(r, n-1)$. Pour déterminer les arbitraires A, B, etc., nous observerons que si l'on intègre $\int dr'.\varphi'(r, n-1)$ depuis r' nul jusqu'à $r' = \sqrt{n}$, ce qui revient à le prendre jusqu'à r infini, parce que l'on peut négliger les termes multipliés par l'exponentielle $c^{-\frac{3}{2}n}$, à cause de la grandeur supposée à n; on aura pour cette intégrale, une quantité que nous désignerons par $L.\sqrt{\frac{3}{2n}}$, L étant une fonction linéaire de A, $\frac{B}{n}$, etc.; mais lorsque $r = \sqrt{n}$, le premier membre de l'équation (b) devient quel que soit n, égal à $\frac{1}{2}$; on a donc

$$L.\sqrt{\frac{3}{2n}} = \frac{1}{2}$$

En égalant à zéro dans cette équation, les coefficiens des puissances successives de $\frac{1}{n}$; on aura autant d'équations qui détermineront les arbitraires A, B, etc.; ainsi $\varphi'(r, n-1)$ étant, par ce qui précède, égal à

$$\left(A+\frac{B}{n}+\text{etc.}\right).c^{-\frac{3}{2}.r^2}+\frac{3A}{20.n}(6r^2-3r^4).c^{-\frac{3}{2}r^2}+\text{etc};$$

on a, en intégrant depuis r nul jusqu'à r infini,

$$\int dr.\varphi'(r, n-1)=\sqrt{\frac{\pi}{6}}.\left(A+\frac{B}{n}+\frac{3A}{20.n}+\text{etc.}\right)$$

égalant cette quantité à $\frac{1}{2}$, et comparant les puissances de $\frac{1}{n}$, on a

$$A=\sqrt{\frac{3}{2\pi}};\ B=-\frac{3A}{20};\ \text{etc.}$$

ce qui donne

$$\varphi'(r, n-1)$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.c^{-\frac{3}{2}r^2}.\left[1-\frac{3}{20.n}.(1-6r^2+3r^4)+\text{etc.}\right]$$

En changeant n dans $n+1$, et négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n^2}$, on aura l'expression de $\varphi'.(r, n)$ qui résulte des articles III et V; car on voit par l'article V, que $\varphi(r, n)$ doit être un demi de la probabilité que nous avons déterminée dans l'article IV, et dont la moitié est égale à l'intégrale de dr multiplié par cette expression de $\varphi'(r, n)$.

VIII.

On peut réduire les équations (q) et (q′) à une seule équation aux différences infiniment petites et finies. En effet, si dans l'équation (q) on augmente r de $\frac{2}{\sqrt{n}}$, alors r'' se change dans r', et l'on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{r + \frac{2}{\sqrt{n}}}{n}\right) . \varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) + \varphi(r', n-1) = \varphi\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right)$$

En retranchant de cette équation, l'équation (q′), membre à membre, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} . \left[\varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) + \varphi'(r,n)\right]$$
$$+ \left(\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{n}\right) . \varphi'\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right)$$
$$- \frac{r}{n} . \varphi'(r,n) = \varphi\left(r + \frac{2}{\sqrt{n}}, n\right) - \varphi(r,n)$$

Soit $s = r\sqrt{n}$, et désignons $\varphi(r,n)$ par $\Psi(s)$; ce qui donne

$$dr. \varphi'(r,n) = ds. \Psi'(s)$$

et par conséquent

$$\varphi'(r,n) = \sqrt{n}. \Psi'(s)$$

l'équation précédente deviendra

$$\Psi'(s+2) + \Psi'.(s) = \Psi(s+2) - \Psi(s) - \left(\frac{s+2}{n}\right).\Psi'(s+2) + \frac{s}{n}.\Psi'(s)$$

En différenciant, on aura

$$\left.\begin{aligned}\Psi''(s+2)+\Psi''(s) &= [\Psi'(s+2)-\Psi'(s)].\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &-\left(\frac{s+2}{n}\right).\Psi''(s+2)+\frac{s}{n}.\Psi''(s)\end{aligned}\right\}.(x)$$

Cette équation est susceptible de la méthode générale que j'ai présentée dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1782, page 44. Je fais donc, conformément à cette méthode, et en employant les cosinus au lieu d'exponentielles,

$$\Psi'(s) = \int dt.\cos.st.\Pi(t)$$

Il s'agit de déterminer la fonction $\Pi(t)$ et les limites de l'intégrale. Pour cela on substituera cette intégrale, au lieu de $\Psi'(s)$, dans l'équation (x), et l'on fera disparoître les coefficiens $s+2$ et s, de cette équation, au moyen d'intégrations par parties; on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned}o &= \frac{1}{n}.\sin.\overline{s+1}.t.\sin.t.t.\Pi(t)\\ &+\int dt.\sin.\overline{s+1}.t.\left\{\begin{aligned}&(t.\cos.t-\sin.t).\Pi(t)\\ &-\frac{t.\sin.t}{n}.\Pi'(t)\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}.(y)$$

Suivant la méthode citée, on détermine $\Pi(t)$, en éga-

lant à zéro, la fonction sous le signe intégral; ce qui donne

$$o = (t.\ cos.\ t - sin.\ t).\ \Pi\ (t) - \frac{t.\ sin.\ t}{n}.\ \Pi'\ (t)$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\Pi\ (t) = A.\left(\frac{sin.\ t}{t}\right)^n$$

et par conséquent

$$\Psi'\ (s) = A.\ \int dt.\ cos.\ st.\left(\frac{sin.\ t}{t}\right)^n$$
$$= A.\ \int dt.\ cos.\ rt\sqrt{n}.\left(\frac{sin.\ t}{t}\right)^n$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite par la même méthode, les limites de cette dernière intégrale, en égalant à zéro la partie hors du signe $\int$ dans l'équation (y); or cette partie est nulle lorsque t est nul et lorsque t est infini, parce que $\Pi\ (t)$ devient nul alors; on peut donc prendre $t = o$ et $t = \infty$ pour ces limites. Cette expression de $\Psi'\ (s)$ est de la même forme que celle que nous avons trouvée dans l'article IV, pour la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de n comètes sera $\frac{nh}{2} \pm \frac{rh\sqrt{n}}{2}$; et en la traitant par la méthode de l'article cité, on arrivera, pour déterminer $\varphi\ (r, n)$, aux mêmes formules que nous venons de donner.

IX.

On peut étendre les recherches précédentes aux dif-

férences des puissances fractionnaires. Pour cela considérons la fonction

$$\overline{n-i}.\overline{n-i-1}.\overline{n-i-2}\ldots\overline{f-i}.2^{n-i}.\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n-i}-n.(n+r\sqrt{n}-1)^{n-i}\\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^{n-i}\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}$$

i étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire très-petit relativement à n, et f étant le nombre immédiatement supérieur à i. En désignant cette fonction par $\varphi(r,n)$; on aura d'abord, en suivant l'analyse précédente, l'équation (p). On aura ensuite, au lieu de l'équation (q), celle-ci :

$$\frac{n}{n-i}.\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{r}{n}\right).\varphi'(r,n)$$
$$+\frac{n}{n-i}.\varphi(r'',n-1)=\varphi(r,n)$$

En combinant ces deux équations et réduisant en série, comme ci-dessus; on aura, en négligeant les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$0=3r.\varphi'(r,n-1)+\varphi''(r,n-1)+3i.\varphi(r,n-1)$$

et en changeant $n-1$ en n,

$$0=3r.\varphi'(r,n)+\varphi''(r,n)+3i.\varphi(r,n).\qquad\text{(u)}$$

On satisfait à cette équation lorsque i est un nombre entier, en faisant

$$\varphi(r,n)=A.\frac{d^{i-1}.c^{-\frac{1}{2}r^2}}{dr^{i-1}}$$

A étant une constante arbitraire, et la caractéristique différentielle d devant être changée dans le signe intégral $\int$, si $i - 1$ est négatif, et alors on obtient les résultats précédens; mais si i est fractionnaire, l'intégration de l'équation (u) présente plus de difficultés. On peut l'obtenir alors par des intégrales définies.

Considérons le cas de $i = \frac{1}{2}$; on aura pour l'intégrale de l'équation (u),

$$\varphi\,(r,n) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot c^{-\frac{x^2}{6}} \cdot (a. \cos. rx + b. \sin. rx)$$

a et b étant deux constantes arbitraires, et l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. En effet si, conformément à la méthode exposée aux pages 49 et suivantes des *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1782, on fait

$$\varphi\,(r,n) = \int dx.\ \cos.\ rx.\ \Psi\,(x);$$

en substituant cette valeur dans l'équation différentielle (u), et faisant disparoître le coefficient r de cette équation, au moyen des intégrations par parties; on aura

$$0 = 3\,x. \cos. rx. \Psi\,(x) + \int. \cos. rx. \left[\left(\tfrac{3}{2} - x^2\right) dx.\ \Psi\,(x) - 3.\ d.\ x\Psi\,(x)\right]$$

Suivant la méthode citée, on détermine $\Psi\,(x)$, en égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, et l'on a

$$0 = \left(\tfrac{5}{2} - x^2\right) dx.\ \Psi\,(x) - 3.\ d.\ [x.\ \Psi\,(x)]$$

équation qui, intégrée donne

$$\Psi(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \cdot c^{-\frac{1}{6}x^2}$$

On détermine ensuite les limites de l'intégrale, en égalant à zéro la partie $3x. cos. rx. \Psi(x)$ hors du signe intégral. Cette partie devient $3a. \sqrt{x}. cos. rx. c^{-\frac{1}{6}x^2}$ et elle est nulle avec x et lorsque x est infini. Ainsi l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}. cos. rx. c^{-\frac{1}{6}x^2}$ doit être prise dans ces limites. Si, au lieu de l'intégrale $\int dx. cos. rx. \Psi(x)$; nous eussions considéré celle-ci, $\int dx. sin. rx. \Psi(x)$; nous aurions trouvé pour $\Psi(x)$, $\frac{b}{\sqrt{x}}. c^{-\frac{1}{6}x^2}$. La réunion de ces deux intégrales est donc l'intégrale complète de l'équation (u).

Pour déterminer les constantes a et b, nous observerons que si l'on fait $r = \sqrt{n}$, et $x = \frac{x'}{\sqrt{n}}$; l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}. c^{-\frac{x^2}{6}}. (a. cos. rx + b. sin. rx)$ devient

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}. \int \frac{dx'}{\sqrt{x'}}. (a. cos. x' + b. sin. x'). c^{-\frac{x'^2}{6n}}$$

Lorsque n est un très-grand nombre, on peut supposer le facteur $c^{-\frac{x'^2}{6n}}$ égal à l'unité, dans toute l'étendue de l'intégrale prise depuis x' nul jusqu'à x' infini;

car alors ce facteur ne commence à s'écarter sensiblement de l'unité, que lorsque x' est de l'ordre $\sqrt{n}$, et l'intégrale prise depuis une valeur de cet ordre pour x', jusqu'à x' infini, peut être négligée relativement à l'intégrale entière. Maintenant on a, comme je l'ai fait voir dans le tome VIII du *Journal de l'École polytechnique*, page 248,

$$\int \frac{dx'.\cos.x'}{\sqrt{x'}} = \int \frac{dx'.\sin.x'}{\sqrt{x'}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.$$

L'intégrale précédente se réduit donc à

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}.\sqrt{2\pi}.\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

c'est l'expression de $\varphi(r, n)$, lorsqu'on y fait $r = \sqrt{n}$. Alors on a

$$\varphi(r,n) = \frac{2^n}{1.3.5\ldots.\overline{2n-1}}\left\{\begin{array}{l} n^{n-\frac{1}{2}} - n.(n-1)^{n-\frac{1}{2}} \\ + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.(n-2)^{n-\frac{1}{2}} \\ - \text{etc.}\end{array}\right\}$$

La formule (μ'') de la page 81 des *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1782, donne, en n'ayant égard qu'à son premier terme,

$$n^{n-\frac{1}{2}} - n.(n-1)^{n-\frac{1}{2}} + \text{etc.} = \frac{1}{2^n}.1.3.5\ldots.\overline{2n-1}.\sqrt{\frac{2}{n}};$$

on a donc

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}.\sqrt{\pi}}$$

Si l'on fait ensuite dans $\varphi(r,n)$, $r = -\sqrt{n}$, cette fonction devient nulle; on a par conséquent

$$o = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot c^{-\frac{x^2}{6}} \cdot (a.\cos.\, x\sqrt{n} - b.\sin.\, x\sqrt{n})$$

ou

$$o = \int \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \cdot (a.\cos.\, x' - b.\sin.\, x')$$

ce qui donne $a = b$. Donc

$$a = b = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}$$

et par conséquent

$$\varphi(r,n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\, e^{-\frac{x^2}{6}} \cdot (\cos.\, rx + \sin.\, rx)$$

ou

$$\varphi(r,n) = \frac{1}{6\, n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{dx.\,(9 + 2.x^2)}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin.\, rx.\, c^{-\frac{x^2}{6}}$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

La même analyse nous conduit à déterminer généralement $\varphi(r,n)$, quel que soit le nombre i. En le supposant moindre que l'unité, on satisfera à l'équation différentielle (u) en $\varphi(r,n)$, par la supposition de

$$\varphi(r,n) = \int \frac{dx}{x^{1-i}} \cdot c^{-\frac{x^2}{6}} (a.\cos.\, rx + b.\sin.\, rx)$$

a et b étant des constantes que l'on déterminera ainsi.

En supposant $r = \sqrt{n}$, on aura

$$\varphi\,(r, n) = \frac{\Delta^n.\ s^{n-i}}{(1-i).\,(2-i)\ldots\ldots(n-i)}$$

s croissant de l'unité, et étant nul à l'origine. La formule (u') de la page 82 des *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1782, donne, en ne considérant que son premier terme,

$$\Delta^n.\ s^{n-i} = (1-i).\,(2-i)\ldots\ldots(n-i)\ \frac{2^i}{n^i};$$

on a donc, dans le cas de $r = \sqrt{n}$,

$$\varphi\,(r, n) = \frac{2^i}{n^i}$$

Si l'on fait ensuite, dans l'expression précédente de $\varphi\,(r, n)$, $r = \sqrt{n}$ et $x = \frac{x'}{\sqrt{n}}$, elle devient

$$\frac{1}{n^{\frac{i}{2}}}\int\frac{dx'}{x'^{1-i}}.\ c^{-\frac{x'^2}{6n}}.\,(a.\ \cos.\ x' + b.\ \sin.\ x');$$

or on a par les formules du tome cité du *Journal de l'École polythecnique* page 250,

$$\int\frac{dx'}{x'^{1-i}}.\ \cos.\ x' = \frac{k}{i}.\ \cos.\ \frac{i\pi}{2}$$
$$\int\frac{dx'}{x^{1-i}}.\ \sin.\ x' = \frac{k}{i}.\ \sin.\ \frac{i\pi}{2}$$

k étant l'intégrale $\int dt.\ c^{-t^{\frac{1}{i}}}$, prise depuis t nul jus-

qu'à t infini; en prenant donc pour l'unité, le facteur $c^{-\frac{x'^2}{6n}}$, comme on le peut lorsque n est un très-grand nombre; l'expression de $\varphi\,(r, n)$ devient

$$\frac{k}{i.\,n^{\frac{1}{2}}}.\left(a.\ cos.\ \frac{i\pi}{2} + b.\ sin.\ \frac{i\pi}{2}\right)$$

En l'égalant à $\frac{2^i}{n^i}$ on aura

$$a.\ cos.\ \frac{i\pi}{2} + b.\ sin.\ \frac{i\pi}{2} = \frac{i.2^i}{k.\ n^{\frac{i}{2}}}$$

En faisant ensuite $r = -\sqrt{n}$ dans $\varphi\,(r, n)$, il se réduit à zéro; mais alors, dans son expression en intégrale définie, $sin.\ rx$ se change dans $-\ sin.\ x\sqrt{n}$. De là il est facile de conclure que l'on a

$$0 = a\ cos.\ \frac{i\pi}{2} - b.\ sin.\ \frac{i\pi}{2}$$

par conséquent

$$a = \frac{i.2^i}{2\ k.\ n^{\frac{i}{2}}.\ cos.\ \frac{i\pi}{2}};\quad b = \frac{i.2^i}{2\ k.\ n^{\frac{i}{2}}.\ sin.\ \frac{i\pi}{2}}$$

On a donc

$$\varphi\,(r, n) = \frac{i.\ 2^i}{k.\ n^{\frac{i}{2}}.\ sin.\ i\pi}:$$

$$\int\left(sin.\ \frac{i\pi}{2}.\ cos.\ rx + cos.\ \frac{i\pi}{2}.\ sin.\ rx\right)\ \frac{dx.\ c^{-\frac{x^2}{6}}}{x^{1-i}}$$

ou

$$\varphi\,(r,n) = \frac{i\cdot 2^{i}}{k.\,n^{\frac{i}{2}}\,.\,sin.\,i\pi}\int\frac{dx.\,c^{-\frac{x^2}{6}}.\,sin.\left(rx+\frac{i\pi}{2}\right)}{x^{1-i}}$$

X.

On peut obtenir fort simplement tous les résultats qui précèdent, par l'analyse suivante.

Considérons généralement l'intégrale $\int\frac{c^{-sx}\,dx}{x^{n-i+1}}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; $n-i$ étant égal à $i'+\frac{1}{2f}$, i' exprimant un nombre entier positif ou zéro. En intégrant par parties, depuis $x=\alpha$ jusqu'à x infini, on a

$$\frac{(-1)^{i'}.\,c^{-s\alpha}}{\frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right).\left(\frac{1}{2f}+2\right)\ldots.(n-i).\,\alpha^{\frac{1}{2f}}}\left\{\begin{aligned}&s^{i'}-\frac{1}{2f}.\frac{s^{i'-1}}{\alpha}+\frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right).\frac{s^{i'-2}}{\alpha^2}\ldots..\\&+(-1)^{i'}.\frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right)\ldots(n-i).\frac{1}{\alpha^{i'}}\end{aligned}\right\}$$

$$+\frac{(-1)^{i'+1}.\,s^{i'+1}\int\frac{dx.\,c^{-sx}}{x^{\frac{1}{2f}}}}{\frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right)\ldots.(n-i)}$$

On a généralement

$$\Delta^{n}.\,\frac{c^{-s\alpha}}{\alpha^{n-e}}=0,$$

Lorsqu'on suppose α infiniment petit; car si l'on développe $c^{-s\alpha}$ dans une série ordonnée par rapport aux puissances de $s\alpha$; toutes les puissances de s inférieures

à n, deviennent nulles dans la fonction $\Delta^n . \frac{c^{-s\alpha}}{\alpha^{n-e}}$; et toutes les puissances égales à n ou supérieures sont nulles par la supposition de α infiniment petit. Il suit de là que $\Delta^n . \int \frac{c^{-sx} . dx}{x^{n-i+1}}$ est égal à

$$\frac{(-1)^{i'+1} . \Delta^n . \left\{ s^{i'+1} . \int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{\frac{1}{2f}}} \right\}}{\frac{1}{2f} . \left(\frac{1}{2f} + 1\right) \ldots\ldots (n-i)}$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini; or on a

$$\Delta^n . \int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{n-i+1}} = \int \frac{dx . c^{-sx} . (c^{-x} - 1)^n}{x^{n-i+1}};$$

en faisant ensuite $x = \frac{x'}{s}$, on a

$$\int \frac{dx . c^{-sx}}{x^{\frac{1}{2f}}} = s^{\frac{1}{2f}-1} . \int \frac{dx' . c^{-sx'}}{x'^{\frac{1}{2f}}}$$

les deux intégrales étant prises depuis x et x' nuls, jusqu'à leurs valeurs infinies; on a donc

$$\int \frac{dx . c^{-sx} . (c^{-x} - 1)^n}{x^{n-i+1}} = \frac{(-1)^{i'+1} \Delta^n . s^{n-i} \int \frac{dx' . c^{-sx'}}{x'^{\frac{1}{2f}}} .}{\frac{1}{2f} . \left(\frac{1}{2f} + 1\right) \ldots\ldots (n-i)}$$

ce qui donne

$$\Delta^{n}.\, s^{n-i} = \frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right)\ldots\ldots(n-i).\,(-1)^{i'+1}.$$

$$\frac{\int dx.\, c^{-sx}.\,(c^{-x}-1)^{n}}{\int \frac{dx'.\, c^{-x'}}{x'^{\frac{1}{2f}}}}$$

équation qui est la même que la formule (μ''') citée, des *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1782, comme il est facile de s'en convaincre.

Supposons $i' = n - 1$, et f un nombre entier positif. Si l'on fait $s = -\frac{n}{2} - \frac{r.\sqrt{n}}{2}$; l'intégrale

$$\int \frac{dx.\, c^{-sx}.\,(c^{-x}-1)^{n}}{x^{n-i+1}}$$

deviendra

$$\int \frac{dx.\, c^{\frac{1}{2}rx.\sqrt{n}}}{x^{\frac{1}{2f}}}.\left\{\frac{c^{-\frac{x}{2}} - c^{\frac{x}{2}}}{x}\right\}^{n}.$$

Faisons $x = 2x'\sqrt{-1}$, et alors cette dernière intégrale se transforme dans la suivante

$$\frac{(-1)^{n}.\, 2\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^{\frac{1}{2f}}}.\int \frac{dx'}{x'^{\frac{1}{2f}}}.\left\{\cos.\, rx'\sqrt{n} + \sqrt{-1}.\, \sin.\, rx'\sqrt{n}\right\}.\left(\frac{\sin.\, x'}{x'}\right)^{n};$$

on a donc

$$\Delta^{n}.\, s^{n-i} = \frac{1}{2f}.\left(\frac{1}{2f}+1\right)\ldots\ldots(n-i).\ \frac{2\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^{\frac{1}{2f}}}.$$

$$\left.\frac{\displaystyle\int\frac{dx'}{x'^{\frac{1}{2f}}}.\left(\cos.rx'\sqrt{n}+\sqrt{-1}.\sin.rx'\sqrt{n}\right).\left(\frac{\sin.\ x'}{x'}\right)^{n}}{\displaystyle\int\frac{dx'.\ c^{-x'}}{x'^{\frac{1}{2f}}}}\right\};\ (x)$$

les intégrales étant prises depuis x' nul jusqu'à $x' = \pm\infty$.

Supposons d'abord f infini. On a généralement $k^{\frac{1}{2f}} = 1$, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{2f}$; car si l'on fait $k^{\frac{1}{2f}} = 1 + q$; en prenant les logarythmes, on aura $\frac{1}{2f}\log.k = \log.(1+q)$; ce qui donne $q = \frac{1}{2f}.\log.k$; cela posé, l'équation précédente devient

$$2^{n-1+\frac{1}{2f}}.\Delta^{n}.s^{n-1+\frac{1}{2f}} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2f}.$$

$$2^{n}\int dx'.\left(\sqrt{-1}.\cos.rx'\sqrt{n}-\sin.rx'\sqrt{n}\right).\left(\frac{\sin.\ x'}{x'}\right)^{n};\ (z)$$

or on a avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$2^{n-1+\frac{1}{2f}}.\Delta^{n}.s^{n-1+\frac{1}{2f}}$$

$$= 1^{\frac{1}{2f}}.\left\{\begin{array}{l}(n-r\sqrt{n})^{n-1+\frac{1}{2f}}\\ -n.(n-r\sqrt{n}-2)^{n-1+\frac{1}{2f}}\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$-(-1)^{\frac{1}{2f}} \left\{ \begin{array}{l} (n - r\sqrt{n})^{n-1+\frac{1}{2f}} \\ -n.(n - r\sqrt{n} - 2)^{n-1+\frac{1}{2f}} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$1^{\frac{1}{2f}}$ est susceptible de $2f$ valeurs dont une seule est réelle et égale à l'unité. On obtient ces valeurs en observant que

$$1 = \cos. 2l\pi + \sqrt{-1}. \sin. 2l\pi$$

et qu'ainsi

$$1^{\frac{1}{2f}} = (\cos. 2l\pi + \sqrt{-1}. \sin. 2l\pi)^{\frac{1}{2f}}$$
$$= \cos. \frac{2l\pi}{2f} + \sqrt{-1}. \sin. \frac{2l\pi}{2f};$$

l étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $l = 1$ jusqu'à $l = 2f$. Pour avoir la valeur réelle de $1^{\frac{1}{f}}$ il faut donner à l, sa plus grande valeur $2f$. Alors la partie imaginaire de l'expression précédente de $\Delta^n. s^{n-1+\frac{1}{2f}}$, est produite par la partie affectée de $(-1)^{\frac{1}{2f}}$. Cette dernière quantité a pareillement $2f$ valeurs représentées par $\cos. \frac{(2l-1)\pi}{2f} + \sqrt{-1}. \sin. \frac{(2l-1)\pi}{2f}$, l pouvant encore s'étendre depuis $l = 1$ jusqu'à $l = 2f$. Mais ayant choisi $l = 2f$, pour avoir $1^{\frac{1}{2f}}$, nous de-

vons pareillement choisir cette valeur de l, pour déterminer $(-1)^{\frac{1}{2f}}$, et alors la partie imaginaire de $(-1)^{\frac{1}{2f}}$, devient $\sqrt{-1}.\ sin.\ \frac{(4f-1)\pi}{2f}$, et dans le cas de f infini, elle devient $-\sqrt{-1}.\ \frac{\pi}{2f}$; ce qui donne, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{f^2}$,

$$\frac{\pi.\sqrt{-1}}{2f}.\left[(n+r\sqrt{n})^{n-1}-n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-1}+\text{etc.}\right]$$

pour la partie imaginaire de l'expression précédente de $2^{n-1+\frac{1}{2f}}.\ \Delta^n.s^{n-1+\frac{1}{2f}}$. En l'égalant à la partie imaginaire de l'expression donnée par l'équation (z), on aura

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n-1}-n.\ (n+r\sqrt{n}-2)^{n-1}+\text{etc.}}{1.2.3\ldots\overline{n-1}.\ 2^n}$$

$$=\frac{1}{\pi}.\int dx'.\ cos.\ r\,x'\sqrt{n}.\ \left(\frac{sin.\ x'}{x'}\right)^n$$

Le second membre de cette équation étant intégré par la méthode de l'art. III, on aura les mêmes résultats que ci-dessus.

Supposons maintenant dans l'équation (x), $f=1$; on aura, en y changeant x' en $-x''$ dans le numérateur du second membre, et observant que l'intégrale $\int\frac{dx'}{\sqrt{x'}}\,c^{-x'}$ du dénominateur est égale à $\sqrt{\pi}$

$$\Delta^{n} . s^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2^{n-1}.\sqrt{2\pi}}.(-1)^{\frac{1}{4}}.$$

$$\int \frac{dx''}{\sqrt{x''}}.(\cos. r x''. \sqrt{n} - \sin. r x''. \sqrt{n}). \left(\frac{\sin. x''}{x''}\right)^{n}.$$

Ici les intégrales doivent être prises depuis x'' nul jusqu'à x'' infini. On a en excluant les puissances des quantités négatives

$$2^{n-\frac{1}{2}} \Delta^{n}. s^{n-\frac{1}{2}} = (n - r\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}}$$

$$- n. (n - r\sqrt{n} - 2)^{n-\frac{1}{2}} + \text{etc.}$$

$$-\sqrt{-1}. \left\{ \begin{array}{l} (n + r\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}} \\ \quad - n.(n + r.\sqrt{n} - 2)^{n-\frac{1}{2}} \\ \quad + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, et prenant $\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, au lieu de $(-1)^{\frac{1}{4}}$; on aura, en comparant les quantités réelles aux réelles, et les imaginaires aux imaginaires, la double équation

$$\frac{(n \pm r.\sqrt{n})^{n-\frac{1}{2}} - n.(n \pm r - 2)^{n-\frac{1}{2}} + \text{etc.}}{1.3.5 \ldots \ldots (2n-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int \frac{dx''}{\sqrt{x''}}.(\cos. r x''.\sqrt{n} \pm \sin. r x''.\sqrt{n}).\left(\frac{\sin. x''}{x''}\right)^{n}$$

si l'on réduit en série, $\frac{\sin. x''}{x''}$, et si l'on fait $x'' = \frac{t}{\sqrt{n}}$, on aura $1 - \frac{t^2}{6n} + \text{etc.}$; on pourra donc substituer $c^{\frac{-t^2}{6}}$, au lieu de $\left(\frac{\sin. x''}{x''}\right)^n$; et alors le second membre de l'équation précédente devient

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}.\sqrt{2\pi}}.\int\frac{dt}{\sqrt{t}}.(\cos. rt \pm \sin. rt).c^{\frac{-t^2}{6}}$$

ce qui coïncide avec les résultats de l'article précédent.

En généralisant cette analyse, on parviendra facilement à cette expression rigoureuse, i étant moindre que l'unité, et les puissances des quantités négatives étant exclues,

$$\frac{1}{(1-i).(2-i)\ldots\ldots(n-i)2^{n-i}}\left\{\begin{array}{l}(n+r\sqrt{n})^{n-i} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n-i}\\ +\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.2}.(n+r\sqrt{n}-4)^{n-i}\\ -\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{i.2^i}{k.\sin. i\pi}.\int\frac{dx}{x^{1-i}}.\sin.\left(rx\sqrt{n}+\frac{i\pi}{2}\right).\left(\frac{\sin. x}{x}\right)^n$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et k étant l'intégrale $\int dx.\, c^{-x^{\frac{1}{i}}}$ prise dans les mêmes limites. On aura par des différenciations successives, les valeurs relatives à i plus grand que l'unité.

RECHERCHES

SUR

DIVERSES SORTES D'INTÉGRALES DÉFINIES.

Par M. Legendre.

Lu le 13 novembre 1809.

Je traite dans ce mémoire de diverses sortes d'intégrales définies dont Euler s'est occupé dans plusieurs de ses ouvrages, et sur lesquelles il a démontré un grand nombre de théorêmes intéressans. Cette théorie est une de celles qui appartiennent exclusivement à Euler; il semble en effet que les autres géomètres qui en ont fait mention, se sont contentés de présenter les résultats d'Euler, sans y ajouter rien d'essentiel; et je crois être le premier qui ait donné quelques théorêmes nouveaux sur cette matière, dans mon mémoire sur les transcendantes elliptiques, publié en 1794; mais comme ces théorêmes n'étoient pas alors l'objet principal que j'avois en vue, je n'ai fait presque que les indiquer.

Ayant eu occasion depuis de reprendre la même matière, j'ai reconnu qu'elle pouvoit être liée avec d'autres du même genre, et que de ce rapprochement il ré-

sultoit quelques théorêmes nouveaux, et des approximations d'un usage facile.

C'est cet ensemble de choses que je présente ici ; la plus grande partie des théorêmes ou des méthodes que j'ai rassemblés est déjà connue, et appartient à Euler ; mais j'espère que ce que j'y ai ajouté ne sera pas sans intérêt pour les géomètres, et pourra contribuer au progrès de la science.

1. A l'exemple d'Euler, nous désignerons par $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Cette intégrale est en outre fonction de n, mais nous regardons n comme constant dans l'expression $\left(\frac{p}{q}\right)$, et notre but est de comparer entre elles les différentes valeurs de $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, peut réduire au moindre nombre possible les transcendantes que cette expression représente.

Nous observerons d'abord que les deux exposans p et q, qui sont toujours supposés des entiers positifs, peuvent être échangés entre eux. En effet, si on fait $x^n = 1 - y^n$, on aura

$$\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\frac{y^{q-1}\,dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}}$$

et la transformée en y devra être intégrée depuis $y = 1$, jusqu'à $y = 0$. En changeant son signe elle devra être

intégrée depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$; et comme alors on peut mettre x à la place de y, on aura

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

ou suivant notre notation.

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right), \qquad (a)$$

ce qui est la propriété énoncée.

2. Il faut faire voir maintenant que si dans la formule $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'un des deux nombres p et q est plus grand que n, la formule se ramène aisément au cas où p et q sont compris l'un et l'autre dans les limites 1 et n. Pour cela soit $Z = x^k (1 - x^n)^r$, on aura la différentielle

$$dZ = kx^{k-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)\,x^{k+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1}$$

d'où l'on tire en intégrant

$$Z = k\int x^{k-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1} - (k+rn)\int x^{k+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1}$$

Donc si on prend les intégrales entre les limites $x = 0$, $x = 1$, et qu'en même temps on suppose $k > 0$, et $r > 0$, afin que Z s'évanouisse dans les deux limites, on aura

$$\int x^{k+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1} = \frac{k}{k+rn}\int x^{k-1}\,dx\,(1-x^n)^{r-1}.$$

soit donc $k + n = p$ et $r = \frac{q}{n}$, il viendra

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}.\left(\frac{p-n}{q}\right) \qquad (b)$$

Au moyen de cette formule toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans laquelle on a $p > n$, se réduira successivement aux fonctions $\left(\frac{p-n}{q}\right)$, $\left(\frac{p-2n}{q}\right)$, etc. jusqu'à un terme $\left(\frac{p-in}{q}\right)$ ou $\left(\frac{p'}{q}\right)$, dans lequel p' sera le reste de la division de p par n.

Arrivé à ce terme, si de son côté q est plus grand que n, la fonction $\left(\frac{p'}{q}\right)$, qui est la même que $\left(\frac{q}{p'}\right)$, se réduira successivement aux fonctions $\left(\frac{q-n}{p'}\right)$, $\left(\frac{q-2n}{p'}\right)$, etc. jusqu'à un terme $\left(\frac{q'}{p'}\right)$ ou $\left(\frac{p'}{q'}\right)$, dans lequel q' sera le reste de la division de q par n.

Delà on voit qu'on peut toujours supposer la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ réduite à une forme où p et q soient compris tous deux dans la suite $1, 2, 3 \ldots\ldots n$.

3. Cela posé, il y a deux cas principaux où on peut trouver immédiatement la valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$; savoir lorsque n est égal à l'un des deux nombres p et q ou à leur somme.

Soit, 1°. $q = n$, on aura immédiatement $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p} + C$, intégrale qui, étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, se réduit à $\frac{1}{p}$; d'où résulte

$$\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p} \qquad (c)$$

Soit, 2°. $p+q=n$, ou $p=a$, $q=n-a$, on aura

$\left(\frac{}{q}\right)=\int x^{a-1}\,dx\,(1-x^n)^{-\frac{a}{n}}$; faisant $1-x^n=x^n z^n$

on aura la transformée rationnelle

$$\left(\frac{p}{q}\right) \text{ ou } \left(\frac{a}{n-a}\right)=\int\frac{z^{n-a-1}\,dz}{1+z^n};$$

intégrale qui doit être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; or par les formules connues (Eul. *Calc. int.* tom. I, pag. 252), cette intégrale $=\frac{\pi}{n\sin.\frac{a\pi}{n}}$. Donc si on fait $\frac{\pi}{n}=\omega$, on aura

$$\left(\frac{a}{n-a}\right)=\frac{\omega}{\sin a\omega}. \qquad \text{(d)}$$

Excepté ces deux cas généraux, toutes les quantités désignées par $\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des transcendantes plus ou moins composées, selon la valeur de n, et ne sont point susceptibles d'une évaluation exacte. Mais pour chaque valeur de n on peut exprimer toutes ces transcendantes au moyen d'un petit nombre d'entre elles, et c'est l'objet des recherches suivantes.

4. Observons d'abord qu'en mettant $p+n$ à la place de p, l'équation (b) donne

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+q}{p}\cdot\left(\frac{p+n}{q}\right).$$

On auroit semblablement

$$\left(\frac{p+n}{q}\right)=\frac{p+q+n}{p+n}\cdot\left(\frac{p+2n}{q}\right),$$

$$\left(\frac{p+2n}{q}\right)=\frac{p+q+2n}{p+2n}\cdot\left(\frac{p+3n}{q}\right)$$

etc.

Donc en général, i étant un nombre entier positif à volonté, on aura

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{p+q+n}{p+n} \cdot \frac{p+q+2n}{p+2n} \cdots \frac{p+q+in}{p+in} \cdot \left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right),$$

mettant $p+r$ au lieu de p, on aura semblablement

$$\left(\frac{p+r}{q}\right) = \frac{p+q+r}{p+r} \cdot \frac{p+q+r+n}{p+r+n} \cdot \frac{p+q+r+2n}{p+r+2n} \cdots \frac{p+q+r+in}{p+r+in}, \left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)$$

Divisons ces deux formules l'une par l'autre, et faisons, pour abréger,

$$M^{\circ} = \frac{(p+q)\ (p+r)}{p.\ (p+q+r)}$$

$$M' = \frac{(p+q+n)\ (p+r+n)}{(p+n)\ (p+q+r+n)}$$

$$M'' = \frac{(p+q+2n)\ (p+r+2n)}{(p+2n)\ (p+q+r+2n)}$$

etc.

nous aurons

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = M^{\circ}\ M'\ M'' \ldots\ M^{(i)}\ \frac{\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)}$$

Supposons r positif et $< n$; alors il est clair que la quantité $\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)$ sera plus petite que $\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)$ et plus grande que $\left(\frac{p+\overline{i+2}.n}{q}\right)$. Car si on considère diverses formules $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui ne diffèrent que par l'exposant p; comme ces formules présentent chacune l'intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, d'une différentielle

$\frac{x^{p-1}\,dx}{X}$ dont le dénominateur est le même pour toutes, il est évident que l'intégrale sera d'autant plus petite que p sera plus grand.

Mais la formule (b) donne

$$\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right) = \frac{p+q+\overline{i+1}.n}{p+\overline{i+1}.n}\cdot\left(\frac{p+\overline{i+2}.n}{q}\right)$$

Donc on a d'une part le rapport

$$\frac{\left(\frac{p+\overline{i+1}.n}{q}\right)}{\left(\frac{p+r+\overline{i+1}.n}{q}\right)} > 1$$

et de l'autre ce même rapport $< \frac{p+q+\overline{i+1}.n}{p+\overline{i+1}.n}$. Si l'on veut donc que ce rapport soit compris entre les limites 1 et $1+\frac{1}{k}$, il faudra prendre $i+1 > \frac{qk-p}{n}$, et alors on aura

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = M^{\circ}\,M'\,M''\ldots\ldots M^{(i)}\left(1+\frac{1}{k'}\right)$$

k' étant plus grand que k.

On sait par cette équation combien on approche du rapport de $\left(\frac{p}{q}\right)$ à $\left(\frac{p+r}{q}\right)$, en continuant le produit $M^{\circ}\,M'\,M''\ldots$ jusqu'à un terme $M^{(i)}$; et il est clair qu'en continuant ce produit à l'infini, on aura la vraie valeur de ce rapport, laquelle sera

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)} = M^{\circ}\,M'\,M''\,M'''\ \text{etc.}$$

Maintenant si dans cette équation on échange entre elles les lettres q et r, les quantités M°, M', M'', etc. resteront les mêmes, de sorte qu'on aura encore

$$\frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{p+q}{r}\right)} = M^\circ\ M'\ M''\ M'''\ \text{etc.}$$

Donc par la comparaison de ces équations on obtient la formule générale

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) \cdot \left(\frac{p+r}{q}\right) \qquad (e)$$

Cette formule, dont la découverte appartient à Euler, est une sorte d'équation aux différences finies, qui renferme presque toute la théorie des transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$. Et d'abord nous en allons déduire l'expression générale des quantités $\left(\frac{p}{q}\right)$.

5. Les formules (c) et (d) donnent les valeurs exactes de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ toutes les fois que l'un des deux nombres p et q ou leur somme est égale à n. Supposons maintenant qu'on connoisse de plus toutes les valeurs de $\left(\frac{p}{q}\right)$ lorsque $p + q = n - 1$, et désignons en général par A_a la fonction $\left(\frac{n-a-1}{a}\right)$, en sorte qu'on ait

$$\left(\frac{n-a-1}{a}\right) = A_a \qquad (f)$$

On aura donc successivement $\left(\frac{n-2}{1}\right) = A_1$, $\left(\frac{n-3}{2}\right)$

$= A_2$, $\left(\frac{n-n}{3}\right) = A_3$, etc.; et parce que $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$, on aura aussi $\left(\frac{1}{n-2}\right) = A_1$, $\left(\frac{2}{n-3}\right) = A_2$, etc.; donc en général

$$A_{(n-1-a)} = A_a. \qquad (g)$$

D'où l'on voit que le nombre des auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc., se réduit toujours à $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair.

Par exemple si $n = 7$, il y aura trois auxiliaires $A_1 = \left(\frac{5}{1}\right)$, $A_2 = \left(\frac{4}{2}\right)$, $A_3 = \left(\frac{3}{3}\right)$; puisqu'on auroit $A_4 = \left(\frac{2}{4}\right) = A_2$, et $A_5 = \left(\frac{1}{5}\right) = A_1$.

Si $n = 8$, il n'y aura encore que trois auxiliaires A_1, A_2, A_3; car on auroit en vertu de l'équation (g), $A_4 = A_3$, $A_5 = A_2$, $A_6 = A_1$.

Cela posé au moyen des équations (c), (d), (e), et des auxiliaires données par l'équation (f), nous pourrons trouver l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans deux cas généraux, 1°. lorsque $p + q$ est $< n$; 2°. lorsque $p + q$ est $> n$. Voici comment on y parvient.

6. L'équation (e) donne immédiatement $\left(\frac{n-a-1}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{1}\right) = \left(\frac{n-a-1}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a}{a}\right)$; substituant dans celle-ci les valeurs connues par les équations (d) et (g), on aura

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \frac{A_a \sin a\omega}{\sin \omega} \qquad (h)$$

Ainsi on connoît toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle l'un des deux nombres p et q est égal à l'unité ; si pour plus de simplicité on met a à la place de $n - a - 1$, on aura pour le même objet la formule

$$\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{A_a \sin (a+1)\,\omega}{\sin \omega} \qquad \text{(i)}$$

La même équation (e) donne $\left(\frac{n-a-2}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{1}\right) = \left(\frac{n-a-2}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a-1}{1}\right)$, et substituant les valeurs connues, il en résulte :

$$\left(\frac{n-a-2}{a}\right) = \frac{A_a A_{a+1}}{A_1} \cdot \frac{\sin (a+1)\,\omega}{\sin \omega}$$

Ainsi on a la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle $p + q = n - 2$.

De l'équation (e) on déduit encore immédiatement, $\left(\frac{n-a-3}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{1}\right) = \left(\frac{n-a-3}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a-2}{a}\right)$; ce qui donne.

$$\left(\frac{n-a-3}{a}\right) = \frac{A_a A_{a+1} A_{a+2}}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin (a+1)\,\omega \sin (a+2)\,\omega}{\sin \omega \sin 2\omega};$$

Et ainsi on connoît la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle $p + q = n - 3$.

En général l'équation (e) donne

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-k}{1}\right) = \left(\frac{n-a-k}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a-k+1}{a}\right),$$

et en mettant les valeurs tirées de l'équation (h) il en résulte :

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right) = \frac{A_{a+k-1} \sin (a+k-1)\,\omega}{A_{k-1} \sin (k-1)\,\omega} \cdot \left(\frac{n-a-k-1}{a}\right)$$

Donc on aura en général

$$\left(\frac{n-a-k}{a}\right) = \frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{a+k-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{k-1}} \cdot \frac{\sin (a+1)\omega \sin (a+2)\omega \ldots \sin (a+k-1)\omega}{\sin \omega \sin 2\omega \ldots \sin (k-1)\omega} \ldots \text{(k)}$$

C'est la valeur de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle $p + q$ est moindre que n.

7. Pour avoir l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ lorsque $p + q$ est plus grand que n, observons que l'équation (e) donne aussi

$$\left(\frac{n-a+k}{a}\right) \cdot \left(\frac{n+k}{1}\right) = \left(\frac{n-a+k}{1}\right) \left(\frac{n-a+k+1}{a}\right)$$

Or par l'équation (b) on a

$$\left(\frac{n+k}{1}\right) = \frac{k}{k+1} \cdot \left(\frac{k}{1}\right),$$

par l'équation (i) on a

$$\left(\frac{k}{1}\right) = \frac{A_k \sin (k+1)\omega}{\sin \omega},$$

et par l'équation (h) on a

$$\left(\frac{n-a+k}{1}\right) = \frac{A_{a-k-1} \sin (a-k-1)\omega}{\sin \omega};$$

substituant toutes ces valeurs il viendra

$$\left(\frac{n-a+k+1}{a}\right) = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{A_k \sin (k+1)\omega}{A_{a-k-1} \sin (a-k-1)\omega} \cdot \left(\frac{n-a+k}{a}\right) \ldots \text{(l)}$$

Tout se réduit donc à trouver la valeur de $\left(\frac{n-a+1}{a}\right)$.

Or l'équation (e) donne

$$\left(\frac{n-a}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{1}\right) = \left(\frac{n-a}{1}\right) \cdot \left(\frac{n-a+1}{a}\right),$$

substituant les valeurs connues il viendra

$$\left(\frac{n-a+1}{a}\right)=\frac{1}{A_{a-1}}\cdot\frac{\omega\sin\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega}. \qquad (\mathrm{m})$$

Delà et de l'équation (l) on déduit successivement

$$\left(\frac{n-a+2}{a}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{A_1}{A_{a-1}A_{a-2}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin 2\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega\sin(a-2)\omega},$$

$$\left(\frac{n-a+3}{a}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{A_1 A_2}{A_{a-1}A_{a-2}A_{a-3}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin 2\omega\sin 3\omega}{\sin a\omega\sin(a-1)\omega\sin(a-2)\omega\sin(a-3)\omega},$$

et en général

$$\left(\frac{n-a+k}{a}\right)=\frac{1}{k}\cdot\frac{A_1 A_2\ldots A_{k-1}}{A_{a-1}A_{a-2}\ldots A_{a-k}}\cdot\frac{\omega\sin\omega\sin 2\omega\ldots\sin k\omega}{\sin a\omega\sin(a+1)\omega\ldots\sin(a-k)\omega}\ldots \qquad (\mathrm{n})$$

Cette formule donne la valeur de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque $p+q$ surpasse n; ainsi en la réunissant à la formule (k), on a généralement l'expression de toute fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, en supposant seulement connues les fonctions semblables pour lesquelles $p+q=n-1$, et on a déjà remarqué que le nombre de ces auxiliaires est $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair.

8. La formule (n) pourroit être regardée comme une suite de la formule (k); et on n'auroit ainsi qu'une seule et même formule pour toutes les valeurs de p et q; mais alors on auroit besoin de nouvelles auxiliaires A_0, A_{-1}, A_{-2}, etc., et il faudroit en fixer les valeurs ainsi : $A_0=\frac{\omega}{\sin 0\omega}$, ou plutôt i étant infiniment petit $A_i=\frac{\omega}{\sin i\omega}=\frac{1}{i}$, $A_{-1}=-A_1$, $A_{-2}=-A_2$, etc. C'est pour éviter l'embarras de ces substitutions,

surtout dans le cas de A_0, que nous avons donné les deux formules séparément.

Il est assez étonnant que l'expression générale des fonctions$\left(\frac{p}{q}\right)$ ait échappé à Euler; on voit cependant qu'il s'étoit occupé spécialement de cette recherche, par le passage du tom. V des *Nova acta Pétropol.*, pag. 125, où il dit: *Neque tamen hinc adhuc elucet quànam lege omnes determinationes progrediantur*, *quandoquidem valores certarum famularum continuo magis evadunt complicati.*

Nous remarquerons au reste que les formules (k) et (n) qui contiennent l'expression générale dont il s'agit, peuvent être regardées comme l'intégrale complette de l'équation aux différences finies (e); de sorte qu'on ne peut tirer de cette équation aucune conséquence qui ne soit contenue dans les formules (k) et (n). C'est ce qu'il seroit facile de démontrer par les méthodes que l'on suit dans ce genre d'analyse, et qui, pour la plupart, ont été indiquées par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, an 1775.

9. Voici maintenant quelques formules particulières qui méritent d'être citées. De l'équation (e) on déduit les deux suivantes,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p+q}{n-p-q}\right)=\left(\frac{p}{n-p-q}\right)\cdot\left(\frac{n-q}{q}\right),$$

$$\left(\frac{p}{n-p-q}\right)\cdot\left(\frac{n-q}{n-p}\right)=\left(\frac{p}{n-p}\right)\cdot\left(\frac{n}{n-p-q}\right);$$

multipliant ces deux équations entre elles, et mettant

dans le produit les valeurs connues par les formules (c) et (d), on aura

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{n-p}{n-q}\right) = \frac{\varpi \sin (p+q) \varpi}{(n-p-q) \sin p \varpi \sin q \varpi}; \qquad (p)$$

d'où il suit que la valeur de $\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$ se déduit immédiatement de celle de $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui en est en quelque sorte le complément. On a en particulier

$$\left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\frac{n-a}{n-a}\right) = \frac{2 \varpi \cot a \varpi}{n-2a}. \qquad (q)$$

Ainsi connoissant les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$ lorsque a n'excède pas $\frac{1}{2} n$, on en déduit les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$ lorsque a est plus grand que $\frac{1}{2} n$.

10. Pour examiner plus particulièrement les fonctions de la forme $\left(\frac{a}{a}\right)$, reprenons la valeur primitive de ces fonctions, laquelle est

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \int \frac{x^{a-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

si l'on fait

$$1 - x^n = \frac{z^n}{4 x^n}, \text{ ou } x^n = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(1-z^n)},$$

la transformée sera

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \mp 2^{\frac{-2a}{n}} \int \frac{z^{a-1} dz}{\sqrt{(1-z^n)}};$$

quant aux limites de cette nouvelle intégrale, il faut observer que les valeurs $x^n = 0$, $x^n = \frac{1}{2}$, $x^n = 1$, don-

nent respectivement $z = 0$, $z = 1$, $z = 0$. D'où l'on voit qu'il faut prendre deux fois l'intégrale en z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. Et comme alors rien n'empêche de mettre x à la place de z, on aura

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} \qquad (r)$$

cette intégrale est ainsi réduite à la forme la plus simple dont elle soit susceptible, puisque le radical n'est plus que du second degré.

11. Si dans cette formule on met $n - a$ à la place de a, on aura

$$\left(\frac{n-a}{n-a}\right) = 2^{-1+\frac{2a}{n}} \int \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}};$$

delà et de l'équation (q) résulte cette formule remarquable

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} \cdot \int \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{2\varpi \cot a\varpi}{n-2a}. \qquad (s)$$

12. Puisque les fonctions $\left(\frac{a}{a}\right)$ sont les plus simples entre les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$, non comprises dans les formules (c) et (l), il sembleroit convenable de les substituer aux auxiliaires désignées par A_a, pour exprimer par leur moyen toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Dans cette vue, désignons en général la fonction $\left(\frac{a}{a}\right)$

par M_a ; comme on peut supposer $a < \frac{1}{2} n$, on aura par la formule (k)

$$M_a = \frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{n-a-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{n-2a-1}} \cdot \frac{\sin (a+1)\omega \sin (a+2)\omega \ldots \sin (n-a-1)\omega}{\sin \omega \sin 2\omega \ldots \sin (n-2a-1)\omega};$$

valeur qui, au moyen des équations $A_{n-1-k} = A_k$, $\sin (n-k)\omega = \sin k\omega$, se réduit à cette forme

$$M_a = \frac{A_a A_{a+1} \ldots A_{2a-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{a-1}} \cdot \frac{\sin (a+1)\omega \sin (a+2)\omega \ldots \sin 2a\omega}{\sin \omega \sin 2\omega \ldots \sin a\omega} \ldots \text{(t)}$$

Et on en déduit successivement

$$M_1 = A_1 \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega}$$

$$M_2 = \frac{A_2 A_3}{A_1} \cdot \frac{\sin 3\omega \sin 4\omega}{\sin \omega \sin 2\omega}$$

$$M_3 = \frac{A_3 A_4 A_5}{A_1 A_2} \cdot \frac{\sin 4\omega \sin 5\omega \sin 6\omega}{\sin \omega \sin 2\omega \sin 3\omega};$$

etc.

Ces équations qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= M_1 \cdot \frac{\sin \omega}{\sin 2\omega}, \\ \frac{A_2 A_3}{A_1 A_1} &= \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\sin^2 2\omega}{\sin 3\omega \sin 4\omega}, \\ \frac{A_4 A_5}{A_2 A_2} &= \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{\sin^2 3\omega}{\sin 5\omega \sin 6\omega}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{(u)}$$

serviront à déterminer les auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc. au moyen d'un égal nombre des quantités M_1, M_2, M_3, etc. prises dans l'ordre convenable. On pourra donc exprimer par ces dernières quantités toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n.

Mais il faut observer que ces substitutions ne peu-

vent s'effectuer que pour des valeurs particulières de n, et qu'ainsi par l'emploi des auxiliaires M_a on ne peut parvenir à des formules aussi générales que le sont les formules (k) et (n).

13. Considérons maintenant la formule

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) = \int \frac{x^{n-2a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

si on fait $x^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+z^n)}$, on aura la transformée

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) = 2^{-\frac{2a}{n}} \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}; \qquad \text{(v)}$$

dans laquelle il faudra prendre l'intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, et qui d'ailleurs suppose $a < \frac{1}{2}n$. Mais en vertu des équations (e) et (p), on a

$$\left(\frac{n-2a}{a}\right) \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right) = \left(\frac{\omega}{a \sin 2a\omega}\right)$$

$$\left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right) = \left(\frac{a}{n-a}\right) \cdot \left(\frac{n}{a}\right) = \frac{\omega}{a \sin a\omega}$$

Donc $\left(\frac{a}{a}\right) = 2 \cos a\omega . \left(\frac{n-2a}{a}\right)$, ou en substituant la valeur donnée par l'équation (v)

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos a\omega . \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}. \qquad \text{(x)}$$

Cette formule n'a lieu que lorsque a est $< \frac{1}{2}n$; si a est $> \frac{1}{2}n$, on commencera par prendre la valeur de $\left(\frac{n-a}{n-a}\right)$ laquelle sera

$$\left(\frac{n-a}{n-a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}-1} \cos (n-a)\omega . \int \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$$

et on en déduira celle de $\left(\frac{a}{a}\right)$ au moyen de l'équation (q). On aura ainsi, a étant $> \frac{1}{2}n$:

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{2^{1-\frac{2a}{n}}}{2a-n} \cdot \frac{\varpi}{\sin a\varpi} : \int \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}. \qquad (y)$$

14. Si l'on compare maintenant les équations (r), (x) et (y), on en tire les formules

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} &= \cos a\varpi . \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \\ \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} &= \frac{4\varpi}{(2a-n)\sin 2a\varpi} : \int \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z)}} \end{aligned}\right\} \qquad (z)$$

la première ayant lieu lorsque a est $< \frac{1}{2}n$, et la seconde lorsque a est $> \frac{1}{2}n$.

Lorsque n est impair, si on fait dans la première équation, $x = 1 - y^2$ et $z = y^2 - 1$, les formules intégrales comprises dans les deux membres se réduiront l'une et l'autre à la forme

$$\int \frac{(1-y^2)^{a-1}\,dy}{\sqrt{\left(n - \frac{n.n-1}{1.2}y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}y^4 - \text{etc.}\right)}} :$$

on voit donc que la partie de cette dernière intégrale, prise depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, et la partie prise depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$, sont entre elles :: $\cos\frac{a\varpi}{n} : 1$.

15. Considérons de nouveau la formule

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-q}}},$$

si l'on fait

$$1 - x^n = \frac{x^{2n}}{4z^n},$$

on obtient d'abord

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 2^{1-\frac{2q}{n}} \int x^{p+2q-2n-1}\, dx.\, z^{n-q}.$$

Soit $p = 2a$ et $q = n - a$, on aura

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}} \int z^a.\, \frac{dx}{x},$$

et en achevant les substitutions, il viendra

$$\int \left(z^{a-1}\, dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cdot \left(\frac{2a}{n-a}\right);$$

cela posé, il faut distinguer deux cas selon que a est $< \frac{1}{2}n$ ou $> \frac{1}{2}n$.

Soit 1°. $a < \frac{1}{2}n$, on aura par les formules du n° 13

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = \frac{\varpi}{a \sin 2a\varpi}.\left(\frac{n-2a}{a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}} \frac{\varpi}{a \sin 2a\varpi} : \int \frac{z^{a-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}};$$

donc

$$\int \frac{z^{a-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.\int \left(z^{a-1}\, dz. - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2\varpi}{a \sin 2a\varpi} \ldots (a')$$

Soit 2°. $a > \frac{1}{2}n$, on aura par l'équation (b)

$$\left(\frac{2a}{n-a}\right) = \frac{2a-n}{a}.\left(\frac{2a-n}{n-a}\right);$$

mais en faisant $a = n - c$, on a

$$\left(\frac{2a-n}{n-a}\right) = \left(\frac{n-2c}{c}\right),$$

et par l'équation (v), on a

$$\left(\frac{n-2c}{c}\right) = 2^{-\frac{2c}{n}} \int \frac{z^{c-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

Donc au lieu de l'équation (a′) on aura

$$\int\left(z^{a-1}\, dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2a-n}{2a} \int \frac{z^{n-a-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \ldots \quad (b')$$

Au reste cette dernière équation se vérifie immédiatement au moyen de la fonction $P = z^{a-\frac{1}{2}n}\sqrt{(1+z^n)} - z^a$, qui s'évanouit dans les deux limites, lorsque $z = 0$ et lorsque $z = \infty$; car si on prend la différentielle de cette fonction, et qu'ensuite on l'intègre, on trouvera

$$\int\left(z^{a-1}\, dz - \frac{z^{a+\frac{1}{2}n-1}\, dx}{\sqrt{(1+z^n)}}\right) = \frac{2a-n}{2a} \cdot \int \frac{z^{a-\frac{n}{2}-1}\, dx}{\sqrt{(1+z^n)}},$$

Formule qui ne diffère pas de la précédente, parce qu'en mettant $\frac{1}{z}$ au lieu de z, l'intégrale $\int \frac{z^{a-\frac{1}{2}n-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$ se change en $\int \frac{z^{n-a-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}$, les limites étant toujours $z = 0$, $z = \infty$.

16. Considérons enfin, dans la supposition de n pair, la formule

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right) = \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-a-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

si on fait $x^{-n} = 1 + z^n$, on aura par la substitution

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right) = \int \frac{z^{a-1}\, dz}{\sqrt{(1+z^n)}}. \quad (c)$$

et l'intégrale du second membre devra être prise entre les limites $z = 0$, $z = \infty$.

Maintenant par la combinaison des équations (x) et (c′) on obtient:

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos a\omega \left(\frac{\frac{1}{2}n - a}{a}\right),$$

et par conséquent aussi,

$$\left(\frac{\frac{1}{2}n - a}{\frac{1}{2}n - a}\right) = 2^{\frac{2a}{n}} \sin a\omega \left(\frac{a}{\frac{1}{2}n - a}\right);$$

de ces deux-ci on conclura

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{4a}{n}} \operatorname{cotang} a\omega. \left(\frac{\frac{1}{2}n - a}{\frac{1}{2}n - a}\right). \qquad \text{(d′)}$$

D'où l'on voit que n étant pair, il suffit d'avoir les valeurs de $\left(\frac{a}{a}\right)$ pour tous les cas où a ne surpasse pas $\frac{1}{4}n$, et qu'ainsi le nombre des auxiliaires nécessaires pour déterminer toutes les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, se réduit à $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$, selon que n est de la forme $4m$ ou $4m+2$.

17. A l'aide de l'équation (d′) on trouvera des relations entre les auxiliaires A_1, A_2, A_3, etc. qui réduiront leur nombre comme il vient d'être dit.

Pour cela, reprenons la formule (t),

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{A_a\, A_{a+1} \ldots A_{2a-1}}{A_1\, A_2 \ldots A_{a-1}} \cdot \frac{\sin(a+1)\omega \sin(a+2)\omega \ldots \sin 2a\omega}{\sin\omega \sin 2\omega \ldots \sin a\omega},$$

elle donne, en faisant $n = 2m$,

$$\left(\frac{m-a}{m-a}\right) = \frac{A_{m-a}\, A_{m-a+1} \ldots A_{2m-2a-1}}{A_1\, A_2 \ldots A_{m-a-1}} \cdot \frac{\sin(m-a+1)\omega \sin(m-a+2)\omega \ldots \sin(2m-2a)\omega}{\sin\omega \sin 2\omega \ldots \sin(m-a)\omega}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (d′) et faisant les réductions, dans l'hypothèse $a < \frac{1}{2} m$, on aura généralement

$$\frac{A_a \cdot A_{a+1} \ldots A_{2a-1}}{A_{m-1}\, A_{m-2} \ldots A_{m-a}} = 2^{-\frac{a}{m}} \cdot \frac{\sin (m-1)\,\omega \sin (m-2)\,\omega \ldots \sin (m-a+1)\,\omega}{\sin a\,\omega \sin (a+1)\,\omega \ldots \sin (2a-1)\,\omega} \ldots \text{(e′)}$$

Delà résultent, en faisant successivement $a = 1, 2, 3$, etc. des équations particulières qui peuvent être mises sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l} A_{m-1} = A_1 \cdot 2^{\frac{1}{m}} \sin \omega \\ A_{m-2} = \dfrac{A_2\, A_3}{A_1} \cdot 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 3\,\omega \\ A_{m-3} = \dfrac{A_4\, A_5}{A_2} \cdot 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 5\,\omega \\ A_{m-4} = \dfrac{A_6\, A_7}{A_3} \cdot 2^{1+\frac{1}{m}} \sin 7\,\omega \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \text{(f′)}$$

Elles devront être continuées jusqu'à ce que le nombre en soit $\frac{n-4}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

18. Par exemple, lorsque $n = 12$, il y a cinq auxiliaires $A_1 = (\frac{10}{1})$, $A_2 = (\frac{9}{2})$, $A_3 = (\frac{8}{3})$, $A_4 = (\frac{7}{4})$, $A_5 = (\frac{6}{5})$, entre lesquelles on a ces deux équations

$$A_5 = A_1 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \sin \omega$$

$$A_4 = \frac{A_2\, A_3}{A_1} \cdot 2^{\frac{7}{6}} \sin 3\,\omega.$$

De sorte que le nombre d'auxiliaires nécessaires se réduit à trois, pour lesquelles on peut prendre A_1, A_2, A_3.

Si on préféroit de prendre pour auxiliaires trois des quantités M_a, il faudroit avoir recours aux équations (u), lesquelles donnent

$$A_1 = M_1 \cdot \frac{\sin \omega}{\sin 2\omega}$$
$$\frac{A_2\, A_3}{A_1\, A_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{\sin^2 . 2\omega}{\sin 3\omega \sin 4\omega}$$
$$\frac{A_4\, A_5}{A_2\, A_2} = \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{\sin^2 . 3\omega}{\sin 5\omega \sin 6\omega}.$$

Au moyen de ces équations et des précédentes, observant d'ailleurs qu'on a $\omega = \frac{\pi}{12}$, on trouve

$$A_1 = 2 \sin \omega . M_1$$
$$A_2 = 2^{\frac{1}{6}} \sin \omega . M_2 \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_3 \cos 2\omega}\right)}$$
$$A_3 = 2^{\frac{1}{3}} \sin \omega . M_3 \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_3 \cos 2\omega}\right)}$$
$$A_4 = 2^{\frac{1}{6}} \sin \omega . M_2 \frac{1}{\cos 2\omega}$$
$$A_5 = 2^{\frac{7}{6}} \sin^2 \omega . M_1 .$$

Ces quantités étant connues, si on veut avoir l'une quelconque des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$, par exemple $\left(\frac{5}{9}\right)$, on cherchera d'abord par l'équation (n) sa valeur en fonction de A, laquelle est

$$\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{1}{2} . \frac{A_1}{A_3\, A_4} . \frac{\omega \sin \omega \sin 2\omega}{\sin 5\omega \sin 4\omega \sin 3\omega}.$$

On trouvera ensuite, par la substitution des valeurs connues

$$\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{2\omega \sin \omega}{M_2} . \sqrt{\left(\frac{M_1 \cos 2\omega}{M_3}\right)}.$$

19. Ayant réduit au moindre nombre possible les

transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$, il ne reste plus qu'à faire voir comment on peut trouver par approximation, et d'une manière facile, la valeur de chacune de ces quantités.

Pour cet effet, considérons d'abord la formule

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{2a}{n}} \int \frac{x^{a-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

et soit $\sqrt{(1-x^n)} = 1 - y$, ou $x^n = 2y - y^2$, on aura pour transformée

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{a}{n}} \int \frac{dy}{n} \left(y - \frac{y^2}{2}\right)^{\frac{a}{n}-1};$$

cette différentielle étant développée et intégrée depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, on obtient

$$\left(\frac{a}{a}\right) = 2^{1-\frac{a}{n}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{n-a}{2n} \cdot \frac{a}{n+a} + \frac{n-a.\,2n-a}{2n.\,4n} \cdot \frac{a}{2n+a} \\ \quad + \frac{n-a.\,2n-a.\,3n-a}{2n.\,4n.\,6n} \cdot \frac{a}{3n+a} \\ \quad + \text{etc.} \end{array} \right\} \ldots (g')$$

Formule dont chaque terme est moindre que la moitié du précédent.

20. En général si on veut avoir la valeur approchée de la quantité $\left(\frac{p}{q}\right) = \int \frac{x^{p-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-q}}}$, il faut partager cette intégrale en deux parties, l'une depuis $x^n = 0$, jusqu'à $x^n = \frac{1}{2}$, l'autre depuis $x^n = \frac{1}{2}$, jusqu'à $x^n = 1$.

La première partie étant nommée P, on trouve par les développemens ordinaires

$$P = 2^{-\frac{p}{n}} \left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q.\,2n-q}{2n.\,4n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \text{etc.}\right)$$

Pour avoir la seconde partie que nous nommerons Q, il faut faire $x^n = 1 - y^n$, alors on a

$$\int \frac{x^{p-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = -\int \frac{y^{q-1}\, dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}}$$

et la transformée en y devra être intégrée depuis $y^n = \frac{1}{2}$ jusqu'à $y^n = 0$. Si on change son signe, elle devra être intégrée depuis $y^n = 0$ jusqu'à $y^n = \frac{1}{2}$; on aura donc

$$Q = 2^{-\frac{q}{n}} \left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n} \cdot \frac{1}{n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+q} + \text{etc.} \right)$$

Il ne s'agit plus que de réunir ces deux parties, et on obtient

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 2^{-\frac{p}{n}} \left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q \cdot 3n-q}{2n \cdot 4n \cdot 6n} \cdot \frac{1}{3n+p} + \text{etc.} \right. \\ + 2^{-\frac{q}{n}} \left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n} \cdot \frac{1}{n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p}{2n \cdot 4n} \cdot \frac{1}{2n+q} + \frac{n-p \cdot 2n-p \cdot 3n-p}{2n \cdot 4n \cdot 6n} \cdot \frac{1}{3n+q} + \text{etc.} \right. \end{array} \right\}. \quad (h')$$

Les deux séries comprises dans cette formule sont toujours convergentes, puisque chaque terme est moindre que la moitié du précédent : on obvie ainsi à l'inconvénient que présenteroit la méthode ordinaire, si on vouloit intégrer tout d'un coup la valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ce qui donneroit la suite très-peu convergente :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \cdot 2n-q}{n \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \text{etc.} \quad (i')$$

Au reste, lorsqu'on suppose $p = q = a$, la formule (h') se réduit précisément à la formule (g') trouvée par une autre voie.

21. Il ne sera pas inutile de chercher la valeur de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans le cas où n est très-grand par rapport aux nombres p et q. Pour cela soit $p = \alpha n$, $q = \beta n$, on pourra considérer α et β comme des quantités très-petites du premier ordre, et il faudra développer jusqu'au degré convenable les suites P et Q; on a d'abord en faisant $\frac{1}{2} = c$,

$$P = \frac{2^{-\alpha}}{n\alpha}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1-\beta}{1}.\frac{c\alpha}{1+\alpha} + 1-\beta.\,1-\frac{1}{2}\beta.\,\frac{c^2\alpha}{2+\alpha} \\ \qquad + 1-\beta.\,1-\frac{1}{2}\beta.\,1-\frac{1}{3}\beta.\,\frac{c^3\alpha}{3+\alpha} \\ \qquad + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Développant la série renfermée dans la parenthèse, jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement, et faisant pour abréger

$$A = c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} + \text{etc.}$$

$$B = c + (1 + \tfrac{1}{2})\frac{c^2}{2} + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\frac{c^3}{3} + \text{etc.}$$

$$C = c + \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^3}{3^2} + \frac{c^4}{4^2} + \text{etc.}$$

on aura

$$P = \frac{2^{-\alpha}}{n\alpha}\left[1 + (A - B\beta)\alpha - C\alpha^2\right]$$

Mais on a aussi $2^{-\alpha} = 1 - \alpha l 2 + \frac{1}{2}\alpha^2 (l 2)^2$, etc. et d'ailleurs $A = -\log.(1 - c) = -\log.(1 - \frac{1}{2}) = \log. 2$, de sorte qu'on peut supposer $2^{-\alpha} = 1 - A\alpha + \frac{1}{2}A^2\alpha^2$; ainsi en effectuant les développemens on aura

$$P = \frac{1}{n\alpha}\left[1 - B\beta\alpha - (C + \tfrac{1}{2}A^2)\alpha^2\right]$$

On aura semblablement

$$Q = \frac{1}{n\,6}\left[1 - B\,\alpha\,6 - (C + \tfrac{1}{2}A^2)\,6^2\right];$$

donc par la somme de ces quantités on trouve

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6} - (B + C + \tfrac{1}{2}A^2)(\alpha + 6)\right]$$

ou

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{n\,q}\left[1 - (B + C + \tfrac{1}{2}A^2)\,\frac{p\,q}{n^2}\right].$$

22. Il reste à trouver la valeur de $B + C$, et pour cela nous considèrerons pour un moment B et C comme des fonctions d'une variable c; nous aurons d'abord

$$B - C = \frac{c^2}{2} + (1 + \tfrac{1}{2})\frac{c^3}{3} + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\frac{c^4}{4} + \text{etc.}$$

$$\frac{d\,(B-C)}{dc} = c + (1 + \tfrac{1}{2})\,c^2 + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})\,c^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{c}{1-c} + \frac{\tfrac{1}{2}c^2}{1-c} + \frac{\tfrac{1}{3}c^3}{1-c} + \text{etc.} = -\frac{\log.(1-c)}{1-c},$$

donc $d\,(B - C) = -\frac{dc}{1-c}\,\log.\,(1 - c)$, et en intégrant on a

$$B - C = \tfrac{1}{2}\log.^2\,(1 - c),$$

sans constante, parce que B et C s'évanouissent en même temps que c.

On a ensuite

$$\frac{c\,d\,C}{dc} = c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \text{etc.} = -\log.\,(1 - c)$$

donc

$$d\,C = -\frac{dc}{c}\,\log.\,(1 - c),$$

et en intégrant

$$C = -\log.\,c\,\log.\,(1 - c) - \int\frac{dc}{1-c}\,\log.\,c.$$

Soit $c = 1 - b$, on aura

$$\int \frac{dc}{1-c} \log. c = \int \frac{-db}{b} \log. (1-b) = const. + b + \frac{b^2}{2^2} + \frac{b^3}{3^2} + \text{etc.}$$

Si donc C est une fonction de c désignée par $\Psi(c)$, on aura

$$\int \frac{dc}{1-c} \log. c = const. + \Psi(b) = const. + \Psi(1-c).$$

Donc

$$\Psi(c) + \Psi(1-c) = const. - \log. c \log. (1-c).$$

Si on fait $c = 0$, on trouve la constante $= \Psi(1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.}$, quantité dont on sait que la valeur est $\frac{\pi^2}{6}$, de sorte qu'on aura

$$\Psi(c) + \Psi(1-c) = \frac{\pi^2}{6} - \log. c \log. (1-c). \qquad (k')$$

Cette formule fait voir qu'étant connue la somme de la suite

$$\Psi(c) = c + \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^3}{3^2} + \frac{c^4}{4^2} + \text{etc.},$$

pour toute valeur de c depuis $c = 0$ jusqu'à $c = \frac{1}{2}$, on connoîtra la somme de la même suite, pour toute valeur de c depuis $c = \frac{1}{2}$ jusqu'à $c = 1$.

23. Dans le cas particulier où l'on fait $c = \frac{1}{2}$, l'équation (k') donne

$$\Psi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2} (\log. 2)^2;$$

donc dans ce même cas on aura

$$C = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2} A^2$$

mais on a trouvé $B - C = \frac{1}{2} \log.^2 (1 - c) = \frac{1}{2} \log.^2 2 = \frac{1}{2} A^2$; donc

$$B = C + \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\pi^2}{12}$$

et enfin

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq}\left(1 - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{pq}{n^2}\right). \qquad (1')$$

C'est la limite vers laquelle tend continuellement la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque n augmente de plus en plus, p et q restant les mêmes.

C'est en même temps une valeur approchée de $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque p et q sont petits par rapport à n. Soit par exemple $p = 1$, $q = 1$, $n = 12$, on aura à très-peu près $\left(\frac{1}{1}\right) = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{864}\right)$.

24. Si on désigne par Z la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ ou l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la différentielle de Z, prise par rapport à p, donnera

$$\frac{dZ}{dp} = \int \frac{x^{p-1}\,dx \log. x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}};$$

on auroit semblablement

$$\frac{ddZ}{dp^2} = \int \frac{x^{p-1}\,dx \log.^2 x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

$$\frac{d^3Z}{dp^3} = \int \frac{x^{p-1}\,dx \log.^3 x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

etc.

ces intégrales étant toutes prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Comme on a généralement par la formule (i′)

$$Z = \frac{1}{p} + \frac{p-q}{n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{n \,.\, 2n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \frac{n-q \,.\, 2n-q \,.\, 3n-q}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} \cdot \frac{1}{3n+p} + \text{etc.},$$

on en déduit par des différenciations successives :

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int \frac{x^{p-1}\, dx\, log. \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{p^2} + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{n \,.\, 2n} \cdot \frac{1}{(2n+p)^2} + \text{etc.} \\
\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{x^{p-1}\, dx\, log^2. \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{p^3} + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{1}{(n+p)^3} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{n \,.\, 2n} \cdot \frac{1}{(2n+p)^3} + \text{etc.} \\
\displaystyle\frac{1}{2.3}\int \frac{x^{p-1}\, dx\, log^3. \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{1}{p^4} + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{1}{(n+p)^4} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{n \,.\, 2n} \cdot \frac{1}{(2n+p)^4} + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} (m')$$

De sorte qu'on pourra toujours avoir, au moins par approximation, la valeur de chacune de ces intégrales.

25. Pour avoir ces mêmes valeurs exprimées en suites plus convergentes, il faudroit partir de la formule (h′), et la différencier par rapport à p, autant de fois qu'il est nécessaire.

En la différenciant une fois, on aura

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{p-1}\, dx\, log. \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{2^{-\frac{p}{n}}\, log.\, 2}{n} \left[\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{n+p} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{2n \,.\, 4n} \cdot \frac{1}{2n+p} + \text{etc.}\right] \\
+ 2^{-\frac{p}{n}} \left[\frac{1}{p^2} + \frac{n-q}{2n} \cdot \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{n-q \,.\, 2n-q}{2n \,.\, 4n} \cdot \frac{1}{(2n+p)^2} + \text{etc.}\right] \\
+ 2^{-\frac{q}{n}} \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n+q} + \frac{n-p \,.\, 2n-p}{2n \,.\, 4n(2n+q)} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{2n-p}\right) \\
\displaystyle+ \frac{n-p \,.\, 2n-p \,.\, 3n-p}{2n \,.\, 4n \,.\, 6n\, (3n+q)} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{2n-p} + \frac{1}{3n-p}\right) \\
+ \text{etc.}
\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Ces suites sont convergentes, puisque chaque terme est moindre que la moitié du terme précédent; mais leur forme est compliquée, et elle le deviendroit davantage dans la différencielle de second ordre ou d'un ordre plus élevé. C'est pourquoi il convient d'avoir recours à d'autres moyens si l'on veut évaluer facilement les intégrales dont il s'agit.

26. Désignons par $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}\, dx\, log. \frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ et par $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ le rapport de cette intégrale à la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$, déjà représentée par Z, en sorte qu'on ait

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{p}{q}\right)}{Z};$$

suivant ce qui a été déjà dit (art. 24) on aura

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{dZ}{dp}$$

$$\text{et } \psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{dZ}{dp}\cdot\frac{1}{Z} = -\frac{d(log.\, Z)}{dp}.$$

Mais puisqu'on a aussi $Z = \left(\frac{p}{q}\right)$, il en résulte

$$\frac{dZ}{dq} = -\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$$

où il faut observer que $\varphi\left(\frac{q}{p}\right)$ n'est pas la même chose que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$.

La différencielle complette de Z ou de $\left(\frac{p}{q}\right)$ pourra donc être exprimée ainsi:

$$d\left(\frac{p}{q}\right) = -dp\,\varphi\left(\frac{p}{q}\right) - dq\,\varphi\left(\frac{q}{p}\right). \qquad (n')$$

27. Cela posé si on prend l'équation générale

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\cdot\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

qui peut être mise sous la forme

$$log.\left(\frac{p}{q}\right)+log.\left(\frac{p+q}{r}\right)=log.\left(\frac{p}{r}\right)+log.\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

et qu'on la différencie par rapport à p, on aura

$$\frac{\varphi\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)}+\frac{\varphi\left(\frac{p+q}{r}\right)}{\left(\frac{p+q}{r}\right)}=\frac{\varphi\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{p}{r}\right)}+\frac{\varphi\left(\frac{p+r}{r}\right)}{\left(\frac{p+r}{q}\right)},$$

ou suivant les dénominations établies

$$\psi\left(\frac{p}{r}\right)+\psi\left(\frac{p+q}{r}\right)=\psi\left(\frac{p}{r}\right)+\psi\left(\frac{p+r}{q}\right). \qquad (p')$$

La même équation étant différenciée par rapport à q, donne

$$\psi\left(\frac{q}{p}\right)+\psi\left(\frac{p+q}{r}\right)=\psi\left(\frac{q}{p+r}\right). \qquad (q')$$

La différencielle par rapport à r donneroit un résultat de la même forme que le précédent, et qui y seroit par conséquent compris. On peut de plus faire voir que l'équation á quatre termes (p′) est comprise dans l'équation (q′); car de celle-ci on déduit, par la permutation des lettres p et q:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{p+q}{r}\right)=\psi\left(\frac{p}{q+r}\right),$$

et de cette dernière on conclut, par l'échange des lettres q et r.

$$\psi\left(\frac{p}{r}\right)+\psi\left(\frac{p+r}{q}\right)=\psi\left(\frac{p}{q+r}\right)$$

Donc

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{p+q}{r}\right)=\psi\left(\frac{p}{r}\right)+\psi\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

ce qui est l'équation (p′).

28. Delà on voit qu'il suffit de considérer l'équation à trois termes (q′), et c'est de cette source que nous allons tirer toutes les relations qui existent entre les diverses quantités $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n.

Parmi les quantités $\left(\frac{p}{q}\right)$ on distingue celles de la forme $\left(\frac{a}{n}\right)$, dont la valeur est $\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{1}{a}$; il en résulte $\varphi\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{1}{a^2}$, et par conséquent

$$\psi\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{1}{a}: \qquad (r')$$

première formule qui servira à la réduction des autres.

Parmi les mêmes quantités on trouve en second lieu la formule remarquable,

$$\left(\frac{a}{n-a}\right)=\frac{\omega}{\sin a\omega}$$

d'où l'on déduit, en prenant la différencielle de chaque membre par rapport à a,

$$-\varphi\left(\frac{a}{n-a}\right)+\varphi\left(\frac{n-a}{a}\right)=-\frac{\omega^2\cos a\omega}{\sin^2 a\omega}.$$

Cette équation étant divisée par $\left(\frac{a}{n-a}\right)$ donne,

$$\psi\left(\frac{a}{n-a}\right)-\psi\left(\frac{n-a}{a}\right)=\omega\cot a\omega.$$

29. La fonction $\psi\left(\frac{a-n}{a}\right)$ est remarquable dans l'ordre des fonctions ψ, comme la quantité $\left(\frac{a}{n-a}\right)$ l'est parmi celles de son espèce. Nous nous servirons donc de cette fonction pour exprimer toutes les autres, et nous ferons, pour abréger

$$\psi\left(\frac{a}{n-a}\right) = B_a. \quad (s')$$

Cela posé l'équation qu'on vient de trouver s'exprimera ainsi :

$$B_a - B_{n-a} = \omega \cot a\, \omega. \quad (t')$$

Elle fait voir que la valeur de B_a se conclut de celle de B_{n-a} et réciproquement ; d'où il suit que dans les quantités B_1, B_2, B_3, etc. il suffit de connoître les premiers termes jusqu'à $B_{\frac{n}{2}}$ ou $B_{\frac{n-1}{2}}$, inclusivement.

30. Reprenons maintenant l'équation (p), savoir,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n-p}{n-q}\right) = \frac{\omega \sin (p+q)\, \omega}{(n-p-q) \sin p\, \omega \sin q\, \omega};$$

en la différenciant par rapport à p, on en déduit

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi\left(\frac{n-p}{n-q}\right) = \omega \cot. p\, \omega - \omega \cot. (p+q)\, \omega - \frac{1}{n-p-q}. \quad (u')$$

Ainsi les deux fonctions $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, $\psi\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$, qui se servent en quelque sorte de complémens, se déterminent l'une par l'autre comme B_a et B_{n-a}.

31. De l'équation (q') on déduit généralement

$$\psi\left(\frac{a}{b}\right) - \psi\left(\frac{b}{a}\right) = \psi\left(\frac{a}{b-a}\right). \quad (v')$$

Donc en particulier $\psi\left(\frac{a}{n}\right) - \psi\left(\frac{n}{a}\right) = \psi\left(\frac{a}{n-a}\right)$ $= B_a$, et par conséquent

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a} - B^a. \qquad (x')$$

La même équation (v′) donne $\psi\left(\frac{a}{n-a}\right) - \psi\left(\frac{n-a}{a}\right)$ $= \psi\left(\frac{a}{n-2a}\right)$, le premier membre qui est $B_a - B_{n-a}$, se réduit à $\omega \cot a\,\omega$. Ainsi on a, en supposant $a < \frac{1}{2}n$, cette formule remarquable

$$\psi\left(\frac{a}{n-2a}\right) = \omega \cot a\,\omega. \qquad (y')$$

Euler est parvenu à ce théorème isolé dans ses *Opuscula analytica*, tom. I.

En vertu de l'équation (u′), on a

$$\psi\left(\frac{a}{n-2a}\right) - \psi\left(\frac{n-a}{2a}\right) = 2\,\omega \cot a\,\omega - \frac{1}{a};$$

donc on aura cette autre formule non moins remarquable

$$\psi\left(\frac{n-a}{2a}\right) = \frac{1}{a} - \omega \cot a\,\omega \qquad (z')$$

qui offre un second théorème pareil à celui d'Euler.

32. L'équation (q′) donne encore

$$\psi\left(\frac{a}{a}\right) + \psi\left(\frac{2a}{n-2a}\right) = \psi\left(\frac{a}{n-a}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\psi\left(\frac{a}{a}\right) = B_a - B_{2a}. \qquad (a'')$$

Cette équation suppose $a < \frac{1}{2}n$: lorsque a sera plus

grand que $\frac{1}{2}n$, il faudra déduire $\psi\left(\frac{a}{a}\right)$ de l'équation (u′) qui donne

$$\psi\left(\frac{a}{a}\right) = \psi\left(\frac{n-a}{n-a}\right) + \frac{a}{\sin 2a\omega} + \frac{1}{2a-n};$$

alors on aura par la formule précédente

$$\psi\left(\frac{n-a}{n-a}\right) = B_{n-a} - B_{2n-2a},$$

et par la formule (t′),

$$B_{2n-2a} = B_{2a-n} - \omega \cot 2a\omega, \quad B_{n-a} = B_a - \omega \cot a\omega;$$

donc

$$\psi\left(\frac{a}{a}\right) = B_a - B_{2a-n} + \frac{1}{2a-n}. \qquad (b'')$$

33. La comparaison des équations (a″) et (b″) fait voir que quand l'indice de B surpasse n, on a la réduction

$$B_{n+c} = B_c - \frac{1}{c}. \qquad (c'')$$

D'ailleurs il est aisé de voir qu'on a $B_n = 0$, et $B_0 = \infty$.

En général puisqu'on a $\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)$, cette équation étant différenciée logarithmiquement par rapport à p donne

$$\psi\left(\frac{p+n}{q}\right) = \psi\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+q}, \qquad (d'')$$

et la même équation différenciée par rapport à q donnera

$$\psi\left(\frac{q}{p+n}\right) = \psi\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{1}{p+q}. \qquad (e'')$$

Ces deux équations serviront au besoin à transformer

toute fonction $\psi\left(\frac{a}{b}\right)$ en une fonction semblable dans laquelle a et b seroient plus petits que n.

34. Revenons à l'équation (q′) et faisons $p+q+r = n$, afin qu'on ait à la fois $\psi\left(\frac{q}{p+r}\right) = B_q$ et $\psi\left(\frac{p+q}{r}\right) = B_{p+q} = B_{n-r}$; on aura donc

$$\psi\left(\frac{q}{n-r-q}\right) = B_q - B_{n-r}. \qquad (f'')$$

C'est la valeur de toute fonction $\psi\left(\frac{a}{b}\right)$ dans laquelle on a $a+b < n$.

Dans la même équation (q′) faisons $p = n - q$, nous aurons

$$\psi\left(\frac{q}{n-q+r}\right) = \psi\left(\frac{q}{n-q}\right) + \psi\left(\frac{n}{r}\right);$$

mais par l'équation (x′) on a $\psi\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{1}{r} - B_r$; donc

$$\psi\left(\frac{q}{n+r-q}\right) = B_q - B_r + \frac{1}{r}. \qquad (g'')$$

C'est la valeur de toute fonction $\psi\left(\frac{a}{b}\right)$ dans laquelle on a $a+b > n$.

Par les deux formules (f″) et (g″) on peut donc exprimer toutes les fonctions $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ au moyen des auxiliaires B_a, et il suffira de connoître un nombre $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ de celles ci, comme nous l'avons déjà remarqué.

35. On pourroit trouver d'autres formules qui tendroient à diminuer encore le nombre des auxiliaires;

par exemple lorsque n est pair, on pourroit déduire de l'équation (d') cette formule

$$B_a + B_{\frac{1}{2}n-a} - 2\,B_{2a} = \frac{2}{n}\,log.\,2 + \omega\,tang.\,a\,\omega, \qquad (h'')$$

au moyen de laquelle le nombre des auxiliaires B_1, B_2, B_3, etc. seroit réduit à moitié.

Mais en examinant les choses avec plus d'attention on reconnoît que la réduction ultérieure des auxiliaires est inutile, et qu'on peut les déterminer toutes par une formule générale qui ne renferme d'autres transcendantes que les logarithmes et les arcs de cercle.

En effet, nous avons trouvé d'une part

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a} - B_a;$$

d'autre part nous avons

$$\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a} \text{ et } \varphi\left(\frac{n}{a}\right) = \int\frac{x^{n-1}\,dx\,l\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

ce qui donne

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right) = a\int\frac{x^{n-1}\,dx\,log.\,\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}};$$

tout se réduit donc à trouver la valeur de cette intégrale prise à l'ordinaire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

36. Pour cela soit $x^n = 1 - y^n$, l'intégrale précédente deviendra

$$\frac{a}{n}\int\left[-y^{a-1}\,dy\,log.\,(1-y^n)\right] = -\frac{y^a}{n}\,log.\,(1-y^n)$$
$$-\int\frac{y^{a+n-1}\,dy}{1-y^n} = -\frac{y^a}{n}\,log.\,(1-y^n) + \frac{y^a}{a} - \int\frac{y^{a-1}\,dy}{1-y^n}$$

D'un autre côté y^a *log.* $(1-y^n)$ peut être mis sous la forme $(y^a - 1)$ *log.* $(1-y^n) - \int \frac{n y^{n-1}\, dy}{1-y^n}$, on aura donc

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right) = -\left(\frac{y^a - 1}{n}\right) \log.\ (1-y^n)$$
$$+ \frac{y^a}{a} - \int \left(\frac{y^{a-1} - y^{n-1}}{1-y^n}\right) dy$$

La partie hors du signe s'évanouit en faisant $y = 0$, et elle se réduit à $\frac{1}{a}$, en faisant $y = 1$; donc

$$\psi\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a} - \int \left(\frac{y^{a-1} - y^{n-1}}{1-y^n}\right) dy,$$

donc on a en général

$$B_a = \int \left(\frac{y^{a-1} - y^{n-1}}{1-y^n}\right) dy, \qquad \text{(i'')}$$

cette intégrale étant prise depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$.

37. Cela posé, en faisant toujours $\omega = \frac{\pi}{n}$, on trouve par les méthodes connues pour l'intégration des fractions rationnelles

$$B_a = \frac{1}{n} \log n + \frac{n-2}{n}\, \omega \sin 2\, a\, \omega - \frac{2}{n} \cos 2\, a\, \omega \log (2 \sin \omega)$$
$$+ \frac{n-4}{n}\, \omega \sin 4\, a\, \omega - \frac{2}{n} \cos 4\, a\, \omega \log (2 \sin 2\, \omega)$$
$$+ \frac{n-6}{n}\, \omega \sin 6\, a\, \omega - \frac{2}{n} \cos 6\, a\, \omega \log (2 \sin 3\, \omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

cette suite étant continuée jusqu'au terme

$$+ \frac{1}{n}\, \omega \sin (n-1)\, a\, \omega - \frac{2}{n} \cos (n-1)\, a\, \omega \log \left(2 \sin \frac{n-1}{2}\, \omega\right).$$

si n est impair.

Mais si n est pair, il faudra prendre, au lieu du der-

nier terme $\frac{n-n}{n}\,\omega \sin 2\,a\,\omega - \frac{2}{n}\cos n\,a\,\omega \log\left(2\sin\frac{n}{2}\,\omega\right)$ sa moitié seulement $-\frac{1}{n}\cos a\,\pi \log 2$.

Si l'on se rappelle ensuite les formules:

$$\sin x + \sin 2\,x + \sin 3\,x \cdots + \sin m\,x = \frac{\sin x + \sin m\,x - \sin (m+1)\,x}{2\,(1-\cos x)}$$

$$\sin x + 2\sin 2\,x + 3\sin 3\,x \cdots + m\sin m\,x = \frac{(m+1)\sin m\,x - m\sin (m+1)\,x}{2\,(1-\cos x)}$$

on trouvera que la suite

$$\frac{n-2}{n}\,\omega \sin 2\,a\,\omega + \frac{n-4}{n}\,\omega \sin 4\,a\,\omega + \frac{n-6}{n}\,\omega \sin 6\,a\,\omega + \text{etc.},$$

prolongée jusqu'à un nombre de termes $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$, a pour somme $\frac{1}{2}\,\omega \cot.\, a\,\omega$. Donc si n est impair, on aura

$$\begin{aligned} B_a = \frac{1}{n}\log n + \tfrac{1}{2}\,\omega \cot a\,\omega &- \frac{2}{n}\cos 2\,a\,\omega \log (2\sin \omega) \\ &- \frac{2}{n}\cos 4\,a\,\omega \log (2\sin 2\,\omega) \\ &- \frac{2}{n}\cos 6\,a\,\omega \log (2\sin 3\,\omega) \\ &\;\vdots \\ &- \frac{2}{n}\cos (n-1)\,a\,\omega \log\left(2\sin\frac{n-1}{2}\,\omega\right) \end{aligned}$$

et si n est pair, on aura

$$\begin{aligned} B_a = \frac{1}{n}\log n + \tfrac{1}{2}\,\omega \cot a\,\omega &- \frac{1}{n}\cos a\,\pi \log 2 \\ &- \frac{2}{n}\cos 2\,a\,\omega \log (2\sin \omega) \\ &- \frac{2}{n}\cos 4\,a\,\omega \log (2\sin 2\,\omega) \\ &\;\vdots \\ &- \frac{2}{n}\cos (n-2)\,a\,\omega \log\left(2\sin\frac{n-2}{2}\,\omega\right) \end{aligned} \qquad (k'')$$

38. Dans le cas particulier où l'on a $a = \frac{1}{2}\,n$, n étant pair, on trouve directement par la formule (i'')

$$B_a = \int \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y^n} = \frac{1}{a}\log (1+y^a) = \frac{2}{n}\log 2. \qquad (l'')$$

Pour que cette valeur s'accorde avec celle que donne dans le même cas la formule (k″) il faut qu'on ait

$$log\,(2\,sin\,\omega) - log\,(2\,sin\,2\,\omega) + log\,(2\,sin\,3\,\omega)\ldots$$

$$\pm\, log\left[2\,sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\omega\right] = (1+\tfrac{1}{2}\,cos\,a\,\pi)\,log\,2 - \tfrac{1}{2}\,log\,n.$$

ou, ce qui revient au même, en passant aux nombres, et supposant soit $n = 4\,i$, soit $n = 4\,i + 2$,

$$\frac{sin\,\omega\;sin\,3\,\omega\;sin\,5\,\omega\ldots\;sin\,(2\,i-1)\,\omega}{sin\,2\,\omega\;sin\,4\,\omega\;sin\,6\,\omega\ldots\;sin\,(2\,i\,\omega)} = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)} \qquad (m'')$$

Cette formule est facile à vérifier au moyen de la valeur de $sin\,n\,z$ donnée par Euler dans son *Introd. in anal.* pag. 204; car en faisant successivement dans cette valeur z infiniment petit, et $n\,z = \frac{1}{2}\pi$, on en tire:

$$sin\,\omega\;sin\,2\,\omega\;sin\,3\,\omega\ldots\;sin\,\frac{n}{2}\,\omega = 2^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{n},$$

$$sin\,\omega\;sin\,3\,\omega\;sin\,5\,\omega\ldots\;sin\,(2\,i-1)\,\omega = 2^{\frac{2-n}{4}};$$

$2\,i$ étant $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$ selon que n est de la forme $4\,i$ ou $4\,i+2$, et delà résulte l'équation (m″).

39. Ayant l'expression générale de B_a, on en déduit celle de $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, au moyen de l'une ou l'autre des formules

$$\left.\begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right) &= B_p - B_{p+q}\\ \psi\left(\frac{p}{q}\right) &= B_p - B_{p+q-n} + \frac{1}{p+q-n}.\end{aligned}\right\} \qquad (n'')$$

La première ayant lieu lorsque $p + q$ est $< n$, et la

seconde lorsque $p+q$ est $>n$. En cas d'égalité on a simplement $\psi\left(\frac{p}{q}\right)=B_p$.

Ces valeurs, qui sont déduites des formules (f'') et (g'') peuvent aussi être mises sous une seule forme générale, qui est

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=\int\left(\frac{y^{p-1}-y^{p+q-1}}{1-y^n}\right)dy, \qquad (p'')$$

ce qui prouve immédiatement que la fonction $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ est toujours déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes.

On peut donc rendre le théorème d'Euler cité art. 31, beaucoup plus général, en ces termes:

Si l'on prend les trois intégrales

$$\int\frac{x^{p-1}\,dx\,\log\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\ \int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\ \int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\,dx,$$

entre les limites $x=0$, $x=1$, la première sera égale au produit des deux autres.

40. Pour étendre encore davantage cette théorie, considérons les deux suites d'intégrales en Z et en T, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, savoir:

$$Z=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\quad T=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\,dx$$

$$Z'=\int\frac{x^{p-1}\,dx\,\log\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\quad T'=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\,dx\,\log\frac{1}{x}$$

$$Z''=\int\frac{x^{p-1}\,dx\,\log^2\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},\quad T''=\int\frac{x^{p-1}-x^{p+q-1}}{1-x^n}\,dx\,\log^2\frac{1}{x}$$

etc. etc.

Il résulte d'abord du théorème précédent qu'on a

$$Z' = Z\,T. \qquad (q'')$$

Différenciant cette équation par rapport à p, et observant qu'on a $\frac{dZ}{dp} = -Z'$, $\frac{dZ'}{dp} = -Z''$, $\frac{dT}{dp} = -T'$, on aura $Z'' = Z'\,T + Z\,T'$, ou

$$Z'' = Z\,(T^2 + T'). \qquad (r'')$$

Celle-ci étant différenciée de nouveau par rapport à p, donne

$$Z''' = Z\,(T^3 + 3\,TT' + T''). \qquad (s'')$$

Et ainsi de suite, la loi de ces expressions étant analogue à celle des différencielles successives de la formule $u\,e^{\int u dp}$.

Si l'on veut donc avoir les valeurs des quantités Z', Z'', Z''', etc. ou simplement leur rapport à la fonction primitive Z, il faudra connoître les quantités T, T', T'', etc. en pareil nombre. Mais comme celles-ci sont rationnelles, et contiennent des puissances moins élevées de $\log \frac{1}{r}$, on voit qu'au moins la difficulté est diminuée.

41. Si l'on intègre la différencielle, $x^{m+a-1}\,dx$, depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$, on a

$$\int x^{m+\alpha-1}\,dx = \frac{1}{m+\alpha} = \frac{1}{m} - \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{\alpha^3}{m^3} + \text{etc.}$$

Si on met la même différencielle sous la forme x^{m-1} $dx\,x^{\alpha}$, ou

$$x^{m-1}\,dx\left(1 + \alpha \log x + \frac{\alpha^2}{1.2}\log^2 x + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\log^3 x + \text{etc.}\right),$$

son intégrale prise entre les mêmes limites, sera

$$\int x^{m-1}\,dx + \alpha \int x^{m-1}\,dx\,\log x + \frac{\alpha^2}{1.2}\int x^{m-1}\,dx\,\log^2 x + \text{etc.}$$

L'identité de ces deux formules exige donc qu'on ait :

$$\int x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{m^2}$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,\log^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1.2}{m^3}$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,\log^3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1.2.3}{m^4}$$

et en général

$$\int x^{m-1}\,dx\,\log^n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1.2.3.\ldots n}{m^{n+1}}. \qquad (t'')$$

42. A l'aide de cette formule on peut exprimer les quantités T'', T''', etc., par des séries régulières, composées des puissances réciproques des nombres naturels pris à des intervalles égaux.

Ainsi en développant d'abord la différencielle qu'il faut intégrer pour avoir T'', on a

$$T'' = \int dx\,\log\frac{1}{x}\left\{\begin{array}{l} x^{p-1} + x^{p+n-1} + x^{p+2n-1} + \text{etc.} \\ - x^{p+q-1} - x^{p+q+n-1} - x^{p+q+2n-1} - \text{etc.}\end{array}\right\}$$

Et effectuant l'intégration entre les limites $x=0$, $x=1$, il vient

$$T'' = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+n)^2} + \frac{1}{(p+2n)^2} - \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{(p+q+n)^2} - \frac{1}{(p+q+2n)^2} - \text{etc.}$$

Désignons en général par a_m, la somme de la suite

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+n)^m} + \frac{1}{(a+2n)^m} + \frac{1}{(a+3n)^m} + \text{etc.} \qquad (u'')$$

laquelle deviendra 1_m, 2_m, 3_m, etc. selon qu'on fera $a = 1, 2, 3$, etc. n étant constant : on aura suivant cette notation

$$T' = p_2 - (p+q)_2 \qquad (v'')$$

on auroit semblablement

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\, T'' &= p_3 - (p+q)_3 \\ \frac{1}{2.\,3}\, T''' &= p_4 - (p+q)_4 \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \qquad (x'')$$

43. Il faut observer que n et m restant les mêmes, on n'aura besoin de considérer les valeurs de a_m, que depuis $a = 1$ jusqu'à $a = n$; car il est visible par exemple que $(n+1)_m$ se réduit à $1_m - 1$, et qu'en général on a

$$(a+n)_m = a_m - \frac{1}{a^m}. \qquad (y'')$$

Par suite de cette formule on auroit de même

$$(a+2\,n)_m = a_m - \frac{1}{a^m} - \frac{1}{(a+n)^m}$$

et en général on réduira toute quantité a_m, où a est plus grand que n, à une quantité semblable où a n'excédera pas n.

On voit encore que n_m représentant la suite

$$\frac{1}{n^m} + \frac{1}{(2\,n)^m} + \frac{1}{(3\,n)^m} + \text{etc.}$$

cette quantité est la même chose que

$$\frac{1}{n^m} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \text{etc.}\right),$$

et qu'ainsi on a

$$n_m = \frac{1}{n^m}\, S_m. \qquad (z'')$$

Enfin il est visible qu'on a l'équation

$$S_m = 1_m + 2_m + 3_m \cdots\cdots + n_m$$

laquelle, en substituant la valeur de n_m, devient

$$\left(1 - \frac{1}{n^m}\right) S_m = 1_m + 2_m + 3_m + \cdots + (n-1)_m \quad (a''')$$

44. Considérons particulièrement le cas de $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$, alors on aura

$$T' = 1_2 - 2_2 = \left(1 - \frac{2}{2^2}\right) S_2 = \frac{1}{2} S_2$$
$$T'' = 1_3 - 2_3 = \left(1 - \frac{2}{2^3}\right) S_3 = \frac{3}{4} S_3$$
$$T''' = 1_4 - 2_4 = \left(1 - \frac{2}{2^4}\right) S_4 = \frac{7}{8} S_4$$
etc.

On sait que les quantités S_2, S_4, S_6, etc. sont connues en fonctions de π, et qu'on a $S_2 = \frac{1}{6}\pi^2$, $S_4 = \frac{1}{90}\pi^4$, $S_6 = \frac{1}{945}\pi^6$, etc. A l'égard des quantités S_3, S_5, etc. ce sont des transcendantes particulières qui ne se rattachent point aux autres transcendantes connues ; il est facile néanmoins d'en trouver les valeurs avec une grande approximation, par les belles méthodes qu'Euler a données pour cet objet dans son *Calcul différenciel*, page 451 et suivantes.

Au moyen de ces diverses quantités, on connoîtra donc les intégrales suivantes, déduites des équations (q″), (r″), etc.

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2} \\
&\int \frac{dx \log \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2} \log 2 \\
&\int \frac{dx \log^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{12}\right) \\
&\int \frac{dx \log^3 \frac{1}{x}}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}\left(\log^3 2 + 3 \log 2 . \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{2} S_3\right)
\end{aligned}\right\} \quad (b''')$$

et on pourra prolonger indéfiniment cette suite, où tout est connu, excepté S_3, S_5, etc. dont on connoît au moins les valeurs très-approchées, jusqu'à S_{15}, (*Calc. diff.*, page 456.)

45. Occupons-nous maintenant de réduire au plus petit nombre possible les quantités 1_m, 2_m, 3_m, etc. qui répondent à une même valeur de n. Pour cet effet reprenons l'équation (t'), et substituons-y la valeur de B donnée par la formule (l''), nous aurons

$$\int\left(\frac{y^{a-1} - y^{n-a-1}}{1 - y^n}\right) dy = \omega \cot a\omega. \qquad (c''')$$

D'où l'on tire en différenciant successivement par rapport à a,

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{y^{a-1} + y^{n-a-1}}{1 - y^n}\, dy \log \frac{1}{y} = \frac{\omega^2}{\sin^2 a\omega}\\
&\frac{1}{2}\int\frac{y^{a-1} - y^{n-a-1}}{1 - y^n}\, dy \log^2 \frac{1}{y} = \frac{\omega^3}{\sin^3 a\omega}\cdot\cos a\omega\\
&\frac{1}{2.3}\int\frac{y^{a-1} + y^{n-a-1}}{1 - y^n}\, dy \log^3 \frac{1}{y} = \frac{\omega^4}{\sin^4 a\omega}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos^2 a\omega\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}(d''')$$

Mettant au lieu des premiers membres les valeurs qu'ils obtiennent par le développement en série et l'application de la formule (t'') on aura

$$\left.\begin{aligned}
&a_2 + (n - a)_2 = \frac{\omega^2}{\sin^2 a\omega}\\
&a_3 - (n - a)_3 = \frac{\omega^3}{\sin^3 a\omega}\cos a\omega\\
&a_4 + (n - a)_4 = \frac{\omega^4}{\sin^4 a\omega}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cos^2 a\omega\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\qquad (e''')$$

Ces formules serviront à établir entre les diveres quan-

tités a_m, qui répondent à une même valeur de n, toutes les relations qu'on peut obtenir par d'autres voies, et qui sont données sous diverses formes dans les ouvrages d'Euler. C'est ce que nous allons développer dans deux exemples.

46. Soit $n = 6$ et $m = 2$, on aura l'équation générale

$$a_2 + (6 - a)_2 = \frac{\omega^2}{\sin^2 a\,\omega},$$

d'où l'on déduit successivement

$$\left.\begin{aligned} 1_2 + 5_2 &= \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega} \\ 2_2 + 4_2 &= \frac{\omega^2}{\sin^2 2\,\omega} \\ 3_2 + 3_2 &= \frac{\sin^2 3\,\omega}{\omega^2} \end{aligned}\right\} \qquad (f''')$$

ce qui donne en substituant la valeur $\omega = \frac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned} 1_2 + 5_2 &= \frac{\pi^2}{9} \\ 2_2 + 4_2 &= \frac{\pi^2}{27} \\ 3_2 &= \frac{\pi^2}{72} \end{aligned}$$

La somme de ces équations est

$$\left(1 - \frac{1}{36}\right) S_2 = \frac{35}{216}\,\pi^2.$$

d'où l'on déduit $S_2 = \frac{1}{6}\,\pi^2$, ce qui est un résultat connu.

Outre cette valeur de S_2, on connoit $3_2 = \frac{1}{72}\,\pi^2$, et $6_2 = \frac{1}{36}\,S_2 = \frac{1}{216}\,\pi^2$; mais les quatre autres quantités 1_2, 2_2, 4_2, 5_2, ne peuvent être déterminées par les équations précédentes.

Observons cependant que puisqu'on a

$$2_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{20^2} + \text{etc.},$$

il en résulte

$$2_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc.}\right) = \frac{1}{4}\,(1_2 + 4_2);$$

donc les quatre quantités dont il s'agit peuvent être déterminées au moyen de l'une d'entre elles, par exemple au moyen de 1_2, de la manière suivante

$$\left.\begin{aligned} 1_2 &= c \\ 2_2 &= \frac{1}{135}\pi^2 + \frac{1}{5}c \\ 4_2 &= \frac{4}{135}\pi^2 - \frac{1}{5}c \\ 5_2 &= \frac{1}{9}\pi^2 - c \end{aligned}\right\} \quad (g''')$$

47. Quant à la valeur absolue de c, elle n'est déterminable exactement par aucune formule connue; mais on peut en trouver une valeur aussi approchée qu'on voudra par la méthode qu'Euler a donnée dans son *Calc. diff.*, page 451.

Pour cela ayant fait

$$s = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(a+2n)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+nx)^2},$$

on trouve en général

$$\left.\begin{aligned} s = C &- \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a+nx} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a+nx)^2} - \frac{A'n}{(a+nx)^3} + \frac{B'n^3}{(a+nx)^5} \\ &- \frac{C'n^5}{(a+nx)^7} + \frac{D'n^7}{(a+nx)^9} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} (h''')$$

A', B', C', D', etc. étant la suite des nombres Bernoulliens.

Il résulte de cette formule que la somme de la suite prolongée à l'infini étant désignée par a_2, on a $a_2 = C$, donc réciproquement on a

$$\left.\begin{aligned} a_2 = s + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a+nx} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a+nx)^2} + \frac{A'n}{(a+nx)^3} \\ - \frac{B'n^3}{(a+nx)^5} + \frac{C'n^5}{(a+nx)^7} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (\text{i}''')$$

On sait que la suite A', B', C', D', est divergente à compter du 3e terme, et le devient plus que toute progression géométrique donnée, d'où il suit que la suite contenue dans la formule (i''') deviendra nécessairement divergente après un certain nombre de termes. Mais ce qui est fort remarquable, c'est que cette formule n'en est pas moins propre à donner la valeur de a_2 avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer.

Pour cela il faut donner à x une valeur arbitraire d'autant plus grande qu'on voudra obtenir une plus grande approximation (la valeur $x = 10$ suffit pour donner 18 ou 20 décimales exactes). Au moyen de cette valeur on commencera par prendre la somme effective de la suite

$$s = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(a+2n)^2} \dots + \frac{1}{(a+xn)^2};$$

substituant ensuite cette valeur de s ainsi que celle de x dans l'équation (i'''), on aura pour la valeur de a_2 une suite d'abord très-convergente, mais dont la convergence diminuera de plus en plus, jusqu'à un certain terme où elle deviendra divergente, et cette divergence augmenteroit de plus en plus à l'infini.

Par le calcul des termes successifs, on obtiendra des

résultats alternativement plus grands et plus petits que la valeur cherchée, et on devra s'arrêter aux termes où cesse la convergence.

Ces termes indiqueront deux limites fort rapprochées, entre lesquelles se trouve nécessairement la valeur de a_2.

Si ces deux limites ne donnoient pas encore une approximation suffisante, il ne resteroit d'autre parti à prendre que de recommencer un nouveau calcul en donnant à x une valeur plus grande. Mais pour l'ordinaire une valeur médiocrement grande de x donnera une très-grande approximation.

Nous donnerons ci-après un exemple du calcul de ces sortes de suites qu'on peut appeler *suites demi-convergentes*.

48. Soit maintenant $m = 3$ et $n = 6$, nous aurons l'équation générale

$$a_3 - (6-a)_3 \frac{\omega^3}{\sin^3 a\omega} \cos a\omega,$$

d'où l'on déduit les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 1_3 - 5_3 &= \frac{\omega^3 \cos \omega}{\sin^3 \omega} = 4\,\omega^3 \sqrt{3} \\ 2_3 - 4_3 &= \frac{\omega^3 \cos 2\omega}{\sin^3 2\omega} = \frac{4\,\omega^3}{3\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \qquad (k''')$$

d'ailleurs on a $6_3 = \frac{1}{216} S_3$, et

$$1_3 + 2_3 + 3_3 + 4_3 + 5_3 = S_3.$$

Ces équations sont insuffisantes pour déterminer toutes les inconnues ; mais les diviseurs de 6 qui sont 2 et 3 en fournissent de nouvelles.

On a en effet

$$2_3 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right) = \frac{1}{8}\,(1_3 + 4_3)$$

$$3_3 = \frac{1}{27}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.}\right) = \frac{1}{27}\,(1_3 + 3_3 + 5_3)$$

delà on voit que les cinq quantités 1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3, se détermineront en supposant connue l'une d'entre elles. Ainsi en faisant $1_3 = k$, on aura

$$\begin{aligned}
1_3 &= k \\
2_3 &= \frac{1}{7}\left(k - \frac{4\,\omega^3}{3\sqrt{3}}\right) \\
3_3 &= \frac{1}{13}\left(k - 2\,\omega^3\sqrt{3}\right) \\
4_3 &= \frac{1}{7}\left(k - \frac{32\,\omega^3}{3\sqrt{3}}\right) \\
5_3 &= k - 4\,\omega^3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

La somme de ces quantités doit être égale à $\frac{215}{216}\,S_3$, ainsi on aura

$$\frac{215}{216}\,S_3 = \frac{215}{91}\,k - \frac{430}{91}\,\omega^3\sqrt{3},$$

ou

$$S_3 = \frac{216}{91}\,k - \frac{432}{91}\,\omega^3\sqrt{3}.$$

Réciproquement on peut exprimer toutes les quantités 1_3, 2_3, etc. au moyen de S_3, et de $\omega = \frac{\pi}{6}$, et on trouve

$$\left.\begin{aligned}
1_3 &= \tfrac{91}{216}\,S_3 + 2\,\omega^3\sqrt{3} \\
2_3 &= \tfrac{13}{216}\,S_3 + \tfrac{2}{9}\,\omega^3\sqrt{3} \\
3_3 &= \tfrac{7}{216}\,S_3 \\
4_3 &= \tfrac{13}{216}\,S_3 - \tfrac{2}{9}\,\omega^3\sqrt{3} \\
5_3 &= \tfrac{91}{216}\,S_3 - 2\,\omega^3\sqrt{3} \\
6_3 &= \tfrac{1}{216}\,S_3
\end{aligned}\right\} \qquad (l''')$$

49. On déduiroit aisément des équations (e''') les autres propriétés connues des quantités a_m, c'est-à-dire

des suites qui résultent de la décomposition de la suite générale

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \text{etc.}$$

en prenant les termes de trois en trois, de quatre en quatre ou en général de n en n. On trouveroit par exemple que la suite

$$1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} - \text{etc.}$$

est sommable lorsque m est impair, et qu'elle ne l'est pas lorsque m est pair.

On trouveroit au contraire que la suite

$$1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \text{etc.}$$

est sommable lorsque m est pair, et qu'elle ne l'est pas lorsque m est impair. Le mot *sommable* est ici entendu non dans un sens absolu, mais relativement aux méthodes connues jusqu'à présent.

Ces choses n'ayant point de difficulté, et ayant d'ailleurs été démontrées par d'autres voies, nous ne nous y arrêterons pas davantage. Nous ferons voir seulement comment on peut trouver, par des suites qui soient convergentes dans toute leur étendue, les valeurs des quantités c et S_3 qui sont restées inconnues dans les art. 46 et 48. Recherche plus difficile qu'elle ne paroît au premier coup-d'œil, parce qu'en suivant les méthodes qui se présentent naturellement, on retombe sur la même difficulté qu'on vouloit résoudre.

50. Pour obtenir d'abord la valeur de S_3, j'observe qu'on peut supposer

$$\left.\begin{aligned}
1_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y^6}\, log^2\, y \\
2_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{y\, dy}{1-y^6}\, log^2\, y \\
3_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{y^2\, dy}{1-y^6}\, log^3\, y \\
4_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{y^3\, dy}{1-y^5}\, log^2\, y \\
5_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{y^4\, dy}{1-y^6}\, log^2\, y \\
6_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{y^5\, dy}{1-y^6}\, log^2\, y
\end{aligned}\right\} \qquad (m''')$$

car les seconds membres étant intégrés depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, au moyen de la formule (t″), ces équations deviennent identiques.

Or d'après les équations (k‴) on a

$$1_3 - 5_3 = \frac{1}{2}\int \frac{1-y^4}{1-y^6}\, dy\, log^2\, y = 4\, \omega^3 \sqrt{3}$$

$$2_3 - 4_3 = \frac{1}{2}\int \frac{y-y^3}{1-y^6}\, dy\, log^2\, y = \frac{4\, \omega^3}{3\sqrt{3}}.$$

Ces deux équations ajoutées ensemble, puis soustraites l'une de l'autre, donnent les deux suivantes

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy\, log^2\, y}{1-y+y^2} = 4\, \omega^3 \sqrt{3} + \frac{4\, \omega^3}{3\sqrt{3}} = \frac{40\, \omega^3 \sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy\, log^2\, y}{1+y+y^2} = 4\, \omega^3 \sqrt{3} - \frac{4\, \omega^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32\, \omega^3 \sqrt{3}}{9},$$

de sorte qu'on a entre ces intégrales le rapport très-simple

$$\int \frac{dy\, log^2\, y}{1-y+y^2} = \frac{5}{4}\int \frac{dy\, log^2\, y}{1+y+y^2};$$

mais cette formule est susceptible d'être généralisée ainsi:

$$\int \frac{dy\, log^m\, y}{1-y+y^2} = \frac{2^m+1}{2^m}\int \frac{dy\, log^m\, y}{1+y+y^2} \qquad (n''')$$

En effet, soit

$$P = \int \frac{dy \log^m y}{1 - y + y^2}, \text{ et } Q = \int \frac{dy \log^m y}{1 + y + y^2},$$

on aura

$$\tfrac{1}{2}(P - Q) = \int \frac{y\, dy \log^m y}{1 + y^2 + y^4}$$

mettant dans cette dernière $y^{\frac{1}{2}}$ au lieu de y, il viendra

$$\tfrac{1}{2}(P - Q) = (\tfrac{1}{2})^{m+1} \int \frac{dy \log^m y}{1 + y + y^2} = (\tfrac{1}{2})^{m+1}\, Q,$$

et par conséquent $P = \frac{2^{m+1}}{2^m} Q$.

Par la combinaison des équations (m‴), et la substitution des valeurs données par les équations (l‴), on obtient

$$1_3 + 4_3 = \tfrac{1}{2} \int \frac{dy \log^2 y}{1 - y^3} = \tfrac{104}{216} S_3 + \tfrac{16}{9}\, \omega^3 \sqrt{3}$$

$$3_3 + 6_3 = \tfrac{1}{2} \int \frac{y^2\, dy \log^2 y}{1 - y^3} = \tfrac{8}{216} S_3$$

Soustrayant la seconde de la première, on aura

$$\tfrac{1}{2} \int \frac{(1 + y)\, dy \log^2 y}{1 + y + y^2} = \tfrac{4}{9} S_3 + \tfrac{16}{9}\, \omega^3 \sqrt{3};$$

d'ailleurs on a déjà trouvé

$$\tfrac{1}{2} \int \frac{dy \log^2 y}{1 + y + y^2} = \tfrac{32}{9}\, \omega^3 \sqrt{3};$$

donc en éliminant ω^3, on aura

$$\tfrac{8}{9} S_3 = \int \frac{(y + \frac{1}{2})\, dy \log^2 y}{1 + y + y^2}. \qquad (\text{p}''')$$

C'est de cette formule que nous allons tirer la valeur de S_3.

Je remarque d'abord qu'on peut faire

$$\int \frac{(y + \frac{1}{2})\, dy \log^2 y}{1 + y + y^2} = \int \frac{dy}{1 + y} \log^2 y - \tfrac{1}{2} \int \frac{(1 - y)\, dy \log^2 y}{(1 + y)(1 + y + y^2)}.$$

La première partie

$$\int \frac{dy}{1+y} \log^2 y = 2\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) = 2S_3\left(1 - \frac{2}{8}\right) = \frac{3}{2} S_3,$$

donc on aura

$$\tfrac{11}{18} S_3 = \int \frac{\frac{1}{2}(1-y)\, dy \log^2 y}{(1+y)(1+y+y^2)};$$

soit $y = \frac{1-z}{1+z}$, et la transformée sera

$$\tfrac{11}{18} S_3 = \int \frac{z\, dz}{z+z^2} \log^2 y,$$

formule qui doit toujours être intégrée depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

On voit maintenant que comme z^2 est toujours plus petit que 1, on pourra réduire $\frac{z\, dz}{3+z^2}$ en une série convergente, de sorte que l'intégrale ne dépendra plus que de termes de la forme $\int z^{2m+1} dz \log^2 y$. Mais pour rendre la série encore plus convergente, je fais $z^2 = 1 - u^2$, et j'ai

$$\tfrac{11}{18} S_3 = \int \frac{u\, du}{4-u^2} \log^2 y,$$

intégrale qui doit encore être prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$.

Cette intégrale étant prise par parties devient

$$-\tfrac{1}{2} \log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right) \log^2 y + \int \frac{dy}{y} \log y \log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right);$$

la première partie s'évanouit aux deux limites de l'intégrale ; ainsi on a simplement

$$\tfrac{11}{18} S_3 = \int \frac{dy}{y} \log y \log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right).$$

Développant $log\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)$ et substituant la valeur $\frac{dy}{y} = -\frac{2dz}{u^2}$ on aura

$$\frac{11}{18} S_3 = \frac{1}{2}\int dz \; log \frac{1}{y} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^4}{4^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{u^6}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

Soit donc

$$\frac{1}{2}\int dz \; log \frac{1}{y} = P^\circ$$

$$\frac{1}{2}\int u^2 \, dz \; log \frac{1}{y} = P'$$

$$\frac{1}{2}\int u^4 \, dz \; log \frac{1}{y} = P''$$

etc.

ces intégrales étant prises depuis $z = 0$, jusqu'à $z = 1$, et on aura

$$\frac{11}{18} S_3 = P^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{P'}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P''}{4^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{P'''}{4^3} + \text{etc.}$$

Pour avoir maintenant les quantités P°, P', P'', etc. j'observe qu'on a en général

$$\int u^{2m} \, dz \; log \frac{1}{y} = log \frac{1}{y} \int u^{2m} \, dz + \int \frac{dy}{y} \cdot \int u^{2m} \, dz.$$

Dans cette formule nous supposerons que l'intégrale $\int u^{2m} \, dz$ est prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $z = 1$ ou $u = 0$; alors la partie $log \frac{1}{y} \int u^{2m} \, dz$ s'évanouit aux deux limites de l'intégrale, et on a simplement

$$\frac{1}{2}\int u^{2m} \, dz \; log \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} \int u^{2m} \, dz = \int -\frac{dz}{u^2} \int u^{2m} \, dz$$

où l'on voit que les logarithmes ont entièrement disparu, et qu'on ne doit plus tenir compte que de la relation $u^2 = 1 - z^2$.

On a d'ailleurs

$$\int u^{2m}\,dz = \frac{2m}{2m+1}\int u^{2m-2}\,dz + \frac{u^{2m}z}{2m+1},$$

multipliant de part et d'autre par $\frac{dz}{u^2}$ et intégrant, on aura

$$P^{(m)} = \frac{2m}{2m+1}\,P^{(m-1)} - \int \frac{u^{2m-2}\,z\,dz}{2m+1}$$

Or $z\,dz = -u\,du$, et par conséquent

$$-\int \frac{u^{2m-2}\,z\,dz}{2m+1} = \int \frac{u^{2m-1}\,du}{2m+1} = \frac{u^{2m}}{(2m+1)\,2m} + C;$$

cette intégrale devant être prise depuis $z=0$, jusqu'à $z=1$, elle se réduit à $-\frac{1}{2m\,(2m+1)}$, donc on aura

$$P^{(m)} = \frac{2m}{2m+1}.\,P^{(m-1)} - \frac{1}{2m\,(2m+1)}$$

La première valeur

$$P^{\circ} = -\int \frac{dz}{u^2}\int dz = -\int \frac{dz}{u^2}\,(z-1) = \int \frac{dz}{1+z} = L\,(1+z) = L\,2;$$

donc on aura successivement

$$P^{\circ} = \log 2$$
$$P' = \frac{2}{3}\,P^{\circ} - \frac{1}{2.3}$$
$$P'' = \frac{4}{5}\,P' - \frac{1}{4.5}$$
$$P''' = \frac{6}{7}\,P'' - \frac{1}{6.7}$$
etc.

Au moyen de cette loi très-simple on calculera aisément les différens termes de la suite décroissante P°, P', P'', P''', etc. Ensuite on aura S_3 par la formule

$$S_3 = \frac{18}{11}\left(P^{\circ} + \frac{1}{2}.\,\frac{P'}{4} + \frac{1}{3}.\,\frac{P''}{4^2} + \frac{1}{4}.\,\frac{P'''}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

Ce qui donne une approximation très-rapide, puisque chaque terme est moindre que le quart du précédent.

En calculant cette suite jusqu'au terme P^{VI} inclusivement, on trouve $S_3 = 1.2020567$. Euler a trouvé par la méthode dont nous avons parlé, et en poussant l'approximation beaucoup plus loin,

$$S_3 = 1.202056903159594281.$$

(Voyez *Calc. diff.*, page 453).

51. Pour trouver par des procédés semblables la valeur de la transcendante c, demeurée inconnue dans les équations (h'''), j'observe qu'on a

$$1_2 = \int \frac{dy}{1-y^6} \log \frac{1}{y} = c$$

$$2_2 = \int \frac{y\,dy}{1-y^6} \log \frac{1}{y} = \frac{1}{135}\pi^2 + \frac{1}{5}c$$

$$4_2 = \int \frac{y^3\,dy}{1-y^6} \log \frac{1}{y} = \frac{4}{135}\pi^2 - \frac{1}{5}c$$

$$5_2 = \int \frac{y^4\,dy}{1-y^6} \log \frac{1}{y} = \frac{1}{9}\pi^2 - c$$

delà je tire

$$1_2 + 2_2 - 4_2 - 5_2 = \int \frac{dy \log \frac{1}{y}}{1-y+y^2} = \frac{12}{5}c - \frac{2}{15}\pi^2$$

donc

$$c = \frac{1}{18}\pi^2 + \frac{5}{12}\int \frac{dy \log \frac{1}{y}}{1-y+y^2};$$

tout se réduit donc à trouver la valeur de cette intégrale.

Si on fait successivement $y = \frac{1}{2}(1-u)$, $y = \frac{1}{2}(1+u)$, et qu'on ajoute les deux transformées prises positivement, on aura

$$\int \frac{dy \log \frac{1}{y}}{1-y+y^2} = \int \frac{2\,du}{3+u^2} \log \left(\frac{4}{1-u^2}\right)$$

nouvelle intégrale qui doit encore être prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$.

La première partie de cette intégrale

$$\int \frac{2\,du\,\log 4}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \log 4 . \,arc\ tang. \frac{u}{\sqrt{3}},$$

et en faisant $u = 1$ elle se réduit à

$$\frac{2 \log 4}{\sqrt{3}} . \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{2\pi \log 2}{3\sqrt{3}}.$$

L'autre partie

$$\int - \frac{2\,du}{3+u^2} \log (1-u^2)$$

étant appelée T, on aura par le développement de la fraction,

$$T = \int - \frac{2\,du}{3} \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{3^2} - \frac{u^6}{3^3} + \text{etc.}\right) \log (1-u^2);$$

or en intégrant par parties on a

$$\int - u^{2m}\,du \log (1-u^2) = \frac{1-u^{2m+1}}{2m+1} \log (1-u^2) + \int \frac{1-u^{2m+1}}{2m+1} . \frac{2\,u\,du}{1-u^2},$$

et puisque la quantité $(1-u^{2m+1}) \log (1-u^2)$ s'évanouit aux deux limites de l'intégrale, on a simplement

$$\int - u^{2m}\,du \log (1-u^2) = \frac{1}{2m+1} \int \frac{1-u^{2m+1}}{1-u^2} . 2\,u\,du$$

$$= \frac{2}{2m+1} \int \left(\frac{1-u^{2m+2}}{1-u^2}\,du - \frac{du}{1+u}\right).$$

Développant la quantité sous le signe et intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, on aura

$$\int - u^{2m}\,du \log (1-u^2) = \frac{2}{2m+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{2m+1} - \log 2\right)$$

donc enfin

$$T = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \log 2\right)$$
$$- \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} - \log 2\right)$$
$$+ \frac{4}{3^3} \cdot \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \log 2\right)$$
$$- \frac{4}{3^4} \cdot \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \log 2\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

série convergente, puisque chaque terme est moindre que le tiers du précédent. T étant connu, on aura c par la valeur

$$c = \frac{\pi^2}{18} + \frac{5\,\pi \log 2}{18\sqrt{3}} + \frac{5}{12}\,T.$$

52. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^n$$

que nous supposerons toujours prise entre les limites $x = 0$, $x = 1$. On a d'abord en intégrant par parties

$$\int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^n = \frac{x^a}{a} \left(\log \frac{1}{x}\right)^n + \frac{n}{a} \int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

et comme la partie hors du signe s'évanouit aux deux limites, pourvu qu'on suppose $n > o$, on aura alors

$$\int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^n = \frac{n}{a} \int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1}. \quad (\alpha)$$

On aura donc en général, si n est un nombre entier positif,

$$\int x^{a-1}\, dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^n = \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3 \ldots 1}{a^{n+1}}. \quad (\beta)$$

Lorsque n ne sera pas un nombre entier, l'intégrale

$\int x^{a-1}\, dx \left(log \frac{1}{x}\right)^n$ sera en général une transcendante dont il convient d'examiner les propriétés.

Et d'abord au moyen de la formule (α) on pourra toujours ramener cette transcendante au cas où l'exposant n est compris entre o et — 1.

De plus, j'observe que sans rien diminuer de la généralité du calcul, on peut faire $a = 1$. Car la formule $\int x^{a-1}\, dx \left(log \frac{1}{x}\right)^n$ étant proposée, si l'on fait $x^v = z$, cette formule deviendra $\frac{1}{a^{n+1}} \int dx \left(log \frac{1}{z}\right)^n$.

53. Cela posé, il suffira de considérer l'intégrale $\int dx \left(log \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, dans laquelle nous supposerons que a est positif et plus petit que l'unité. Cette quantité étant simplement fonction de a, nous la désignerons par $\Gamma\,(a)$, et nous ferons

$$\Gamma\,(a) = \int dx \left(log \frac{1}{x}\right)^{a-1} \qquad (\gamma)$$

L'objet des recherches suivantes est d'évaluer la fonction $\Gamma\,(a)$, lorsque a est une fraction rationnelle donnée telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., et nous nous proposons particulièrement de comparer entre elles les fonctions qui répondent à des valeurs de a de même dénomination, telles que $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, etc. Enfin nous chercherons aussi à déterminer par approximation la transcendante $\Gamma\,(a)$ pour toute valeur de a rationnelle ou irrationnelle.

54. En prenant les intégrales depuis $x = 0$ jus-

qu'à $x = 1$, et supposant $m > 0$, on a cette formule de réduction :

$$\int x^{\alpha-1}\, dx\, (1-x^{\beta})^{m-1} = \frac{(m-1)\beta}{\alpha+(m-1)\beta} \int x^{\alpha-1}\, dx\, (1-x^{\beta})^{m-2};$$

d'où il suit que si m est un entier, on aura exactement

$$\int x^{\alpha-1}\, dx\, (1-x^{\beta})^{m-1} = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots (m-1)\, \beta^{m-1}}{\alpha.\ \alpha+\beta.\ \alpha+2\beta \ldots \alpha+(m-1)\beta}$$

Désignons par $\Pi\, (\alpha,\ m)$ l'intégrale $\int x^{\alpha-1}\, dx\, (1-x^{\beta})^{m-1}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et dans l'hypothèse que m est un entier positif, on aura donc

$$\frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{\alpha+\beta.\ \alpha+2\beta \ldots \alpha+(m-1)\beta} = \frac{\alpha}{\beta^{m-1}}\, \Pi\, (\alpha,\ m).$$

Dans cette équation mettons successivement λm et $(\lambda+1)\, m$, à la place de m, nous aurons

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots \overline{\lambda m-1}}{\alpha+\beta.\ \alpha+2\beta \ldots \alpha+\overline{\lambda m-1}.\,\beta} = \frac{\alpha}{\beta^{\lambda m-1}}.\ \Pi\, (\alpha,\ \lambda m)$$

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots \overline{\lambda m+m-1}}{\alpha+\beta.\ \alpha+2\beta \ldots \alpha+\overline{\lambda m+m-1}.\,\beta} = \frac{\alpha}{\beta^{\lambda m+m-1}}.\ \Pi\, (\alpha,\ \lambda m+m)$$

Divisant la seconde par la première, et faisant, pour abréger, $\alpha+\lambda m\beta = \alpha'$, il vient

$$\frac{\alpha'.\ \alpha'+\beta.\ \alpha'+2\beta \ldots \alpha'+\overline{m-1}.\,\beta}{\lambda m.\ \lambda m+1.\ \lambda m+2 \ldots \lambda m+m-1} = \beta^{m}.\ \frac{\Pi\, (\alpha,\ \lambda m)}{\Pi\, (\alpha,\ \lambda m+m)};$$

mais en mettant α' à la place de α dans l'équation primitive, on a

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots m-1}{\alpha'+\beta.\ \alpha'+2\beta \ldots \alpha'+\overline{m-1}.\,\beta} = \frac{\alpha'}{\beta^{m-1}}\ \Pi\, (\alpha+\lambda m\beta,\ m)$$

et multipliant ces deux équations entre elles, on a pour produit

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ m-1}{\lambda m.\ \lambda m+1 \ldots\ \lambda m+m-1} = \text{б}.\ \frac{\Pi\,(\alpha,\ \lambda m).\ \Pi\,(\alpha+\lambda m\,\text{б},\ m)}{\Pi\,(\alpha,\ \lambda m+m)}.$$

Le premier membre, en vertu de l'équation primitive, peut être représenté par $\int x^{\lambda m-1}\, dx\, (1-x)^{m-1}$, et parce qu'on peut mettre x^n à la place de x, sans changer les limites de l'intégrale, il peut être aussi représenté par $n\int x^{\lambda mn-1}\, dx\, (1-x^n)^{m-1}$; donc on a

$$n\int x^{\lambda mn-1}\, dx\, (1-x^n)^{m-1} = \text{б}\ \frac{\Pi\,(\alpha,\ \lambda m).\ \Pi\,(\alpha+\lambda m\,\text{б},\ m)}{\Pi\,(\alpha,\ \lambda m+m)}, \quad (\delta)$$

Cette équation ainsi exprimée en un nombre fini de termes, acquiert une plus grande généralité, et ne suppose plus que m est un nombre entier.

En effet les deux membres devant se réduire à une même fonction de m et de λm, laquelle est

$$\frac{1}{\lambda m} - \frac{m-1}{1}.\ \frac{1}{\lambda m+1} + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ 2}.\ \frac{1}{\lambda m+2} - \text{etc.}$$

on est maître de donner à m et λ des valeurs positives quelconques, et à plus forte raison aux quantités α, б, n, qui disparoissent dans les deux membres.

55. Soit donc $\alpha = 1$ et б = à un infiniment petit, on aura

$$1 - x^{\text{б}} = \text{б}\ log\ \frac{1}{x},\ \text{et}\ \Pi\,(\alpha,\ m) = \text{б}^{m-1} \int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{m-1},$$

de sorte qu'on aura en général

$$\Pi\,(1,\ K) = \text{б}^{k-1}.\ \Gamma\,(K).$$

Au moyen de cette formule l'équation (δ) devient

$$n\int x^{\lambda m n-1}\,dx\,(1-x^n)^{m-1}=\frac{\Gamma(\lambda m).\,\Gamma(m)}{\Gamma(\lambda m+m)}.$$

Soit maintenant $m=\frac{q}{n}$, $\lambda m=\frac{p}{n}$, on aura donc

$$\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\,\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}$$

Le premier membre n'est autre chose que la transcendante désignée ci-dessus par $\left(\frac{p}{q}\right)$; ainsi on aura cette équation remarquable.

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\,\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)} \qquad (\varepsilon)$$

D'où l'on voit que la transcendante $\left(\frac{p}{q}\right)$ seroit connue, si on connoissoit, pour la même valeur de n, les fonctions de la forme $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$, a étant entier.

56. Il résulte d'abord de cette valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$ qu'on peut échanger entre eux les nombres p et q, et qu'ainsi on a $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$, ce qui est une des principales propriétés de ces fonctions.

De plus on tire de cette même formule

$$\left(\frac{p}{q}\right).\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\,\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{n^2\,\Gamma\left(\frac{p+q+r}{n}\right)}$$

Dans le second membre il est visible qu'on peut faire

la permutation entre deux des nombres p, q, r, à volonté, ce qui donne le théorème fondamental

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\cdot\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

dont on a ainsi une nouvelle démonstration très-simple.

57. Faisons voir maintenant comment les fonctions Γ se déterminent au moyen des fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Observons d'abord qu'au moyen de l'équation (α) on a en général

$$\Gamma\,(n+1)=n\,\Gamma\,(n), \qquad (\zeta)$$

ce qui permettra de réduire les cas où n est plus grand que l'unité à ceux où il est plus petit.

Si l'on a $n=1$, alors $\Gamma\,(n)$ se réduit à $\int dx=x=1$, ainsi on a

$$\Gamma\,(1)=1. \qquad (\eta)$$

Cela posé, faisons $q=n-p$ dans l'équation (ε), alors la valeur du premier membre est connue, et on a

$$\frac{\varpi}{\sin p\,\varpi}=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n-p}{n}\right)}{n\,\Gamma\,(1)},$$

ou en d'autres termes

$$\Gamma\,(a)\,\Gamma\,(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\,\pi}, \qquad (\theta)$$

Lorsque $a=\frac{1}{2}$, on a $(\Gamma\,a)^2=\pi$; donc

$$\Gamma\,(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}. \qquad (\iota)$$

L'équation (θ) très-remarquable dans cette théorie, fait voir qu'il suffit de connoître la valeur de $\Gamma\,(x)$ depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et on en déduira les autres valeurs de cette fonction depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=0$.

Au reste, la valeur de $\Gamma(x)$ depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, ne varie qu'entre les limites $\sqrt{\pi}$ et 1, ou 1,77245 et 1, tandis que depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 0$, elle varie depuis 1,77245 jusqu'à l'infini; et en particulier lorsque a est infiniment petit, la formule (θ) donne $\Gamma(a) = \frac{1}{a}$.

58. Si dans l'équation (ε) on fait $p = 1$, et qu'on prenne successivement $q = 1, 2, 3 \ldots$ jusqu'à $n - 1$, on aura cette suite d'équations :

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)}$$

Multipliant les $a - 1$ premières équations entre elles, on aura le produit

$$\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{a-1}\right) = \frac{\left(\Gamma\,\frac{1}{n}\right)^a}{n^{a-1}\,\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)},$$

si on les multiplie toutes, ou qu'on fasse $a = n$, le produit donnera,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n\,\sqrt[n]{\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)\right]}$$

Soit donc pour abréger

$$T = \sqrt[n]{\left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cdots \left(\frac{1}{n-1}\right)\right]}$$

et on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = nT,$$

Connoissant $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, on en déduira $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$ par l'équation déjà trouvée, qui donne

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{n\,T^a}{\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{a-1}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)}{T^{n-a}} \dots \quad (\varkappa)$$

Et comme les quantités $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, etc. sont censées connues pour chaque valeur de n, il ne reste plus rien à desirer pour la détermination des fonctions $\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)$.

59. Réciproquement si on connoissoit la valeur de $\Gamma(x)$ pour toute valeur rationnelle de x, moindre que l'unité, il seroit facile de déterminer l'intégrale $\left(\frac{p}{q}\right)$; car on a en général

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}; \quad (\lambda)$$

et s'il arrive que $p+q$ soit $> n$, on changera, d'après l'équation (ζ) cette formule en cette autre

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{(p+q-n)\,\Gamma\left(\frac{p+q-n}{n}\right)} \quad (\lambda)$$

Nous remarquerons que ces formules sont propres à donner l'expression générale de $\left(\frac{p}{q}\right)$ au moyen des quantités de la même espèce $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$, etc. En effet les valeurs de $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)$ étant tirées de la formule ($\varkappa$), on en déduira

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p+2}\right)\cdots\left(\frac{1}{p+q-1}\right)}{\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{q-1}\right)}\cdots \quad (\mu)$$

formule qui servira tant que $p+q$ sera plus petit que n.

Si on a $p+q>n$, il faudra faire usage de la seconde formule, qui donnera par de semblables substitutions

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q-n}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p+2}\right)\cdots\left(\frac{1}{n-1}\right)}{\left(\frac{1}{p+q-n}\right)\left(\frac{1}{p+q-n+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{q-1}\right)}\cdots (\mu)$$

Ces formules répondent aux équations (k) et (n) trouvées ci-dessus, et on les feroit coïncider entièrement en substituant au lieu de chaque quantité $\left(\frac{1}{a}\right)$ sa valeur

$$\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{A_1 \sin (a+1)\,\omega}{\sin \omega};$$

ainsi les fonctions Γ offrent un nouveau moyen direct et très-simple de déterminer l'expression générale des quantités $\left(\frac{p}{q}\right)$.

60. Pour revenir aux quantités $\Gamma(a)$, nous avons déjà trouvé l'équation

$$\Gamma(a).\ \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

au moyen de laquelle les valeurs de la fonction depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$, se déduisent des valeurs supposées connues depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = 1$.

Nous allons prouver ultérieurement qu'il suffit de connoître les valeurs de la fonction dans la moitié de cet intervalle, c'est-à-dire seulement depuis $a = \frac{3}{4}$ jusqu'à $a = 1$, et on en déduira toutes les autres valeurs.

En effet, si l'on suppose $a < \frac{1}{2} n$, l'équation (ε) donne tout à la fois

$$\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{2a}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} n - a}{\frac{1}{2} n - a}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} n - a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} n - a}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{n - 2a}{n}\right)}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (d'), puis mettant simplement a au lieu de $\frac{a}{n}$, et réduisant les fonctions d'après la formule (θ), on aura

$$\Gamma(a) = \frac{2^{1-2a}}{\sqrt{\pi}} \cos a\pi . \Gamma(2a) . \Gamma\left(\tfrac{1}{2} - a\right);$$

équation qui suppose $a < \frac{1}{2}$.

Cette équation combinée avec l'équation (θ) donnera

$$\Gamma(1 - a) = \frac{2^{2a}}{\sqrt{\pi}} \cos a\pi\, \Gamma(1 - 2a)\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2} + a\right);$$

enfin de celle-ci on déduit, en mettant $a - \frac{1}{2}$ au lieu de a,

$$\Gamma(a) = \frac{2^{1-2a}\sqrt{\pi}}{\sin a\pi} . \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - a\right)}{\Gamma(2 - 2a)} . \qquad (\nu)$$

Nous supposons connues les valeurs de $\Gamma(a)$ depuis $a = \frac{3}{4}$ jusqu'à $a = 1$.

Cela posé, 1°. Le second membre de l'équation (ν) sera connu pour toute valeur de a depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = \frac{5}{8}$; donc on connoîtra $\Gamma(a)$ dans ce même intervalle depuis $a = \frac{1}{2}$ jusqu'à $a = \frac{5}{8}$.

2°. Au moyen de ce premier cas, le second membre sera connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$; on connoîtra donc $\Gamma(a)$ toutes les fois que a est compris entre $\frac{11}{16}$ et $\frac{12}{16}$.

3°. Au moyen des deux premiers cas le second membre de l'équation (ν) sera connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{11}{16}$ et $\frac{12}{16}$; donc on connoîtra $\Gamma(a)$ pour toutes les valeurs de a comprises depuis $a = \frac{5}{8} = \frac{20}{32}$ jusqu'à $a = \frac{21}{32}$.

4°. Le second membre sera encore connu si $2 - 2a$ est compris entre $\frac{20}{32}$ et $\frac{21}{32}$; donc $\Gamma(a)$ sera connu depuis $a = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}$ jusqu'à $a = \frac{43}{64}$, et ainsi de suite.

Par ces diverses opérations les valeurs de a pour lesquelles $\Gamma(a)$ devient connu, se rapprochent alternativement de la limite $\frac{2}{3}$, qu'elles n'atteignent cependant qu'à l'infini, puisque $\frac{2}{3}$ ne peut pas s'exprimer exactement en fractions, dont le dénominateur soit une puissance de 2. Mais on voit que par quatre opérations seulement, l'intervalle où $\Gamma(a)$ reste à déterminer, ne s'étend plus que depuis $a = \frac{44}{64}$ jusqu'à $a = \frac{43}{64}$. Une cinquième opération resserreroit cet intervalle de $\frac{43}{64}$ ou $\frac{86}{128}$ à $\frac{85}{128}$, et ainsi de suite.

La limite commune de ces suites est $\frac{2}{3}$ et $\Gamma(\frac{2}{3})$ se détermine directement en faisant $a = \frac{2}{3}$ dans la formule (ν), ce qui donne

$$(\Gamma\,\tfrac{2}{3})^2 = \frac{2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{\pi}}{\sin\frac{1}{3}\pi}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

61. Dans les cas particuliers où l'on chercheroit à déterminer une valeur de $\Gamma(a)$, on ne doit s'embarrasser aucunement de la distinction des cas précédens, et l'application immédiate de la formule (v), répétée autant de fois qu'il est nécessaire, ou jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'inconnue à déterminer, conduira toujours au résultat qu'on cherche.

Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de $\Gamma\,(0.675)$, on aura directement

$$\Gamma\,(0.675) = \frac{2^{-0.35}\sqrt{\pi}}{\sin 58^\circ\, 30'}\cdot\frac{\Gamma\,(0.825)}{\Gamma\,(0.65)}.$$

Dans le second membre $\Gamma\,(0.65)$ est inconnue; pour la trouver il faudra faire une seconde application de la formule, et on aura

$$\Gamma\,(0.65) = \frac{2^{-0.30}\sqrt{\pi}}{\sin 63^\circ}\cdot\frac{\Gamma\,(0.85)}{\Gamma\,(0.70)};$$

une troisième application donnera

$$\Gamma\,(0.70) = \frac{2^{-0.40}\sqrt{\pi}}{\sin 54^\circ}\cdot\frac{\Gamma\,(0.8)}{\Gamma\,(0.6)};$$

enfin une quatrième

$$\Gamma\,(0.60) = \frac{2^{-0.20}\sqrt{\pi}}{\sin 72^\circ}\cdot\frac{\Gamma\,(0.9)}{\Gamma\,(0.8)},$$

d'où en remontant on conclura la valeur de $\Gamma\,(0.675)$ exprimée en quantités connues. Cette détermination est un peu longue dans ce cas, parce que 0.675 approche beaucoup de la limite $\frac{2}{3}$.

62. Pour rendre aussi simple qu'il est possible l'usage des fonctions Γ, nous joignons ici une table des logarithmes de ces fonctions pour toute valeur de a, de cinq en cinq millièmes, depuis $a = 1.000$ jusqu'à $a = 0.500$. Cette table est facile à interpoler pour toute autre valeur comprise dans ces limites, au moyen des différences première et seconde dont chaque logarithme est accompagné. Voici la formule à suivre pour cet objet.

Soit $log.\ \Gamma\,(a) = L$, et soient les différences correspondantes Δ', Δ'', Δ''', etc. en sorte qu'on ait

$$Log.\ \Gamma\,(a - 0.005) = L + \Delta'$$
$$Log.\ \Gamma\,(a - 0.010) = L + 2\,\Delta' + \Delta''$$
$$Log.\ \Gamma\,(a - 0.015) = L + 3\,\Delta' + 3\,\Delta'' + \Delta'''$$
etc.

on en conclura, en faisant $m = 200\,k$,

$$Log.\ \Gamma\,(a - k) = L + m\,\Delta' + \frac{m.\,m - 1}{2}\,\Delta'' + \frac{m.m - 1\ m - 2}{2.\,3}\,\Delta''' + \text{etc.} \quad (c)$$

Comme m sera toujours moindre que l'unité, le coefficient $\frac{m.\,m-1}{2}$ ne pourra excéder $\frac{1}{8}$, et $\frac{m.\,m - 1.\,m - 2}{2.\,3}$ ne pourra excéder $\frac{1}{15}$; d'ailleurs la différence troisième Δ''' qui se prend à vue, ne sera que de quelques unités décimales du septième ordre.

63. Soit par exemple $a = 1$ et $k < 0.005$, on aura $L = 0$, $\Delta' = 0.0012624$, $\Delta'' = 0.0000179$, $\Delta''' = 0.0000002$; delà résulte

$$Log.\ \Gamma\,(1 - k) = k\,(0.25070) + k^2\,(0.357),$$

Ce logarithme est un logarithme vulgaire; en le multipliant par 2.3025, etc., pour le rendre hyperbolique, on aura

$$L.\,\Gamma.(1-k) = k\,(0.57716) + k^2\,(0.813);$$

Soit $P = 0.57716$ et $Q = 0.813$; ayant $L\,\Gamma(1-k) = Pk + Qk^2$, on en déduit

$$\Gamma\,(1-k) = 1 + Pk + (Q + \tfrac{1}{2}P^2)\,k^2;$$

mais l'équation (θ) donne

$$\Gamma\,(k).\,\Gamma\,(1-k) = \frac{\pi}{\sin \pi k} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{\pi^2 k^2}{6}\right);$$

donc

$$\Gamma\,(k) = \frac{1}{x}.\,\frac{1 + \frac{\pi^2}{6}\,k^2}{1 + Pk + (Q + \frac{1}{2}P^2)\,k^2} = \frac{1}{k}\left[1 - Pk + \left(\tfrac{1}{2}P^2 - Q + \tfrac{\pi^2}{6}\right)k^2\right].$$

64. Au moyen de cette formule, il est facile de déterminer la valeur de $\left(\frac{p}{q}\right)$ lorsque p et q sont censés très-petits par rapport à n; si l'on fait pour un moment

$$\Gamma\,(k) = \frac{1}{k}\,(1 - P\,k + P'\,k^2),$$

on tirera delà les valeurs de $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$, $\Gamma.\left(\frac{q}{n}\right)$, $\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)$, lesquelles étant substituées dans l'équation (ε), donneront

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq}\left[1 + (P^2 - 2\,P')\,\frac{pq}{n^2}\right];$$

comparant cette formule à l'équation (l') trouvée ci-dessus, on voit qu'il doit y avoir entre P et P' cette relation,

$$2\,P' - P^2 = \frac{\pi^2}{6},$$

et substituant la valeur $P' = \frac{1}{2} P^2 - Q + \frac{\pi^2}{6}$, on aura exactement

$$Q = \frac{\pi^2}{12} = 0.822467.$$

Nous avions trouvé $Q = 0.813$, mais cette valeur est tirée d'une approximation qui devroit être poussée plus loin pour donner avec certitude trois décimales exactes.

La valeur connue de Q servira à rectifier celle de P', et même celle de $\Gamma(k)$; car on aura exactement jusqu'aux quantités de l'ordre k^2

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \left\{ \begin{array}{l} 1 - Pk + \frac{1}{2} P^2 k^2 \\ \qquad + \frac{1}{12} \pi^2 k^2 \end{array} \right\}. \qquad (\pi)$$

Quant à la valeur de P, nous l'avons trouvée 0.57716; mais en poussant l'approximation plus loin on trouveroit

$$P = 0.5772156649,$$

ainsi qu'on le fera voir ci-après.

65. On a déjà trouvé $\Gamma(1) = 1$; d'ailleurs l'équation $\Gamma(1 + a) = a\,\Gamma(a)$, donne aussi $\Gamma(2) = 1$. Delà on voit que dans l'intervalle depuis $a = 1$ jusqu'à $a = 2$, la quantité $\Gamma(a)$ doit devenir *maximum* ou *minimum*.

On reconnoît aisément, après quelques essais, que c'est le *minimum* qui a lieu, et alors on a

$$a = 1.4616038$$
$$\Gamma(a) = 0.8856033$$
$$log.\ \Gamma(a) = 9.9472392.$$

Après $a = 2$, la fonction $\Gamma(a)$ augmente indéfiniment, puisqu'on a $\Gamma(2 + a) = (1 + a)\,\Gamma(1 + a)$, etc. Donc la valeur que nous venons de trouver est la plus

petite de toutes celles que peut prendre $\Gamma(a)$ depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \infty$.

D'après cette observation on voit que la meilleure manière de former une table des valeurs de $\Gamma(a)$, seroit de la calculer pour tout l'intervalle depuis $a = 1$ jusqu'à $a = 2$. Car dans cet intervalle, la fonction ne varie qu'entre les limites 1 et 0.8856033; d'où l'on voit que les différences seroient très-petites, et la table très-facile à interpoler.

D'ailleurs au moyen de la formule $\Gamma(1 + a) = a\Gamma a$, on rameneroit aisément toute fonction proposée à celles qui sont données dans la table; on auroit par exemple $\Gamma(\frac{5}{8}) = \frac{8}{5}\Gamma(1 + \frac{5}{8})$, $\Gamma(\frac{15}{4}) = \frac{11}{4}\Gamma\frac{11}{4} = \frac{11}{4}.\frac{7}{4}\Gamma(\frac{7}{4})$, et ainsi des autres.

66. La table que nous joignons ici est formée, ainsi que nous l'avons déjà dit, pour l'intervalle depuis $a = 1$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$; par son moyen il est facile d'évaluer dans tous les cas la transcendante $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répond à une valeur donnée de n. Pour cela on se servira de l'une des formules (λ), et on y joindra, s'il est nécessaire, la formule $\Gamma(a)\,\Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, afin de réduire tous les cas à ceux où a est compris entre 1 et $\frac{1}{2}$.

Soit proposé par exemple de trouver la valeur de la transcendante $Z = (\frac{3}{8})$ dans le cas de $n = 10$; la seconde des formules (λ) donnera

$$Z = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)\Gamma\left(\frac{8}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)}$$

ensuite la formule (θ) donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{10}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{10}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{10}\right)};$$

donc

$$Z = \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)\Gamma\left(\frac{8}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}$$

Cette valeur étant ainsi préparée, on trouve au moyen de la table

$$Log.\, Z = 9.5635972$$

et par conséquent

$$Z = 0.3660978.$$

67. Il reste à faire voir comment nous avons construit la table au moyen de laquelle on trouve si facilement, dans tous les cas, la valeur des fonctions Γ et $\left(\frac{p}{q}\right)$. La méthode la plus simple qu'on puisse proposer pour cet objet est celle qui résulte d'une formule donnée par Euler dans son *Calc. diff.*, page 465, et que nous allons rapporter.

Si on appelle S la somme de la suite

$$log.\,1 + log.\,2 + log.\,3 \ldots + log.\,k$$

on aura

$$S = k\; log.\,k + \tfrac{1}{2}\, log.\,(2\pi k) - k + \frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \frac{C'}{5.6\,k^5} - \text{etc.}$$

A', B', C', etc. étant les nombres Bernoulliens. Soit donc c le nombre dont le logarithme est 1 et R un nombre tel qu'on ait

$$Log.\, R = \frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \frac{C'}{5.6\,k^5} + \text{etc.}$$

on aura le produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = \left(\frac{k}{e}\right)^k (2\pi k)^{\frac{1}{2}} \cdot R. \qquad (\rho)$$

Le premier membre est la valeur de $\Gamma(k+1)$, lorsque k est un nombre entier; et comme le second membre est une fonction continue de k, on a généralement, quelque soit k,

$$\Gamma(k+1) = \left(\frac{k}{e}\right)^k (2\pi k)^{\frac{1}{2}} R. \qquad (\sigma)$$

Telle est la formule par laquelle on pourra dans tous les cas déterminer la valeur approchée de $\Gamma(k+1)$; mais il est à propos de faire à ce sujet quelques observations.

68. La quantité R peut se développer suivant les puissances de $\frac{1}{k}$; car on a $R = 1 + \log. R + \frac{1}{2}\log.^2 R + \frac{1}{2 \cdot 3}\log.^3 R +$ etc. Substituant donc la valeur de $\log. R$, et mettant au lieu des coefficiens A', B', C', etc. leurs valeurs connues $A' = \frac{1}{6}$, $B' = \frac{1}{30}$, $C' = \frac{1}{42}$, $D' = \frac{1}{30}$, etc., on aura

$$R = 1 + \frac{1}{12k} + \frac{1}{2(12k)^2} - \frac{139}{30(12k)^3} - \frac{571}{120(12k)^4} - \text{etc.}$$

Dans cette suite si on appelle M la partie

$$1 + \frac{1}{2(12k)^2} - \frac{571}{120(12k)^4} - \text{etc.}$$

où k est élevé à des puissances paires, et N l'autre partie, on aura $M^2 - N^2 = 1$; de sorte qu'on peut prendre indifféremment $R = M + N$, ou $R = \frac{1}{M - N}$. En effet, comme toutes les puissances de k sont impaires

dans *log.* R, le changement du signe de k donnera $log. (M+N) = - log. (M - N)$, ou $log. (M^2 - N^2) = 0$. Donc $M^2 - N^2 = 1$.

69. Il est à remarquer que la suite

$$\frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \frac{C'}{5.6\,k^5} - \text{etc.}$$

même en supposant k assez grand, n'est convergente que dans un certain nombre des premiers termes; car on sait que les nombres Bernoulliens, dont les expressions sont fort irrégulières, croissent continuellement, de manière que si T et V sont deux termes consécutifs fort éloignés, l'un du rang n, l'autre du rang $n+1$, on a $\frac{n^2}{\pi^2}$ pour la limite du rapport $\frac{V}{T}$. Cette suite, qui commence par être convergente pendant un assez grand nombre de termes, surtout si k est un peu grand, finit donc par être divergente, et donneroit une valeur de *log.* R d'autant plus fautive, qu'on prendroit plus de termes au-delà de ceux où elle cesse d'être convergente.

Delà on voit que pour une valeur donnée de k, il y a un terme qu'on ne doit pas passer dans le calcul de la suite

$$\frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \text{etc.}$$

Le terme auquel il faut s'arrêter est celui qui seroit suivi d'un terme plus grand, alors l'approximation ne peut aller plus loin; mais elle sera tout aussi étendue qu'on voudra en prenant k suffisamment grand.

Il en seroit de même de la série

$$R = 1 + \frac{1}{12\,k} + \frac{1}{2\,(12\,k)^2} - \text{etc.};$$

mais celle-ci n'est pas d'un usage aussi facile que la série

$$\frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \text{etc.}$$

dont la loi est manifeste, et ne dépend que des nombres Bernoulliens.

On peut fixer *à priori* le nombre de termes après lequel la suite

$$\frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \text{etc.}$$

cesse d'être convergente; car en considérant les deux termes consécutifs

$$\pm \frac{T^{(n)}}{2n.\,2n-1.\,k^{2n-1}} \mp \frac{T^{(n+1)}}{2n+2.\,2n+1.\,k^{2n+1}},$$

et les supposant égaux, on aura

$$\frac{T^{(n+1)}}{T^{(n)}} = \frac{2n+2.\,2n+1}{2n.\,2n-1}\,k^2;$$

mais plus n est grand, plus le premier membre approche de la limite $\frac{2n+2.\,2n+1}{4\pi^2}$ (*Eul. Calc. diff.*, page 429). Donc on aura à très-peu près $n = \pi k$. Ainsi en faisant $k = 5$, on a $n = 15$ ou 16, c'est-à-dire que la série cesse d'être convergente vers le 15ème terme; si on faisoit $k = 10$, la série ne cesseroit d'être convergente que vers le 31ème terme, et ainsi de suite.

71. On peut en même temps avoir la mesure du degré d'approximation que l'on peut obtenir avec une valeur donnée de k. En effet si on appelle Ω le $n^{ème}$ terme de la suite

$$\frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \text{etc.},$$

on aura

$$\Omega = \frac{T^{(n)}}{2n(2n-1)k^{2n-1}},$$

et comme on a à très-peu près

$$T^{(n)} = \frac{1.2.3\ldots.2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}},$$

on pourra faire

$$\Omega = \frac{1.2.3\ldots.2n-2}{\pi(2\pi k)^{2n-1}}.$$

Cette valeur, au moyen de la formule (ρ), devient

$$\Omega = \frac{\left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-\frac{3}{2}}(2\pi e)^{\frac{1}{2}}}{\pi(2\pi k)^{2n-1}},$$

et en mettant n au lieu de πk, on en déduit aisément

$$Log.\ \Omega = -2n - \tfrac{2}{2}\,log.\ (\pi n).$$

Ainsi faisant $k = 5$, et $n = 16$, on aura $log.\ \Omega = -33.96$. A ce logarithme hyperbolique répond le logarithme vulgaire -14.75, de sorte qu'on a $\Omega = 10^{-14.75}$. Donc au moyen des 16 premiers termes de la suite $\frac{A'}{1.2k} - \frac{B'}{3.4k^3}$ + etc., on aura la valeur de $log.\ R$ approchée jusqu'à 15 décimales environ. Si on faisoit $k = 10$, on pourroit avoir 29 ou 30 décimales exactes, et ainsi de suite.

72. Cette théorie est facile à vérifier, puisque toutes les fois que k est un entier, la valeur de $\Gamma(k+1)$ est exactement 1. 2. 3.... k.

Soit par exemple $k = 3$, il résulte des formules précédentes que la série égale à $log.\ R$ cessera d'être convergente après un nombre de termes $n = k\pi = 9$ ou 10, et que le nombre de décimales exactes obtenues par ces neuf ou dix termes, sera de 8 ou 9.

En effet, la vraie valeur de $log.\ R$ se déduit de l'équation $6 = \left(\frac{3}{e}\right)^3 (6\pi)^{\frac{1}{2}} R$, laquelle donne

$$Log.\ R = 0{\cdot}02767\ 79256\ 86.$$

Cette même valeur déduite de la suite

$$Log.\ R = \frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \frac{C'}{5.6\,k^5} - \text{etc.}$$

se trouve en calculant successivement les différens termes, comme il suit :

1er terme	+	0·02777 77777 78
2e	—	0·00010 28806 58
		0·02767 48971 20
3e	+	32660 53
		0·02767 81631 73
4e	—	2721 71
		0·02767 78910 02
5e	+	427 65
		0·02767 79337 67
6e	—	108 24
		0·02767 79229 43
7e	+	40 21
		0·02767 79269 64
8e	—	20 59
		0·02767 79249 05
9e	+	13 91
		0·02767 79262 96
10e	—	11 98
		0·02767 79250 98
11e	+	12 81
		0·02767 79263 79

On voit que conformément à la formule, la série cesse d'être convergente passé le $10^{\text{ème}}$ terme, et que la valeur de *log*. R qui en est déduite, doit être comprise entre 0.02767 7926296 et 0.02767 7925098, ce qui donne par un milieu

$$Log.\ R = 0.02767\ 7925697,$$

valeur exacte presque jusqu'à la onzième décimale. Mais en continuant la suite plus loin, on s'éloigneroit de plus en plus du vrai résultat.

Cet exemple met dans tout son jour la manière de tirer tout le parti possible pour les approximations, des suites *demi-convergentes*, c'est-à-dire des suites qui sont convergentes dans les premiers termes, et qui deviennent ensuite divergentes.

73. Au moyen de la formule (σ) on peut développer en série la fonction $\Gamma(k)$ lorsque k est très-petit. Pour cela observons d'abord que $\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k)$, et qu'ainsi on aura

$$\Gamma(k) = e^{-k}\, k^{k-\frac{1}{2}}\, (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, R$$

d'où

$$Log.\ \Gamma(k) = (k-\tfrac{1}{2})\ log.\ k - k + \tfrac{1}{2}\, l(2\pi) + \frac{A'}{1.2\,k} - \frac{B'}{3.4\,k^3} + \text{etc.} \qquad (\tau)$$

Cette formule ne peut servir que pour des valeurs de k plus grandes que l'unité; mais si l'on met $1+k$ au lieu de k, et qu'au lieu du premier membre qui deviendra *log*. $\Gamma(1+k)$ on mette sa valeur *log*. k + *log*. $\Gamma(k)$, on en tirera de nouveau,

$$Log.\ \Gamma(k) = -\,log.\ k + (\tfrac{1}{2}+k)\ log.\ (1+k) - 1 - k + \tfrac{1}{2}\ log.\ (2\pi)$$
$$+ \frac{A'}{1.2\,(1+k)} - \frac{B'}{3.4\,(1+k)^3} + \frac{C'}{5.6\,(1+k)^5} - \text{etc.}$$

et le développement étant fait jusqu'aux quantités de l'ordre k^2 exclusivement, on aura

$$Log.\ \Gamma(k) = -\ log.\ k + \tfrac{1}{2}\ log.\ (2\pi) - 1 + \frac{A'}{1.\ 2} - \frac{B'}{3.\ 4} + \frac{C'}{5.\ 6} - \text{etc.}$$
$$- k\left(\frac{1}{2} + \frac{A'}{2} - \frac{B'}{4} + \frac{C'}{6} - \text{etc.}\right)$$

Lorsqu'on fait $k = 0$, on doit avoir $log.\ \Gamma(k) = -log.\ k$, parce que $k\,\Gamma(k) = \Gamma(1+k)$, et qu'en faisant $k = 0$ le second membre $= \Gamma(1) = 1$; donc on doit avoir

$$\tfrac{1}{2}\ log.\ (2\pi) - 1 + \frac{A'}{1.\ 2} - \frac{B'}{3.\ 4} + \frac{C'}{5.\ 6} - \text{etc.} = 0.$$

Et en effet Euler a trouvé cette égalité, page 466 de son *Calc. diff.* Cela posé, la valeur précédente se réduit à celle-ci,

$$Log.\ \Gamma(k) = -\ log.\ k - k\left(\frac{1}{2} + \frac{A'}{2} - \frac{B'}{4} + \frac{C'}{6} - \text{etc.}\right).$$

Or, dans l'ouvrage cité, page 444, on trouve encore l'égalité

$$C = \tfrac{1}{2} + \frac{A'}{2} - \frac{B'}{4} + \frac{C'}{6} - \text{etc.}$$

C étant une constante dont la valeur calculée avec précision par une autre voie, est

$$C = 0.5772156649015325.$$

Donc enfin on aura, k étant très-petit,

$$Log.\ \Gamma(k) = -\ log.\ k - C\,k.$$

Nous avons trouvé ci-dessus en poussant l'approximation plus loin,

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k}\left[1 - P\,k + \left(\frac{1}{2}P^2 + \frac{\pi^2}{12}\right)k^2\right];$$

Delà on voit que $P = C$, et qu'ainsi P n'est autre chose que la constante C dont on vient de donner la valeur approchée jusqu'à seize décimales.

Nous connoissons donc maintenant la valeur de $\Gamma\,(k)$ très-approchée, lorsque k est très-petit, et on pourroit en approcher encore davantage en poussant le développement plus loin.

74. Mais voici des considérations qui mènent plus généralement et plus directement au même but. Soit

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots . + \frac{1}{x},$$

$$N = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{etc.}$$

cette dernière suite étant prolongée à l'infini.

Nous regarderons la quantité M comme une fonction continue de x, puisqu'en effet on a (*Calc. diff.*, p. 443).

$$M = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.},$$

formule qui est propre à donner la valeur approchée de M, quelque soit x, pourvu qu'on suppose x plus grand que l'unité. Cette même formule donneroit la valeur de M, lorsque x est plus petit que l'unité ; car en représentant par $M\,(x)$ et par $M\,(x+1)$ des fonctions semblables de x et de $x+1$, on a évidemment

$$M\,(x) = M\,(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

ou encore

$$M\,(x) = M\,(x+2) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

etc.

de sorte que x étant plus petit que l'unité, on aura la fonction $M(x)$ ou M, au moyen d'une semblable fonction où x sera augmenté de plusieurs unités, et qui rendra la suite précédente assez convergente dans les premiers termes, pour qu'elle puisse donner toute l'approximation qu'on peut désirer.

75. Cela posé, si x devient $x+\omega$, (ω étant plus petit que l'unité), les fonctions M et N, qui peuvent être représentées par $M(x)$ et $N(x)$, deviendront $M(x+\omega)$ et $N(x+\omega)$. Or, je dis que la somme $M(x)+N(x) = M(x+\omega)+N(x+\omega)$, et que les deux sommes sont égales à une même constante.

En effet, si la suite qui a pour somme $N(x)$, au lieu d'être prolongée à l'infini, étoit continuée seulement jusqu'au terme $\frac{1}{x+m}$, m étant un nombre très-grand, la somme $M(x)+N(x)$ et la somme $M(x+\omega)+N(x+\omega)$, ne pourroient différer entre elles que d'une quantité moindre que $\frac{1}{x+m+1}$, puisque cette différence est celle qui a lieu lorsque $\omega = 1$. Or m étant très-grand la différence $\frac{1}{x+m+1}$ est censée nulle ; à plus forte raison le sera-t-elle, lorsque la suite $N(x)$ sera prolongée à l'infini. On aura donc

$$M+N = const. = C';$$

mais puisque la valeur de N est

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}+\text{etc.}$$

si on développe chacune de ces fractions, dans l'hypothèse que x est plus petit que l'unité, on aura

$$N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$- x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

La première partie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$ n'est autre chose que la constante C'; donc on aura

$$M = S_2\, x - S_3\, x^2 + S_4\, x^3 - S_5\, x^4 + \text{etc.} \qquad (\upsilon)$$

S_n représentant en général la somme des puissances réciproques de degré n des nombres naturels.

76. Mais dans l'hypothèse de $x > 1$, on a, d'après l'équation (τ)

$$\frac{d\, log.\, \Gamma(x)}{dx} = log.\, x - \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \text{etc.}$$

et dans la même hypothèse on a

$$M = log.\, x + C + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \text{etc.}$$

Donc

$$\frac{d\, log.\, \Gamma(x)}{dx} = -\frac{1}{x} + M - C \qquad (\varphi)$$

équation qui doit avoir lieu quelque soit x, puisque M peut être regardée comme une fonction continue de x.

Si maintenant on suppose $x < 1$, ce qui permettra d'employer la suite (υ), on aura

$$\frac{d\, log.\, \Gamma(x)}{dx} = -\frac{1}{x} - C + S_2\, x - S_3\, x^2 + S_4\, x^3 - \text{etc.}$$

d'où résulte en intégrant

$$Log.\ \Gamma(x) = -\ log.\ x - Cx + \tfrac{1}{2} S_2 x^2 - \tfrac{1}{3} S_3 x^3 + \tfrac{1}{4} S_4 x^4 - \text{etc.} \quad (\psi)$$

On n'ajoute pas de constante, parce que $x\,\Gamma(x)$ ou $\Gamma(1+x)$ se réduit à l'unité lorsque $x = 0$.

77. La formule (ψ) qui donne un développement complet de *log.* $\Gamma(x)$, servira à exprimer la valeur de toute fonction proposée $\Gamma(z)$, puisque cette fonction peut toujours être ramenée au cas où z est plus petit que $\frac{1}{2}$, et même à celui où z est plus petit que $\frac{1}{4}$.

De la formule (ψ) on déduit immédiatement la suivante

$$Log.\ \Gamma(1+x) = -\ Cx + \tfrac{1}{2} S_2 x^2 - \tfrac{1}{3} S_3 x^3 + \tfrac{1}{4} S_4 x^4 - \text{etc.} \quad (\omega)$$

et en changeant dans celle-ci le signe de x, on auroit

$$Log.\ \Gamma(1-x) = Cx + \tfrac{1}{2} S_2 x^2 + \tfrac{1}{3} S_3 x^3 + \tfrac{1}{4} S_4 x^4 + \text{etc.} \quad (\alpha')$$

Formules également propres à faire trouver dans chaque cas proposé la valeur de $\Gamma(z)$, puisqu'on peut toujours ramener cette fonction soit à la forme $\Gamma(1+x)$, soit à la forme $\Gamma(1-x)$, x n'excédant pas $\frac{1}{4}$.

Ainsi on a des séries régulières et toujours convergentes pour calculer la valeur d'une fonction donnée $\Gamma(z)$; elles supposent seulement l'emploi des quantités S_2, S_3, S_4, etc., dont Euler a donné les valeurs numériques fort approchées jusqu'à S_{15} (*Calc. diff.*, page 456).

Nous devons observer que la formule (ω) revient à celle qu'on voit dans l'ouvrage cité, page 800; il paroît seulement qu'Euler n'a pas aperçu l'usage que cette suite pouvoit avoir dans la détermination des fonctions

$\Gamma\,(x)$ dont il s'est occupé dans d'autres endroits de ses ouvrages.

Remarquons encore qu'on peut déduire de la formule (ω), cette valeur de C

$$C = -\frac{1}{x}\,log.\,\Gamma\,(1+x) + \tfrac{1}{2}\,S_2\,x - \tfrac{1}{3}\,S_3\,x^2 + \tfrac{1}{4}\,S_4\,x^3 - \text{etc.}$$

d'où l'on voit qu'il suffit de connoître une valeur particulière de $\Gamma\,(1+x)$, et qu'on aura la valeur de C exprimée par une suite d'autant plus convergente que x sera plus petit. Si l'on fait $x = \frac{1}{2}$, on aura

$$\Gamma\,(1+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,\sqrt{\pi},$$

d'où résulte :

$$C = log.\,\frac{4}{\pi} + \tfrac{1}{2}\,S_2.\,\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\,S_3.\,\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\,S_4.\,\tfrac{1}{8} - \text{etc.}$$

78. Les deux équations $\Gamma\,(1+x) = x\,\Gamma\,(x)$, et $\Gamma\,(x)\,\Gamma\,(1-x) = \frac{\pi}{sin\,\pi\,x}$, donnent

$$\Gamma\,(1+x)\,\Gamma\,(1-x) = \frac{\pi\,x}{sin\,\pi\,x}; \qquad (\varsigma')$$

prenant les logarithmes des deux membres, et substituant les valeurs données par les formules (ω) et (α'), on aura

$$Log.\left(\frac{\pi\,x}{sin\,\pi\,x}\right) = S_2\,x^2 + \frac{1}{2}\,S_4\,x^4 + \frac{1}{3}\,S_6\,x^6 + \text{etc.}$$

Formule connue, et qui par sa différencielle sert à déterminer les valeurs des quantités S_2, S_4, S_6, etc.

On peut faire usage de cette formule pour rendre

encore plus convergentes les suites contenues dans les équations (ω) et (α'): on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned}Log.\,\Gamma(1+x)&=\tfrac{1}{2}\,log.\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\right)-Cx-\tfrac{1}{3}S_3x^3-\tfrac{1}{5}S_5x^5-\text{etc.}\\Log.\,\Gamma(1-x)&=\tfrac{1}{2}\,log.\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\right)+Cx+\tfrac{1}{3}S_3x^3+\tfrac{1}{5}S_5x^5+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(\gamma')$$

La dernière, en faisant $x=\frac{1}{2}$ donne

$$C=L\,2-\tfrac{1}{3}\,S_3.\,\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\,S_5.\,\tfrac{1}{16}-\text{etc.}$$

valeur plus convergente que celle de l'art. 77.

79. Ayant l'expression développée de $log.\,\Gamma\,(x)$, par la formule (ψ), on peut pareillement avoir celle du logarithme de la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$; car puisqu'on a trouvé

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)},$$

si on prend les logarithmes de chaque membre, et qu'on désigne par Z la fonction $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répond à une valeur donnée de n, on aura

$$\left.\begin{aligned}Log.\,Z=log.\left(\frac{p+q}{pq}\right)&-\tfrac{1}{2}\,S_2.\,\frac{(p+q)^2-p^2-q^2}{n^2}\\&+\tfrac{1}{3}\,S_3.\,\frac{(p+q)^3-p^3-q^3}{n^3}\\&-\tfrac{1}{4}\,S_4.\,\frac{(p+q)^4-p^4-q^4}{n^4}\\&+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(\delta')$$

Les deux premiers termes de cette formule s'accordent avec l'équation (I'); mais on voit ici la loi générale du développement qu'on peut continuer à volonté, et qui

donne une suite d'autant plus convergente que p et q seront plus petits par rapport à n.

Ainsi pour la fonction $\left(\frac{a}{a}\right)$ désignée ci-dessus par M, on aura

$$Log.\ M_a = log.\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{1}{2} S_2 (2^2 - 2) \frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{3} S_3 (2^3 - 2) \frac{a^3}{n^3} - \text{etc.}$$

80. Il reste à expliquer comment a été calculée la table ci-jointe des valeurs de $log.\ \Gamma(a)$. Pour cela nous avons fait $k = 4 + a$ dans la formule (τ), (on auroit pu prendre également $k = 3 + a$, $k = 5 + a$, etc.) Alors le premier membre donnant la valeur de $log.\ \Gamma(4 + a)$, nous en avons déduit $log.\ \Gamma(a)$ par la relation connue entre ces quantités; savoir:

$$\Gamma(4 + a) = (3 + a)(2 + a)(1 + a)\, a\, \Gamma(a).$$

Nous avons donc eu à calculer la formule

$$Log.\,\Gamma(a) = (k - \tfrac{1}{2})\, log.\, k + \tfrac{1}{2} l(2\pi) - mk + \frac{mA'}{1.2k} - \frac{mB'}{3.4k^3} + \frac{mC'}{5.6k^5} - \text{etc.}$$
$$- log.\,[a(1+a)(2+a)(3+a)]$$

dans laquelle on a introduit le facteur $m = 0.43429$, etc. afin de réduire tout aux logarithmes des tables.

De cette manière on n'a jamais eu besoin de calculer plus de deux ou trois termes de la série $\frac{mA'}{1.2k} - \frac{mB'}{3.4k^3} + \frac{mC'}{5.6k^5} -$ etc., pour avoir $log.\ \Gamma(a)$ approché jusqu'à sept décimales, dans tout l'intervalle depuis $a = 1$ jusqu'à $a = \frac{1}{2}$.

81. Nous remarquerons en finissant que les intégrales

de la forme $\int e^{-t^m}\, t^n\, dt$, prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, peuvent être ramenées aux fonctions $\Gamma\,(a)$. En effet soit d'abord $t^{n+1} = z$, et $\frac{m}{n+1} = \alpha$, l'intégrale précédente deviendra $\int \frac{1}{n+1} . e^{-z^\alpha} dz$, celle-ci devant encore être prisè depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$.

Delà on voit que l'intégrale proposée ne perd pas de sa généralité en faisant $n = 0$, et qu'ainsi on peut se proposer simplement l'intégrale $\int e^{-t^m} dt$. Si dans celle-ci on fait $e^{-t^m} = x$, ou $t = \left(l\, \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}}$, la transformée sera $\frac{1}{m} \int dx \left(l\, \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}-1}$, et cette nouvelle intégrale devra être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; on aura donc généralement

$$\int e^{-t^m}\, dt = \frac{1}{m}\, \Gamma\left(\frac{1}{m}\right).$$

Ainsi les intégrales dont il s'agit n'offrent point une nouvelle espèce de transcendantes, et se rapportent immédiatement aux fonctions Γ.

Table des Logarithmes de la fonction Γ (a) *pour toutes les valeurs de* a, *de cinq en cinq millièmes, depuis* a = 1.000 *jusqu'à* a = 0.500.

a	*Log.* Γ	*Diff.* 1re	*Diff.* 2e	*a*	*Log.* Γ	*Diff.* 1re	*Diff* 2e
1.000	0.0000000	12624	179	0.850	0.0462937	18686	230
0.995	0.0012624	12803	182	0.845	0.0481623	18916	231
0.990	0.0025427	12985	182	0.840	0.0500539	19147	234
0.985	0.0038412	13167	184	0.835	0.0519686	19381	236
0.980	0.0051579	13351	186	0.830	0.0539067	19617	238
0.975	0.0064930	13537	187	0.825	0.0558684	19855	241
0.970	0.0078467	13724	187	0.820	0.0578539	20096	243
0.965	0.0092191	13911	189	0.815	0.0598635	20339	244
0.960	0.0106102	14101	192	0.810	0.0618974	20583	247
0.955	0.0120203	14293	192	0.805	0.0639557	20830	250
0.950	0.0134496	14485	194	0.800	0.0660387	21080	252
0.945	0.0148981	14679	195	0.795	0.0681467	21332	255
0.940	0.0163660	14874	198	0.790	0.0702799	21587	257
0.935	0.0178534	15072	199	0.785	0.0724386	21844	259
0.930	0.0193606	15271	200	0.780	0.0746230	22103	263
0.925	0.0208877	15471	202	0.775	0.0768333	22366	265
0.920	0.0224348	15673	203	0.770	0.0790699	22631	267
0.915	0.0240021	15876	206	0.765	0.0813330	22898	270
0.910	0.0255897	16082	207	0.760	0.0836228	23168	274
0.905	0.0271979	16289	209	0.755	0.0859396	23442	276
0.900	0.0288268	16498	210	0.750	0.0882838	23718	279
0.895	0.0304766	16708	212	0.745	0.0906556	23997	281
0.890	0.0321474	16920	215	0.740	0.0930553	24278	285
0.885	0.0338394	17135	216	0.735	0.0954831	24563	288
0.880	0.0355529	17351	217	0.730	0.0979394	24851	291
0.875	0.0372880	17568	220	0.725	0.1004245	25142	294
0.870	0.0390448	17788	221	0.720	0.1029387	25436	298
0.865	0.0408236	18009	224	0.715	0.1054823	25734	301
0.860	0.0426245	18233	226	0.710	0.1080557	26035	304
0.855	0.0444478	18459	227	0.705	0.1106592	26339	308

a	*Log.* Γ	*Diff.* 1re	*Diff.* 2e	*a*	*Log.* Γ	*Diff.* 1re	*Diff.* 2e
0·700	0·1132931	26647	312	0·550	0·2084748	37925	463
0·695	0·1159578	26959	314	0·545	0·2122673	38388	470
0·690	0·1186537	27273	319	0·540	0·2161061	38858	478
0·685	0·1213810	27592	322	0·535	0·2199919	39336	486
0·680	0·1241402	27914	326	0·530	0·2239255	39822	493
0·675	0·1269316	28240	330	0·525	0·2279077	40315	502
0·670	0·1297556	28570	333	0·520	0·2319392	40817	509
0·665	0·1326126	28903	339	0·515	0·2360209	41326	518
0·660	0·1355029	29242	342	0·510	0·2401535	41844	526
0·655	0·1384271	29584	347	0·505	0·2443379	42370	534
0·650	0·1413855	29931	351	0·500	0·2485749	42904	543
0·645	0·1443786	30282	354				
0·640	0·1474068	30636	361				
0·635	0·1504704	30997	365	$\frac{1}{3}$	0·4279628		
0·630	0·1535701	31362	369	$\frac{2}{3}$	0·1316565		
0·625	0·1567063	31731	374	$\frac{1}{4}$	0·5593811		
0·620	0·1598794	32105	378	$\frac{3}{4}$	0·0882838		
0·615	0·1630899	32483	385	$\frac{1}{5}$	0·6618925		
0·610	0·1663382	32868	389	$\frac{2}{5}$	0·3459929		
0·605	0·1696250	33257	396	$\frac{3}{5}$	0·1729507		
0·600	0·1729507	33653	400	$\frac{4}{5}$	0·0660387		
0·595	0·1763160	34053	405	$\frac{1}{6}$	0·7455679		
0·590	0·1797213	34458	412	$\frac{5}{6}$	0·0526120		
0·585	0·1831671	34870	418	$\frac{1}{8}$	0·8770221		
0·580	0·1866541	35288	423	$\frac{3}{8}$	0·4909586		
0·575	0·1901829	35711	430	$\frac{5}{8}$	0·1567063		
0·570	0·1937540	36141	437	$\frac{7}{8}$	0·0372880		
0·565	0·1973681	36578	442				
0·560	0·2010259	37020	449				
0·555	0·2047279	37469	456				

QUATRIÈME MÉMOIRE

SUR

LA MESURE DES HAUTEURS

A L'AIDE DU BAROMÈTRE,

Par M. Ramond.

Lu le 26 juin 1809.

Essais sur de petites différences de niveau.

M. de Prony pense que le coefficient nouvellement introduit dans la formule de M. de la Place, est trop fort pour la mesure des petites hauteurs, et que l'ancien coefficient 17972, moindre d'environ un quarante-deuxième, donneroit plus exactement des différences de niveau peu considérables.

Ce savant paroît se fonder principalement sur une observation faite au Mont-Cenis, et consignée dans l'*Annuaire* du bureau des longitudes pour la présente année 1809, pages 88 et suivantes, en note.

La valeur que j'ai assignée à cet élément indécis de la formule, n'est pas de celles qui s'établissent et qui se jugent d'après un cas particulier et sur la foi d'une expérience unique. J'aurois donc fait peu d'attention à l'ob-

servation du Mont-Cenis si elle n'appartenoit à un homme de très-grande autorité dans les sciences exactes. Dès que M. de Prony élevoit un doute, je me suis cru obligé de douter et de soumettre mon coefficient à des épreuves du genre de celle qu'il lui avoit fait subir.

S'il est vrai que mon coefficient convienne pour les grandes hauteurs, et devienne trop fort pour une hauteur de 692 mètres, la réduction dont il est susceptible doit augmenter à mesure que les différences de niveau diminuent, ensorte qu'il faudroit chercher le *maximum* de cette réduction dans les hauteurs de quarante ou cinquante mètres; mais alors l'erreur du coefficient risqueroit de se perdre dans l'erreur de l'observation. Les différences de niveau de deux cens à six cens mètres sont au-dessus de ce soupçon; l'erreur du coefficient s'y manifesteroit par des erreurs de dix à quinze mètres, et l'on opéreroit bien négligemment si l'incertitude des observations étoit suffisante pour couvrir long-temps de pareilles quantités.

J'ai donc choisi, dans ces limites, plusieurs points voisins de ma résidence. Comme, dans la recherche de la vérité, l'esprit le plus droit n'est pas encore une caution suffisante contre la prévention, j'ai voulu que l'élévation de ces points ne me fut connue par aucune opération géométrique, et je me suis réservé d'en faire faire le nivellement quand j'aurois appris sur cette élévation tout ce que le baromètre pouvoit m'apprendre.

J'ai voulu encore que les sites fussent très-dissemblables : c'est tantôt une plaine étendue, tantôt un

sommet aiguisé, tantôt une gorge étroite et fortement dominée.

J'ai voulu aussi y porter le baromètre dans des circonstances très-variées, le voir tour-à-tour très-haut et très-bas, l'essayer à des températures très-diverses et avec des vents très-différens. Pour remplir ces indications, j'ai même risqué des observations par des temps qui ne leur étoient rien moins que favorables. Il étoit bon de faire la part des accidens pour donner une mesure aux aberrations de la méthode. Mais en général, j'ai choisi de beaux jours, pour obtenir, autant qu'il étoit possible, le produit net de la formule, dans une saison qui n'étoit pas déjà trop propice aux observations barométriques, puisque la majeure partie de ces observations a été faite durant les intempéries d'un printemps remarquable par l'irrégularité des modifications de l'atmosphère. De plus, je n'ai jamais observé qu'à midi, ou du moins entre onze heures et une heure, seul espace de temps qui convienne à des opérations où l'on aspire à l'exactitude. Enfin les observations de Clermont ont toujours été simultanées, et je n'ai jamais suppléé à cet indispensable concours par les réductions que l'on est accoutumé de faire quand il ne s'agit que d'obtenir des évaluations approximatives.

J'ai employé deux baromètres de Fortin, parfaitement sembables et soigneusement comparés. Ils ont été chaque fois vérifiés au départ et au retour. Avec ces instrumens, on peut répondre du niveau à un ou deux centièmes de millimètres près, quand on a contracté l'habitude d'ob-

server le contact de l'aiguille, non-seulement par réflexion dans le miroir de mercure, mais encore en transparence et au moyen de l'interception de la lumière.

En général, quand on observe aux heures prescrites et par des temps favorables, les baromètres n'ont que très-peu de part aux fautes qui se commettent dans la mesure des hauteurs, et des instrumens seulement passables, mais exactement comparés, rempliroient encore assez bien l'objet qu'on se propose, quand même ils ne donneroient pas précisément la hauteur absolue de la colonne de mercure équipondérante à la colonne d'air.

Il n'en est pas ainsi des thermomètres: ce n'est pas assez qu'ils soyent relativement justes s'ils ne le sont absolument, ou du moins si l'on ne connoît parfaitement la quantité dont ils sont en défaut. Il ne me semble pas inutile d'insister sur cette nécessité quand je vois sortir des mains des meilleurs ouvriers, des thermomètres mal réglés ou mal calibrés qui ne reviennent pas aux termes fixes à un ou deux degrés près. On sent que dans ce cas, l'erreur des thermomètres déplace le point de départ des dilatations qu'ils sont chargés de mesurer, et que ce déplacement peut occasionner des erreurs de plusieurs mètres sur des hauteurs peu considérables. Mais ce n'est pas tout, et quand même ces instrumens sont sans reproche, leur observation n'en est pas moins la partie la plus délicate de l'opération, à raison de la difficulté que l'on trouve, soit à les placer convenablement, soit à démêler dans leurs indications la température qu'il importe de constater.

D'abord, en ce qui concerne le thermomètre adapté au baromètre et destiné à faire connoître la température du mercure, celui-là n'étant point plongé dans le mercure même, ne dépose réellement que de la chaleur du lieu où l'appareil est placé. Ses indications ne se rapportent exactement au baromètre que lorsque celui-ci se trouve dans un lieu clos dont la température varie peu, et varie assez lentement pour que les deux instrumens associés aient le temps de se mettre d'accord. En plein air, au soleil, au vent, c'est tout autre chose. Les variations du thermomètre dévancent toujours les changemens que la température intérieure du baromètre éprouve. Il faut abriter ses instrumens le mieux qu'il est possible, soustraire le tube et surtout la cuvette aux rayons du soleil, laisser à l'instrument le temps de perdre la chaleur qu'il a acquise dans le transport, ou de prendre celle du lieu où il vient d'être placé. Il faut observer d'instans en instans les mouvemens du thermomètre, distinguer avec soin ce qui appartient à la réverbération, aux accidens passagers, et noter toujours son indication avant de procéder à l'observation du baromètre, parce que le voisinage prolongé de l'observateur suffit pour changer la température superficielle avant que la température intérieure ait eu le temps de participer à la variation. Toutes ces difficultés sont plus grandes pour les baromètres montés en bois que pour ceux qui sont montés en cuivre, parce que ceux-là s'échauffent et se refroidissent avec moins de promptitude et d'uniformité. Faute des précautions que j'indique il est aisé de se tromper d'un

degré ou deux sur la chaleur réelle du mercure : cette erreur en entraîne une de deux ou trois mètres sur la hauteur mesurée, erreur assez considérable pour les petites différences de niveau.

Quant au thermomètre libre, autre écueil des observations ordinaires, on pense bien que j'ai profité de l'expérience de Pictet et de Saussure. Je l'expose dans le lieu le plus découvert et le plus aéré, à l'ombre seulement du bâton qui le porte. Je l'écarte autant qu'il est possible des surfaces réverbérantes, et le tiens à la plus grande élévation où je puisse commodément l'observer. Il est suspendu au bâton à l'aide d'un crochet à longue tige qui l'en éloigne d'un décimètre au moins, et il est maintenu inférieurement par un anneau qui l'embrasse et le retient dans une position parallèle à celle de son support. Mais quelque chose que l'on fasse on ne peut pas toujours le soustraire entièrement à l'influence de la température locale, et le préserver des variations qui ont leur origine dans la lutte de cette température et de ses modifications avec celle qui appartient à l'air libre. Il monte et baisse à chaque instant, selon que le soleil se montre ou se cache, que le vent souffle ou s'appaise. La température du calme est toujours suspecte : c'est ordinairement celle du lieu. La température du vent n'est pas toujours sûre quand ce vent n'est que passager ou accidentel. L'habilité de l'observateur consiste à distinguer dans les diverses indications, celle qui exprime avec le moins d'ambiguité la température véritable de la couche d'air soumise à l'expérience. En inscrivant, au

hasard, le degré que marque le thermomètre à l'instant où se fait l'observation barométrique, on risque de se tromper d'un ou deux degrés sur la chaleur moyenne de la couche interceptée, et d'introduire dans le calcul de la hauteur une erreur de plusieurs millièmes qui devient fort considérable lorsque la hauteur est grande.

Et il est à remarquer que les erreurs occasionnées par les deux thermomètres, ayant communément la même origine, se cumulent plus souvent qu'elles ne se compensent, et qu'alors il est aisé de se tromper de sept ou huit mètres sur une différence de niveau médiocre; et c'est presque toujours en excès que l'on se trompe quand on observe par le beau temps, et surtout en été et au soleil, circonstances où se font la plupart des observations de ce genre. C'est le contraire quand on observe à la pluie, à la neige, dans un brouillard qui n'est point général : la mesure pêche par défaut, parce que les thermomètres indiquent la température du météore au lieu d'indiquer celle de l'air. Il importe donc beaucoup à l'observateur de se rendre raison de la marche de ses thermomètres. La mesure des hauteurs n'est rien moins qu'une opération purement mécanique. Il ne suffit pas que les observations soient matériellement bien faites : il faut encore qu'elles soient raisonnées. Tout instrument requiert de celui qui l'emploie, non-seulement l'espèce de dextérité qui convient à son maniement, mais aussi l'habitude d'un ordre de réflexions appropriées à son usage; et les instrumens météorologiques, tout aussi parfaits que bien d'autres, ne paroissent si souvent en

défaut que parce qu'à force de trouver de la facilité à les consulter, on les traite habituellement avec une légèreté qui en rend la précision inutile.

Mais on a beau être attentif, il y aura toujours quelques erreurs si la température est très-variable, comme il arrive lorsque le vent est intermittent, lorsque les apparitions du soleil sont passagères, lorsque la neige ou la pluie, tombant par intervalles, apportent momentanément dans la région inférieure, la température des couches supérieures de l'atmosphère. On aperçoit très-distinctement l'effet de ces vicissitudes dans les séries d'observations faites à des instans rapprochés, pour déterminer l'élévation d'un seul et même point; elles occasionnent des variations d'une couple de mètres dans la mesure, variations que l'on distingue fort bien de celles que l'on pourroit imputer au baromètre. C'est pricipalement à cette cause que j'attribue les écarts plus ou moins grands que l'on remarquera dans quelques-uns de mes résultats. J'aurois pu exclure ceux qui sont disparates. Mais dans une question où il s'agissoit moins de la critique des opérations que de la critique de la formule, il n'y avoit rien à écarter de ce qui servoit à mettre sa marche à découvert. Je donne donc les cinquante-trois observations que j'ai faites, bonnes ou mauvaises, et sans en supprimer aucune. Ceux qui se connoissent en opérations de ce genre conviendront que je n'ai pas mis mon coefficient à une légère épreuve.

Les observations sont calculées dans la forme expéditive dont j'ai annexé le type à mon premier Mémoire,

et le coefficient 18393, est corrigé pour la latitude 45°50′.

J'avertis aussi que j'ai toujours eu égard à la petite quantité dont la cuvette du baromètre supérieur s'est trouvée au-dessus ou au-dessous du point dont je mesurois l'élévation. Mais pour ne point surcharger mes tableaux d'additions et de soustractions, j'ai fait porter sur l'observation barométrique elle-même la légère correction que cette circonstance rendoit nécessaire. Elle atteint rarement à cinq centièmes de millimètre.

Première Épreuve.

La Barraque.

(Situation très-favorable).

La *Barraque* est une hôtellerie située à l'embranchement des deux routes d'Aurilhac et de Limoges, sur le plateau de granit qui domine Clermont et la Limagne. Quoique ce site ne constitue pas une plaine proprement dite, cependant rien ne s'oppose à ce que les vents y conservent leur direction et leur inclinaison naturelle. Mon baromètre y étoit placé fort commodément, et je pouvois le tenir à l'abri du vent et du soleil. La distance horisontale de la Barraque à Clermont n'est que d'environ cinq mille mètres.

Je range mes observations dans l'ordre des moyennes températures de la colonne d'air.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure.			Station supérieure.			Hauteur déduite.
				Baromèt.	Th. du B	Th. libre.	Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	
1re.....	12 mars 1809.	+ 0.7	N E. un peu fort....	723.60	+11.0	+ 2.5	688.55	0.0	— 1.2	380.03
2e......	26 février...	3.5	N E. très-beau......	737.73	12.3	5.0	702.54	+ 2.3	+ 2.0	380.91
3e......	....	3.7	— de même..........	737.65	12.4	5.2	702.49	2.2	2.1	380.54
4e......	8 mars.....	9.6	E N E ciel trouble..	738.55	14.1	10.4	704.85	9.6	8.7	380.41
5e......	1 mars.....	9.7	S O. un peu fort.....	735.70	12.7	10.5	702.30	9.2	8.8	380.08
6e......	20 mars.....	13.7	O. nuages...........	731.90	13.5	16.2	699.39	11.3	11.1	379.31
7e......	19 mars.....	13.8	S O. gros nuages....	729.55	14.0	15.5	697.0[illegible]	12.7	12.0	381.51
8e......	15 mai 1808.	22 7	E N E. superbe......	734.72	21.9	23.6	703.8[illegible]	25.6	21.8	380.07
							Moyenne.........			380.36

La dernière des huit observations, dans l'ordre des températures, est l'observation unique d'après laquelle j'ai établi, l'année passée, l'élévation absolue de la Barraque telle qu'elle est notée sous le n° 39 du tableau des hauteurs, annexé à mon troisième Mémoire. On voit que si la moyenne est juste, il n'y a pas grand chose à réformer.

Quand des observations faites dans des circonstances aussi variées, marchent avec un pareil accord, il y a lieu de croire que leur résultat est l'expression pure et nette des propriétés de la formule.

On remarquera que la diversité des vents n'a point eu d'influence apparente sur les mesures, 1°. parce qu'ils étoient en général assez modérés; 2°. parce que la différence de niveau est petite; 3°. parce que la distance horisontale est très-médiocre. L'explication que j'ai donnée ailleurs de l'influence des vents, suffit pour faire con-

cevoir à quel point le concours de trois circonstances aussi favorables est propre à en atténuer l'effet.

Il est encore à remarquer que la grande diversité des températures ne s'est nullement fait apercevoir dans les hauteurs déduites, et la régularité de cette série met dans tout son jour l'uniformité de marche de la correction adoptée par M. de la Place. Mais les séries suivantes, pour être moins régulières, n'en sont pourtant pas moins propres à démontrer cette même uniformité; car on y voit les mesures fortes et foibles se distribuer à peu-près indifféremment entre les diverses températures, en sorte que les erreurs en excès ou en défaut ne peuvent être imputées qu'aux accidens qui ont troublé les observations.

J'ai toujours obtenu des résultats semblables, et ce n'est pas sans examen que je m'en suis tenu au rapport 1 : 250 et à la supposition du décroissement de chaleur uniforme, dont la combinaison me paroît satisfaire d'une manière très-heureuse, à la double correction de la chaleur et de l'humidité. On a proposé d'y faire divers changemens, et je les ai essayés : ils m'ont paru tantôt indifférens, tantôt incertains et difficiles, tantôt en contradiction avec le résultat des observations. Je ne tirerai, du mauvais succès de mes épreuves, aucune induction contre les motifs plus ou moins spécieux qui ont suggéré l'idée de ces changemens; j'en conclurai seulement que pour la solution du problême de la mesure des hauteurs, problême fort compliqué, et dont les conditions sont loin de nous être toutes connues, la méthode empi-

rique a souvent des ressources qui échappent aux théories fondées sur des expériences de nature plus limitée. Lorsqu'il reste autant d'incertitude sur le nombre et la qualité des données, la pratique est une autre sorte d'expérience qui tient compte des circonstances inaperçues, apprécie les quantités dont la connoissance nous échappe, assigne aux accidens une valeur réglée sur leur fréquence, remonte des cas particuliers à un cas abstrait où toutes les inconnues trouvent une évaluation moyenne, et approprie directement ses règles à l'objet qu'elle se propose.

Seconde Épreuve.

Cap de Prudelles. Extrémité occidentale.

(Situation moins favorable).

Prudelles est une crête étroite et allongée, formant une espèce de promontoire saillant sur la plaine, à la distance d'environ trois mille mètres de Clermont. Un bassin postérieurement creusé, et deux vallons latéraux, fortement inclinés, isolent ce promontoire, et impriment des directions ascendantes et descendantes aux vents dont leurs pentes sont frappées. A ces inconvéniens se joint celui de n'y trouver aucun abri pour le baromètre.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure.			Station supérieure.			Hauteur déduite.
				Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	
1re......	26 fév. 1809.	+ 3.7	N E. soleil..........	737.80	+12.2	+ 4.4	710.53	+ 4.3	+ 3.0	293.46
2e......	8 mars.....	10.3	E N E. très-beau....	738.45	14.4	10.8	712.39	11.0	9.8	293.58
3e......	4 mars.....	10.8	O S O. et S E.......	735.97	12.6	12.3	710.00	9.7	9.2	294.82
4e......	9 mars.....	11.6	E S E. beau.........	736.05	15.3	11.8	710.34	12.7	11.3	293.10
5e......	*idem*.......	11.7	— de même.........	735.85	15.4	12.3	710.08	12.7	11.0	293.85
							Moyenne.........			293.76

Les extrêmes de la variation étant renfermés dans l'espace de 1,^{m}7, la marche des observations m'a parue assez régulière pour me dispenser de les pousser plus loin.

Troisième Épreuve.

Cap de Prudelles. Sommet oriental.

(Situation encore moins favorable).

Ce sommet est plus exposé que l'autre au rebroussement des vents qui viennent de la plaine. Il est aussi plus aiguisé. Les courans d'air que les pentes y conduisent, sont encore plus inclinés ; et pour peu que l'atmosphère soit agitée, on ne sauroit y faire des observations sûres. J'ai donc choisi de beaux temps. Mais j'ai multiplié les observations en proportion des inconvéniens de la station, et à mesure que j'y apercevois de la divergence.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure.			Station supérieure.			Hauteur déduite.
				Baromèt.	Th du B.	Th. libre.	Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	
1re....	4 mars 1809.	+10.2	O S O. nuages	736.35	+12.9	+11.4	710.89	+10.0	+ 8.9	288.03
2e.....	8 mars.....	10.8	E N E. soleil vif.....	738.43	14.6	11.8	712.85	11.5	9.7	288.94
3e.....	9 mars.....	10.9	E S E. superbe......	736.15	15.0	11.8	710.84	11.5	10.0	286.25
4e.....	....	11.5	— de même.	735.95	15.3	12.4	710.55	12.0	10.6	288.36
5e.....	1 avril.....	13.4	S O. gros nuages....	718.23	16.4	14.9	693.69	12.4	11.8	286.30
6e.....	19 mars.....	13.9	S O. soleil ardent....	729.33	13.7	15.3	704.75	13.9	12.5	289.38
7e.....	20 mars.....	14.3	O. nuages, soleil...	731.65	14.2	16.1	707.00	13.3	12.5	288.00
8e.....	1 avril.....	14.5	S O. soleil.....	718.26	16.5	15.7	693.84	13.5	13.2	287.58
9e.....	....	14.7	— de même........	718.18	16.5	15.0	693.92	14.7	14.3	287.75
10e.....	5 août 1808.	26.9	S. E. très beau......	728.52	24.7	28.3	705.65	27.8	25.5	287.25
									Moyenne........	287.78

L'observation du *5* août de l'année dernière est celle sur la foi de laquelle j'ai déterminé l'élévation absolue de Prudelles, nº 23 du tableau des hauteurs joint à mon précédent Mémoire.

Cette série est moins régulière que les deux précédentes; cependant les variations de la mesure n'embrassent qu'un espace de trois mètres, ce qui est fort peu considérable, eu égard au nombre des observations. Au reste, en examinant les circonstances qui les ont accompagnées, je trouve que ces variations appartiennent principalement aux méprises faites sur la température ou du mercure ou de l'air. Il est toujours très-difficile de les éviter quand les thermomètres varient eux-mêmes beaucoup, comme il arrive sur un sommet très-exposé au soleil, aux réverbérations, et à des vents directs et réfléchis.

Quatrième Épreuve.

Le Pont du Berger.

(Situation assez bonne).

Ce pont, nouvellement construit entre la Barraque et les Goules, sur la route de Clermont à Limoges, se trouve dans cette espèce de plaine inégale et élevée qui domine la Limagne. Les vents ont ici beaucoup d'impétuosité; mais les montagnes, sans être bien éloignées, ne sont pourtant pas assez voisines pour changer sensiblement l'inclinaison des courans d'air. Mes observations n'ont pas été nombreuses, et elles ont été faites par de mauvais temps. Cependant, comme les écarts de la mesure étoient peu considérables, j'ai cru pouvoir m'en contenter, et il m'a paru inutile de les multiplier davantage.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure.			Station supérieure.			Hauteur déduite.
				Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	m.
1re.....	5 avril 1809.	− 1.3	N E. violent, neige.	733.55	+11.3	+ 0.3	687.79	− 1.8	− 2.9	492.63
2e......	....	− 0.3	— soleil..........	733.35	11.4	1.9	687.99	+ 1.0	− 2.4	494.17
3e......	....	− 0.3	— forte bourrasque.	733.39	11.4	2.3	687.84	− 2.0	− 2.8	491.93
4e......	9 avril.....	+ 2.5	N N O. fort. soleil..	728.05	9.7	4.6	683.94	+ 2.4	+ 0.4	493.34
5e......	....	2.6	— de même........	727.95	10.3	4.8	683.79	2.4	0.4	493.30
6e......	26 avril.....	13.2	O S O. soleil vif....	728.00	14.0	16.2	686.20	12.2	10.2	494.46
							Moyenne...		.....	493.30

CINQUIÈME ÉPREUVE.

Au Hameau dit chez Vasson, *à l'embranchement de la traverse d'Orcines avec la grande route.*

(Excellente position).

Le hameau de *chez Vasson* est situé sur la grande route, entre la Barraque et le pont du Berger, et beaucoup plus près du premier de ces points que du dernier. Il se trouve dans une des parties les plus unies de cette plaine élevée. J'y ai observé à l'ombre, dans le calme et par un beau temps. La position et les circonstances m'ont inspiré tant de confiance que j'ai cru pouvoir m'en tenir à une seule observation.

Observ.	Jour.	Température moyenne.	Vent.	Station inférieure.			Station supérieure.			Hauteur déduite.
				Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	Baromèt.	Th. du B.	Th. libre.	
1re	31 mai 1809..	+16.2	S S O. Beau temps...	730.33	+19.4	+18.4	694.45	+14.5	+14 0	420.76

SIXIÈME ÉPREUVE.

Col des Goules.

(Position extrêmement défavorable).

Le col des Goules est un défilé court et étroit, dominé d'un côté par le Puy de Pariou, et de l'autre par celui

des Goules. La largeur du passage se réduit à celle de la route, qui est rapidement ascendante des deux côtés du défilé, et atteint là le point culminant entre Clermont et Limoges. Je ne connois pas une pire position pour les instrumens météorologiques. Il y a toujours du vent, et les moindres vents y deviennent impétueux de manière à rendre les observations incertaines. D'ailleurs, quelle que soit leur direction, ils s'inclinent en traversant la gorge, et devenus ascendans ou descendans, au gré des pentes qui les conduisent, ils maintiennent obstinément le mercure au-dessus ou au-dessous du point que lui auroit marqué la simple pression de l'atmosphère. De plus, on ne sauroit se soustraire à la température locale qui déguise celle de la couche d'air soumise à l'expérience. Tantôt c'est le froid occasionné par le séjour des neiges ou l'évaporation des surfaces environnantes; tantôt c'est la chaleur réverbérée par toutes les pentes dont on est dominé. Enfin, bien que la distance qui sépare ce col de Clermont ne soit pas forte, puisqu'elle n'excède pas un myriamètre, cependant l'interposition de hautes et larges montagnes divise réellement les deux atmosphères, et expose l'une à des modifications qui ne sont point partagées par l'autre. Cette position peut avoir de l'analogie avec celle du Mont-Cenis. Il auroit manqué quelque chose à mes expériences si j'avois négligé d'en vérifier l'influence. J'y ai donc porté le baromètre à plusieurs reprises, et je n'ai même pas craint de l'essayer par de très-mauvais temps pour voir jusqu'où pourroient aller les erreurs de la mesure. Mais aussi j'ai cru néces-

saire de multiplier assez les observations pour me mettre en état de distinguer ce qui appartenoit aux accidens, de ce qui appartient à la formule.

Observations suspectes et rejetées.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure. Baromèt.	Station inférieure. Th. du B.	Station inférieure. Th. libre.	Station supérieure. Baromèt.	Station supérieure. Th. du B.	Station supérieure. Th. libre.	Hauteur déduite.
1re.....	5 avril 1809.	— 1.9	N E. violent et neige.	733.50	+11.4	+ 0.3	678.75	— 3.5	— 4.0	593.28
2e......	....	— 0.8	— vent moins fort...	733.40	11.8	1.9	678.70	— 3.0	— 3.5	595.42
3e......	22 mars.....	+10.9	S E. temps orageux..	731.10	14.6	12.6	680.25	+10.4	+ 9.2	594.46
4e.	14 mai......	19.9	S S E. furieux, soleil.	728.00	20.3	22.7	678.45	18.8	16.0	604.24
5e......	10 mai......	20.5	S E. violent, orageux.	728.95	19.3	22.8	680.00	20.5	18.2	602.84

Observations régulières.

Observ.	Jours.	Température moyenne.	Vents.	Station inférieure. Baromèt.	Station inférieure. Th. du B.	Station inférieure. Th. libre.	Station supérieure. Baromèt.	Station supérieure. Th. du B.	Station supérieure. Th. libre.	Hauteur déduite.
1re....	9 avril 1809.	+ 3.2	N N O. fort, soleil..	727.80	+11.2	+ 5.9	674.85	+ 1.3	+ 0.4	596.17
2e.....	....	3.3	— nuages..........	727.78	12.6	6.1	674.80	1.5	0.5	595.11
3e.....	29 mars.....	9.3	S E. fort, nuages...	723.80	14.9	11.9	672.60	8.2	6.6	597.44
4e.....	....	9.6	— de même.	723.65	15.3	12.6	672.65	9.8	6.6	597.75
5e.....	....	9.6	— de même.	723.65	15.3	12.6	672.50	8.2	6.6	597.15
6e.....	....	10.2	— soleil vif........	723.75	15.2	12.6	672.65	8.8	7.5	598.55
7e.....	8 mai......	10.6	S E. très-fort, couvert.	732.80	15.4	12.9	681.30	9.2	8.2	597.18
8e.....	....	11.3	— coups de soleil ...	732.77	15.6	14.1	681.30	9.9	8.5	599.58
9e.....	....	11.5	— soleil vif........	732.73	15.7	14.0	631.30	10.4	9.0	599.85
10e.....	....	11.8	— forte réverbération	732.66	15.8	14.0	681.27	10.4	9.5	599.84
11e.....	26 avril.....	11.8	O S O. couvert......	728.30	13.2	15.2	677.75	9.3	8.4	595.68
12e.....	....	12.3	— soleil très-vif....	728.30	13.4	15.9	677.65	9.6	8.6	598.09
13e.....	....	12.9	— ciel orageux.....	728.25	13.5	16.8	677.70	10.0	9.0	598.84
14e.....	31 mai......	16.2	S O. fort, soleil....	729.92	20.1	19.1	679.60	15.1	13.2	599.56
15e.....	....	16.5	— de même........	729.71	20.1	19.4	679.45	15.0	13.5	599.51
16e.....	....	16.6	— nuages..........	729.50	20.2	19.7	679.35	14.6	13.5	598.09
17e.....	....	17.0	— couvert.........	729.36	20.3	20.2	679.35	15.2	13.7	597.80
18e.....	17 juill. 1808.	24.0	E S E. ciel orageux..	732.85	28.0	27.0	684.15	25.0	21.0	597.13
									Moyenne.........	597.93

Je ne rapporte les cinq premières observations que pour n'en omettre aucune; et je les rejette, parce qu'elles ont été faites par de si mauvais temps qu'il étoit impos-

sible de déterminer au juste la hauteur du baromètre et du thermomètre. Elles ne sont pas inutiles cependant, puisqu'elles marquent, en quelque sorte, la limite des erreurs que peuvent occasionner les incertitudes de l'observation, réunies aux inconvéniens du lieu et au désordre de l'atmosphère. Il est utile encore de remarquer que les vents qui déployoient leur furie dans la région supérieure, étoient assez modérés à Clermont. Cela explique pourquoi les mesures les plus foibles sont du côté des vents boréaux, et les plus fortes du côté des vents méridionaux. Ces vents agissoient principalement sur le baromètre supérieur, et ils agissoient non-seulement par leur température, mais encore par une inclinaison accidentelle et due en partie à la direction des pentes environnantes. Le nord-est étoit plongeant et soulevoit la colonne de Mercure. Le sud-est étoit ascendant, et soulevoit la colonne d'air. Je m'en suis assuré, et il est toujours facile de reconnoître le sens de l'inclinaison, en consultant le baromètre, tantôt au moment de la bourrasque, et tantôt dans les instans d'intermittence. L'inclinaison des vents seroit une indication à ajouter aux observations météorologiques ; mais on sent qu'il faudroit tenir le baromètre éloigné des surfaces réfléchissantes ou conductrices ; car au lieu de faire l'histoire du vent, on ne feroit que celle du lieu où l'on observe.

Au reste, les écarts des cinq observations ont lieu dans les deux sens, eu égard à la moyenne des observations suivantes, et elles se compensent si bien qu'on pour-

roit encore les employer sans rien changer à la hauteur définitivement déterminée.

Quant aux dix-huit observations qui ont servi à cette détermination, leurs écarts se bornent à environ deux mètres, soit en delà soit en deçà de la moyenne. Il n'est pas difficile de voir que les variations de la mesure dépendent principalement de l'état du ciel, de la réverbération de la terre, c'est-à-dire de la présence ou de l'absence du soleil aux deux stations, ou à l'une des deux à l'exclusion de l'autre. L'influence de ces causes est surtout manifeste dans le résultat des observations faites le même jour, et de quart d'heure en quart d'heure. L'irradiation solaire élève les thermomètres par l'effet de la chaleur réfléchie à laquelle on ne peut les soustraire, et elle abaisse le baromètre, en accélérant le mouvement des courans ascendans. La suppression de cette irradiation opère les effets contraires, et les divers degrés d'intensité des vents, combinés avec leur direction et leur inclinaison, contrarient ou secondent les causes locales de chaud ou de froid.

C'est ainsi que les hautes températures tendent à exagérer un peu les mesures, et les basses températures à les affaiblir, sans qu'on puisse en accuser la correction que nous mettons en usage; et l'on aperçoit ici cette tendance, quoi qu'en général les mesures fortes et foibles soient assez bien réparties entre les divers degrés de l'échelle thermométrique. Ceci est dû à la réaction du sol sur la petite atmosphère qui environne les instrumens. Dans des lieux faits comme les Goules, quand

la terre domine l'observateur, au point qu'il y est pour ainsi dire enseveli, il lui est bien difficile d'obtenir exactement les mêmes résultats au soleil, à l'ombre, en hiver et en été, quelque attention qu'il apporte à ne point confondre la température atmosphérique avec la température locale.

L'observation du 17 juillet 1808, m'a donné l'élévation absolue des Goules, consignée dans mon tableau des hauteurs, n° 39.

Ces épreuves m'ont parues plus que suffisantes, et mes hauteurs étant déterminées avec autant d'exactitude que le baromètre et la formule le comportent, il ne restoit qu'à leur faire subir l'épreuve du nivellement. Je n'ai pas voulu y procéder moi-même, et M. de Cournon, ingénieur en chef du département, a eu la complaisance de s'en charger. Quant à la partie mécanique de l'opération, rien n'a été négligé pour en assurer la justesse. Les nivellemens ont été répétés en montant et en descendant, et j'ai eu soin de faire comparer les mires aux étalons authentiques du mètre. Quant aux précautions morales, elles n'ont pas été moins scrupuleuses, et tout inutiles qu'elles étoient, j'ai pris plaisir à m'en environner comme si elles eussent été nécessaires. De même que j'avois fait mes observations sans attendre les nivellemens, de même M. de Cournon a exécuté ses nivellemens sans connoître mes évaluations. Les résultats respectifs n'ont été confrontés qu'après avoir été sépa-

rément arrêtés de part et d'autre. J'exprimerois difficilement ce que nous avons éprouvé, moi de satisfaction, lui de surprise, lorsqu'en échangeant nos mesures, nous nous sommes trouvés six fois d'accord.

Voici le tableau comparatif de nos résultats. Je range les lieux par ordre d'élévation.

	Nombre d'observations.	Mesure barométrique.	Nivellement.	Différence.
		m.	m.	m.
Prudelles, sommet oriental......	10.	287.78	287.02	+ 0.76
——— Extrémité occidentale.	5.	293.76	294.30	— 0.54
La Barraque.................	8.	380.36	380.30	+ 0.06
Chez Vasson.................	1.	420.76	420.80	+ 0.04
Le Pont du Berger............	6.	493.30	493.75	— 0.45
Le Col des Goules............	18.	597.93	597.84	+ 0.09
	48.			

Ce concert paroîtra bien remarquable. Il est même si merveilleux qu'on seroit tenté de le regarder comme fortuit, si je n'avois pas autant varié les épreuves et multiplié les exemples. Sans doute, le hasard joue ici son rôle. Ce qui lui appartient c'est le degré d'exactitude qui excède les moyens de l'observation; mais ce qui appartient à la formule c'est la répétition habituelle de ces hasards. Je ne m'étonne pas de voir les moyennes s'accorder avec autant de précision, quand je trouve que sur quarante-huit mesures barométriques il y en a déjà

trente et une qui se rencontrent avec le nivellement à moins d'un mètre près, que l'erreur de treize autres est renfermée entre un et deux mètres, et que pour découvrir des écarts de plus de trois mètres, il faut les aller chercher dans les cinq observations incertaines que j'ai rejetées. Que l'on répète les nivellemens et les observations, on n'obtiendra sûrement pas les mêmes quantités précises. Le hasard variera ses chances : ce qui étoit plus juste le deviendra moins ; ce qui l'était moins le deviendra davantage ; mais les propriétés de la formule limiteront toujours de la même manière le cercle étroit où il est permis au hasard de se jouer, et dont il ne lui est pas permis de sortir.

Il n'y a rien de certain en fait d'expérience, ou il est certain que les mesures barométriques sont actuellement susceptibles d'une grande précision, que le nouveau coefficient introduit dans la formule de M. de la Place, s'accommode aux petites différences de niveau comme aux grandes, et que l'ancien coefficient ne convient pas plus aux unes qu'aux autres. Je ne puis donc m'empêcher de regarder l'observation du Mont-Cenis comme fautive.

Elle l'est, en effet ; et maintenant c'est par elle-même que je le prouve. Le baromètre supérieur étoit trop bas, puisque l'élévation du mercure au point culminant du passage, comparée à l'élévation moyenne qu'il affecte sur les bords de la mer du sud, donne au Mont-Cenis une hauteur toute pareille à celle que Saussure lui assigne (1). Saussure, comme on sait, employoit un coef-

(1) Voyez la note citée.

ficient assez analogue au nôtre, et ne comparoît entre elles que des observations faites dans nos propres régions ; on sait aussi qu'aux bords de la mer du sud, le baromètre se tient à environ trois millimètres plus bas qu'il ne fait au niveau de nos mers. Pour que M. de Prony se rencontrât avec Saussure, il falloit que le baromètre de Mont-Cenis se trouvât fort au-dessous de la moyenne hauteur qui correspond à l'élévation du lieu, combinée avec les dispositions particulières de notre atmosphère. Or, si cela est arrivé, ce ne peut être que par un événement étranger à l'action des causes générales ; car à l'époque du premier janvier, date de l'observation, nos baromètres d'Europe, bien loin de descendre, étoient montés à une hauteur remarquable, et s'y sont assez long-temps soutenus. Celui de l'Observatoire de Paris étoit ce jour là à 772.44, et celui de Clermont à 737.30, tous deux réduits à la température 12°.5 du thermomètre centigrade. Si nous comparons actuellement l'observation du Mont-Cenis avec ces observations exactement contemporaines et faites dans la même atmosphère, ce qui est plus naturel et plus conforme aux procédés de Saussure, nous trouvons sur la hauteur du point culminant une erreur d'une centaine de mètres en plus, par la même raison que nous la trouvions juste en cherchant notre point de comparaison dans les baromètres de zone torride. Donc l'abaissement du mercure au Mont-Cenis est un pur accident dont il n'y a rien à induire pour ou contre aucun coefficient.

Mais cet accident, quelle est son origine? L'impu-

terons-nous à l'instrument, à la station, aux perturbations locales, aux dispositions particulières de l'atmosphère de la montagne? Voilà ce que je n'entreprendrai pas de décider, puisque je ne connois ni l'instrument, ni les lieux, ni les accessoires de l'observation. Qu'il me suffise d'avoir recommandé à l'attention des Physiciens le peu que j'ai été à portée d'apprendre touchant les circonstances qui décident de la justesse des mesures. Je ne puis que les inviter à tenir compte de mon expérience, et je me trompe fort s'ils ne finissent par trouver ce que j'ai trouvé, et ce que je trouve encore une fois après sept années de pratique et des milliers d'opérations de ce genre, savoir que notre coefficient exprime assez bien le rapport du poids de l'air à celui du mercure, que le facteur $\frac{1}{250}$ ne satisfait pas mal aux variations de la température, et que tout bien considéré, la formule de M. de la Place est une très-bonne formule.

EXAMEN

Des différentes manières d'orienter une chaîne de triangles,

Par F. C. Burckhardt.

Lu le 7 août 1809.

Le problème, dont il s'agit ici, est de la plus grande importance dans la mesure d'un arc du parallèle; j'ai donc cru nécessaire d'examiner avec soin les différentes solutions dont il est susceptible, pour choisir la plus exacte.

Ce problème se réduit à déterminer l'azimut d'un objet, c'est-à-dire sa distance angulaire au méridien, prise dans le plan de l'horizon. On peut l'obtenir 1) en plaçant réellement une mire méridienne, et en mesurant l'angle entre cette mire et l'objet donné, 2) ou en observant la distance de l'objet à un astre, dont l'azimut est connu, soit par la hauteur de l'astre observée en même temps, soit par le temps, donné par une horloge bien réglée.

I. *Mire méridienne.*

1) On peut la placer au moyen d'une lunette des passages, en observant le passage supérieur et inférieur des

étoiles circonpolaires. Cette méthode exige une excellente pendule et beaucoup trop de temps, de sorte qu'on ne peut guères l'employer que dans des observatoires fixes.

2). On peut observer les passages de deux étoiles, dont l'une est très-haute et l'autre très-basse, et dont la différence d'ascension droite est connue. Cette méthode est très-facile et très-commode; elle a l'avantage de n'exiger la marche régulière de l'horloge que pendant un court espace de temps. D'un autre côté elle suppose la différence des ascensions droites connue; mais l'erreur qui en peut naître sur les azimuts absolus, sera constante pour les endroits situés sur le même parallèle; il suffira donc d'employer les mêmes étoiles dans les deux endroits pour que leur différence d'azimuts soit juste.

Cette méthode a été proposée et employée par un missionnaire, mais avec si peu de succès, qu'on l'avoit totalement oubliée. M. Delambre l'a trouvée de nouveau en 1780; il a de plus donné des formules simples et faciles à réduire en tables pour l'usage pratique de cette méthode. Le peu de succès du missionnaire provenoit en grande partie des petits mouvemens des étoiles, connus sous le nom de l'*aberration et nutation*, qu'on ignoroit à cette époque: ne pourroit-on pas conclure de cet exemple qu'on risque un peu d'employer cette méthode lorsqu'on désire la dernière exactitude, vu que les étoiles peuvent avoir des petits mouvemens encore inconnus?

3). On pourroit encore employer la lunette méridienne à observer les passages des étoiles connues par le vertical de l'objet donné, on épargneroit de cette manière la mesure de l'angle entre la mire et l'objet donné, mais en revanche on auroit des calculs assez longs à faire, et on obtiendroit moins d'exactitude. Il me semble donc qu'on préférera toujours la méthode précédente.

Dans tout ce qui précède j'ai supposé que la lunette méridienne n'a aucun défaut, ce qui est pourtant infiniment peu probable; car il faudroit que l'axe fût parfaitement horizontal, l'axe optique bien perpendiculair, les intervalles des fils exactement connus, les pivots bien ronds et bien égaux, et les axes de deux pivots dans la même ligne droite (1); or rien de tout cela peut s'obtenir avec une exactitude géométrique. La somme où l'influence totale de ces petites erreurs peut devenir très-considérable dans une recherche aussi délicate. Si l'on ajoute à cela que chaque dixième de seconde dont on se trompe sur le passage, ou par la faute de la marche de la pendule, produit une seconde et demi en arc, et quelquefois davantage sur l'azimut, on sentira toute la difficulté de ce problème. Aussi le général Roy fit élever à grands frais un échafaud à Greenwich, afin de profiter de la mire méridienne, en plaçant son cercle exactement au-dessus de la lunette des passages de cet observatoire.

---

(1) Cette circonstance n'a pas été remarquée jusqu'à présent par les Astronomes; les artistes en connoissent l'importance et la difficulté, qu'on diminueroit peut-être en perçant les deux pivots.

4). Les méthodes précédentes supposent qu'on ait une lunette des passages pour placer la mire méridienne; M. de Zach a trouvé moyen de s'en passer. Pour cet objet il place un globe de verre dans la direction estimée du méridien, et il observe les momens où le soleil se trouve à égale distance de ce globe l'avant-midi et l'après-midi. Le milieu entre ces deux instans donneroit le midi vrai, si le globe de verre étoit réellement dans le méridien. En comparant donc ce milieu avec le midi vrai conclu par des hauteurs correspondantes, on trouvera facilement l'erreur de la mire. Si au lieu d'un seul globe de verre on en emploie plusieurs, placés à des distances connues, il sera facile de trouver l'erreur de chaque globe, et par conséquent l'endroit où passe le méridien. On voit que par cette méthode un chronomètre et un instrument à réflexion suffisent pour tracer une méridienne avec une grande exactitude, et dans une seule journée, ce qui est souvent bien précieux.

II. *Mesure de la distance d'un astre à l'objet donné.*

1). La première méthode exige un instrument composé d'un cercle horizontal et d'un cercle vertical, afin qu'on puisse observer un angle horizontal en même temps qu'on prend la hauteur de l'astre. Il faudroit que cet instrument eût un rayon considérable et une grande exactitude; malgré cela les vérifications seroient très-difficiles, et il seroit même permis de douter du succès, à en juger par le cercle de Palerme.

2). Dans la deuxième méthode on suppose le temps connu par une bonne pendule, pour en conclure l'azimut de l'astre, la pendule ayant été vérifiée par des hauteurs absolues de l'astre. On peut alors choisir un astre du côté du midi ou une étoile circonpolaire, et dans ces deux classes on a préféré le soleil et la polaire.

Les observations du soleil me paroissent jouir de la même exactitude qu'on peut espérer des étoiles du côté du midi. Il est vrai que la différence de deux azimuts sera exacte malgré une petite erreur commise sur le lieu de l'étoile, pourvu qu'on emploie la même étoile dans les deux endroits. Mais nos tables du soleil sont si exactes qu'il n'y a que des très-légères erreurs à craindre, et qui se détruiront dans nne suite d'observations : d'un autre côté il pourroit y avoir des petits mouvemens inconnus dans l'étoile qu'on emploie. Enfin en observant le matin et le soir, ce genre d'erreur devient tout à fait insensible. Mais le temps doit être connu avec la dernière rigueur, au lieu que cela ne me paroît pas nécessaire pour l'étoile polaire. Il est vrai que l'ascension droite de la polaire est incertaine de plusieurs secondes de temps, et qu'on pourra hésiter de l'employer. Néanmoins il me semble qu'il ne s'agit ici que du point absolu occupé par l'étoile, et nullement du point de l'équateur auquel elle répond. En effet, supposons une étoile au pole juste, en mesurant l'angle qu'elle fait avec un objet terrestre, on aura l'azimut de ce dernier, sans autre erreur que celle qui peut provenir de la nécessité de réduire cet angle à l'horizon. Revenons à présent à la

polaire: Il est certain que sa distance au pole est bien connue, ayant été observée si souvent et si exactement dans ces derniers temps. La décomposition de cette distance, selon le sens du méridien et du parallèle, dépend en effet de l'angle horaire; mais une incertitude d'une minute ou de $\frac{1}{3400}$ du rayon ne produira pas deux secondes sur la position absolue de la polaire, le rayon étant au-dessous de 2°. Enfin en choisissant l'instant où l'étoile est dans les plus grandes digressions, cette erreur disparoîtra tout à fait.

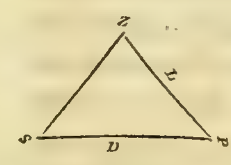
On verra par les calculs qui suivent, qu'une erreur commise sur la latitude n'a aucune influence sensible sur l'azimut; mais 2″ d'erreur sur la déclinaison de la polaire en produiroit dans nos climats une de 3″ sur les azimuts. Néanmoins cette dernière erreur varie bien peu pour deux endroits voisins, de sorte que la différence de deux azimuts n'en sera pas sensiblement affectée, pourvu qu'on emploie dans les calculs la même déclinaison pour les deux endroits; et comme on peut encore observer d'autres étoiles circonpolaires, comme β ou δ de la petite ourse, les petites erreurs inévitables se détruiront totalement.

L'incertitude qui résulte de la réduction à l'horizon est en général bien petite, vu que la hauteur du pole est bien connue, et elle disparoît tout à fait en employant une mire placée dans la direction du premier vertical; une distance de mille mètres paroît suffire pour cette mire, de sorte qu'elle coûtera peu, et sera facilement éclairé pendant la nuit. Enfin il paroît plus facile d'ob-

server avec exactitude une étoile presque stationnaire et tranquille, que le soleil, qui a beaucoup de mouvement diurne, et dont les bords sont rarement sans ondulations.

Sur les azimuts.

Observer un azimut, c'est mesurer la distance angulaire entre un objet terrestre et un astre dont on peut calculer l'azimut, et réduire cette distance à l'horizon. Examinons chacune de ces opérations pour choisir les cas les plus favorables.



Soient $L =$ colatitude; $P =$ angle horaire; $z =$ azimut; $D =$ distance polaire; nous aurons

$$cot.\, z = \frac{cot.\, D.\, sin.\, L.}{sin.\, P.} - cos.\, L.\, cot.\, P.$$

$$\delta z = \frac{sin.^2 z}{sin.\, P}\left[\frac{\delta D.\, sin.\, L}{sin.^2 D.} + \delta P\left(\frac{-cos.\, L + cot.\, D.\, sin.\, L\, cos.\, P}{sin.\, P}\right) - dL.\,(cot.\, D.\, cos.\, L + sin.\, L\, cos.\, P)\right]$$

pour l'étoile polaire z et encore plus $sin.^2\, z$ sont très-petits. Supposons par exemple la latitude $= 45°$ et $P = 90°$, z sera $2°\, 23'$ et $sin.^2\, z = \frac{1}{579}$ ou 0.00173. La petitesse de ce facteur rendra les termes qui dépendent de δP et de δL insensibles, quoiqu'ils soient multipliés par la cotangente D. Dans le cas cité $cot.\, D.\, sin.\, P$ est à peu-près 23. Ainsi il restera encore un facteur assez petit, savoir $\frac{1}{25}$. Et quand on se tromperoit de $4''$ sur l'angle horaire, ou de $60''$ en arc, il n'en résulteroit

que 2″ $\frac{1}{2}$ sur l'azimut, même au méridien. En choisissant les plus grandes élongations, l'influence de l'angle horaire disparoît.

Le terme qui provient de δD est plus considérable; car $sin.^2 D$ est aussi petit que $sin.^2 z$, et même deux fois davantage. Il en résulte que dans nos climats 2″ d'erreur sur la déclinaison produiront 2″.8 ou 3″ sur l'azimut.

Remarquons encore que ces erreurs sont presque constantes pour deux endroits voisins, et qu'on obtiendra par conséquent la différence de deux azimuts avec une très-grande exactitude si l'on calcule pour les deux endroits avec les mêmes données.

Pour β de la petite ourse $sin.^2 z$ est $\frac{1}{8}$, et $cot.\ D = 3\frac{3}{4}$.

Pour les étoiles dans les environs de l'équateur, il faut supposer l'angle horaire petit, si l'on veut que l'azimut le soit; d'où il résulte que le facteur $\frac{sin.^2 z}{sin.\ P}$ n'est que du premier ordre, tandis qu'il étoit du deuxième ordre pour les étoiles circonpolaires. Lorsque $P = 0$, le terme dépendant de δP devient

$$\delta P.\frac{sin.^2 z}{sin^2 P}.\frac{sin.(L-D)}{sin. D} = \frac{\delta P.sin.(L-D)}{sin.\ D}.$$

Ainsi l'erreur sur l'angle horaire en produit un effet à peu-près double sur l'azimut dans nos climats; chaque seconde de temps 30″ sur l'azimut.

Lorsque $P = 90^\circ$ le même terme devient égal à $-\delta P.\ cos.\ L.\ sin.^2 z$, et une seconde de temps ne produira que 10″ sur l'azimut, et ce terme dépendant du carré de $sin.\ z$ ne change pas de signe le soir et le matin,

de sorte que les erreurs ne se corrigent pas, comme l'avoit déjà remarqué M. Delambre.

Erreurs qui peuvent résulter de la réduction à l'horizon.

Supposons l'objet terrestre dans l'horizon, ce qui est assez exact, et simplifiera cet examen. On a alors

$$\text{Cosinus de la différence des azimuts} = \frac{\text{cosinus de la distance angulaire entre l'objet et l'astre}}{\text{cosinus de la hauteur de l'astre.}}$$

$$\text{et } \delta.\,(\text{diff. azim.}) = -\,\delta\,(\text{hauteur astre}).\,\frac{\text{cos. distance. sin. hauteur de l'astre}}{\text{sin. différ. azim. cos.}^2\text{ hauteur astre.}}$$

En choisissant l'objet terrestre de manière que la distance angulaire soit de près de 90°, l'influence de l'erreur commise sur la hauteur deviendra nulle. En plaçant une mire dans cette position on obtiendra son azimut avec une grande exactitude, quelque soit la hauteur de l'astre : on y rapportera le côté de la chaîne des triangles dont l'azimut est cherché.

Pour placer l'instrument dans le plan de deux objets, dont l'un est très-élevé.

1). On placera la lunette supérieure sur zéro, et de manière qu'elle soit parallèle au petit axe de mouvement, celui qui est ordinairement horizontal, et sur lequel est fixé le petit quart de cercle ; une vis du pied doit se trouver perpendiculairement sous la lunette (à peu-près).

2). On dirigera cette lunette sur l'objet le moins élevé, de manière que le petit axe soit aussi dirigé sur

cet objet: alors cet axe de rotation se trouve dans le plan de deux objets.

3). Quand il faut hausser ou baisser la lunette pour voir l'objet, on doit faire ces mouvemens par la vis du pied, qui se trouve au-dessous de la lunette. Il faudra de même déplacer un peu le trepied avec tout l'instrument, si l'objet ne se trouve pas dans la lunette; on arrêtera après la colonne verticale sur le plateau du pied, afin que l'axe conserve la position, qu'on vient de lui donner.

4). Il ne s'agit plus que d'incliner le plan du cercle de manière qu'en faisant marcher la lunette inférieure elle passe par le second objet, ce qu'on obtient très-facilement : on se contente de bornoyer au commencement le long de la lunette, et on achève avec la vis sans fin lorsque l'objet est déjà dans le champ.

5). Pour l'azimut avec la polaire, le signal étant toujours à peu-près horizontal, le cercle doit être incliné de 45°, ou de l'angle = hauteur du pole.

6). Les vis du pied (leur partie utile) est à peu-près $\frac{1}{6}$ du rayon, par conséquent on peut incliner le plateau horizontal de 9° à 10°, et on pourroit diriger le petit axe sur l'objet le moins élevé, quand même il le seroit de 9°.

7). Dans les observations d'azimut du soleil on dirige l'axe sur l'objet terrestre, et on suit le soleil en baissant le plan du cercle par la vis sans fin du petit quart de

cercle, et en faisant marcher la lunette en même temps : on voit que l'étoile polaire est plus commode.

8). Dans la pratique l'objet se ramène toujours par les vis du pied, l'astre par la vis sans fin du quart de cercle; il est vrai que cette vis n'existoit pas dans les anciens cercles. Néanmoins la polaire pouvoit s'observer de cette manière, sa hauteur changeant peu, et la correction qui en résulte pouvant s'obtenir par les vis du pied.

9). Quand les deux objets sont si élevés que les vis du pied n'en peuvent atteindre aucun, alors on estimera le point où le plan passant par les deux objets coupe l'horizon, et on dirigera l'axe transversal sur ce point. Comme on peut hausser ou baisser cet axe par les vis du pied, on obtiendra bientôt que le plan du cercle passe par les deux objets.

COUP D'ŒIL

Sur l'état présent de l'Anatomie et de la Physiologie végétales,

Par M. Mirbel.

Lu à la séance publique le 2 janvier 1810.

Avant d'exposer l'état actuel d'une science, il faut porter ses regards en arrière, et considérer quels furent son origine, sa marche, ses écarts et ses progrès.

Les monumens littéraires de l'antiquité prouvent que Théophraste est le premier qui ait parlé du règne végétal en philosophe et en naturaliste. L'étude des plantes, dit-il, embrasse leurs formes extérieures, leur organisation interne, et les phénomènes de leur végétation. Sans doute il est impossible d'indiquer avec plus de justesse le but qu'on doit se proposer dans cette étude; mais Théophraste manquoit de faits pour appuyer sa doctrine, et le génie ne put suppléer à l'observation.

Après Théophraste, on négligea l'anatomie végétale, et, pendant une longue suite de siècles, on n'examina que les formes extérieures, c'est-à-dire, que les caractères qui servent de base à la botanique proprement dite.

Enfin, dans le cours du dix-septième siècle, période mémorable durant laquelle l'Europe atteignit à tous les

genres de gloire, deux observateurs, l'un en Italie, l'autre en Angleterre, ne se connoissant pas même de réputation, conçurent et exécutèrent le dessein d'étudier, à l'aide du microscope nouvellement inventé, les organes intérieurs des plantes et les phénomènes les plus cachés de la vie végétale. Malpighi et Grew (ce sont eux dont je parle) publièrent en même temps leurs immortels travaux; et l'on fut surpris de voir paroître à la fois, deux ouvrages si profonds, sur une matière négligée, ou pour mieux dire, inconnue jusqu'alors. Mais ce qu'on n'aperçut pas d'abord, c'est que Malpighi et Grew, étrangers à l'étude de la botanique, et trop préoccupés des phénomènes de l'organisation animale, à l'exemple de Théophraste, transportent souvent dans la physiologie végétale, des opinions qui ne sont applicables qu'aux animaux, et attribuent aux plantes une organisation beaucoup plus compliquée qu'elle ne l'est réellement. Cette fausse manière de voir exerça, dans le siècle suivant, une influence pernicieuse sur les idées des observateurs; car les erreurs du génie sont des chaînes qui arrêtent l'essor de l'esprit humain.

La réputation, si bien méritée de Hales, de Charles Bonnet et de Duhamel, ne me permet pas de les confondre dans la foule, et cependant je remarquerai que ces savans, tout entiers à leurs belles expériences de physique végétale, n'avancèrent point l'anatomie.

Théophraste vouloit que l'on comparât les diverses espèces de plantes sous les trois points de vue de la botanique, de l'anatomie et de la physiologie; mais il

falloit pour qu'on pût entreprendre ce grand travail avec espoir de succès, que les Tournefort, les Linné, les Adanson, les Jussieu et tant d'autres excellens esprits qui travaillèrent à perfectionner la botanique, eussent classé les espèces selon des principes dont la clarté et l'évidence ne laissent presque rien à desirer; cet objet rempli, il restoit à prouver que Théophraste ne s'étoit pas abusé, et qu'en effet il étoit possible de trouver, dans l'organisation interne des plantes et dans les phénomènes de la végétation, des caractères propres à distinguer les différens groupes du règne végétal. Cette preuve ne tarda pas. Un naturaliste (1), membre de cette classe, de retour d'un voyage en Afrique, où il avoit observé à loisir le palmier-dattier, si différent des arbres de nos climats, fit un heureux essai de la doctrine du Philosophe grec, et ouvrit une carrière nouvelle dans une science qui, grâces aux travaux de tant d'hommes illustres, sembloit ne devoir offrir désormais que l'application facile des principes qu'ils avoient découverts. Les détails dans lesquels je vais entrer, relativement à ce travail, sont une introduction nécessaire pour l'intelligence des faits que je dois exposer bientôt.

On sait qu'un gland de chêne, qu'une graine de haricot produisent, en germant, deux feuilles courtes, épaisses, opposées. On sait encore que la graine de l'oignon, de la jacinthe, du palmier donne naissance à une seule feuille alongée et cylindrique. Delà deux

---

(1) M. Desfontaines, auteur de *la Flore du Mont-Atlas*.

grandes classes de végétaux; les uns à deux feuilles séminales ou *dicotylédons*; les autres à une feuille séminale ou *monocotylédons*.

Les dicotylédons sont ordinairement branchus; leurs feuilles sont presque toujours relevées de nervures divergentes et rétrécies à leur partie inférieure.

Les monocotylédons sont souvent dépourvus de rameaux, et dans la plupart des espèces, les feuilles, marquées de nervures fines et parallèles, embrassent la tige par leur base élargie.

Voilà ce que les botanistes avoient remarqué; mais ces différences étoient légères, eu égard à celles que devoit offrir la comparaison des organes intérieurs.

Si l'on examine la tranche horizontale du tronc d'un de nos arbres forestiers, on voit au centre un tissu lâche auquel on a donné le nom de moëlle; à la circonférence, une écorce épaisse; dans la partie intermédiaire, des couches de bois qui forment des zônes concentriques, et du centre à la circonférence, des rayons médullaires semblables aux lignes horaires d'un cadran. Mais si l'on examine la coupe horizontale d'un dattier, ou de tout autre végétal, à une seule feuille séminale, on reconnoît que la moëlle forme la majeure partie de la tige; que le bois est composé de longs filets disséminés dans le tissu médullaire, et qu'il n'y a point de rayons prolongés du centre à la circonférence; enfin, si l'on considère dans leur développement les végétaux à couches concentriques et ceux à filets longitudinaux, on reconnoît que les premiers s'élèvent par la formation de nouvelles

couches produites à la circonférence, et les seconds par la multiplication et l'alongement des filets du centre.

Voici donc l'anatomie et la physiologie qui confirment pleinement la distinction que les botanistes ont établie entre les plantes à une feuille et à deux feuilles séminales. La belle série d'observations sur laquelle repose cette découverte, est la première application que l'on ait faite de la doctrine de Théophraste, et peut-être la plus heureuse que l'on fera jamais.

Qu'il me soit permis maintenant d'exposer en peu de mots les principaux phénomènes dont l'examen a été l'objet particulier de mes études (1). Ce que je vais dire se lie naturellement à ce qui précède.

Ce seroit une grande erreur de croire avec quelques physiciens du dernier siécle, gens plus inclins à imaginer des systêmes, qu'attentifs à observer la Nature, que les plantes ont un cœur, des artères, des veines, des fibres, des muscles; en un mot, qu'il ne leur manque que l'organe du sentiment pour ressembler à des animaux d'une organisation très-compliquée. Les plantes sont toutes entières formées d'un tissu membraneux, composé d'une multitude innombrable de cellules qu'on seroit tenté de prendre pour de petites vessies collées les unes aux autres. Quelques cellules cependant sont façonnées en tubes déliés, et parcourent le végétal dans sa longueur. Les fluides s'élèvent dans ces espèces de vaisseaux, et leur marche à travers le tissu, est facilitée par

---

(1) Voyez *Théorie de l'organisation végétale.* (Paris 1809).

les ouvertures et les fentes nombreuses dont les tubes et les cellules sont souvent criblés. Il y a même des tubes qui sont découpés circulairement, de manière à présenter, dans leur ensemble, un fil roulé en tire-boure. Malpighi les considéroit comme les poumons des plantes, parce qu'ils ont quelque ressemblance avec les organes de la respiration dans les insectes; mais de nombreuses observations m'ont prouvé que ce sont les principaux canaux du suc séveux dont le végétal puise les élémens dans la terre et dans l'air.

Les cellules du tissu des feuilles s'allongent extérieurement en petits tuyaux qui donnent, à l'épiderme de certaines plantes, l'apparence d'une étoffe de laine ou de soie. Ces cellules allongées sont les suçoirs dont la Nature a pourvu les végétaux.

Une partie de la sève se dissipe par la transpiration insensible; une autre va former les huiles et les résines qui remplissent de grandes cavités pratiquées dans le tissu cellulaire de la moëlle et de l'écorce; une troisième produit la liqueur mucilagineuse, le *chyle végétal* qui nourrit et développe le tissu de la plante.

Mais quelle force attire, dans les vaisseaux, les fluides de la terre et de l'air? Un arbre mort ne paroît pas différer par son organisation, d'un arbre plein de vie, et toutefois, ce seroit en vain qu'on plongeroit ses racines dans l'eau, le fluide ne s'élèveroit point dans le tissu au-dessus de son propre niveau. Les végétaux vivans jouissent donc d'une force qui est inhérente à la nature de leurs organes; et jusqu'à ce jour nous n'avons fait que d'infructueuses

tentatives pour expliquer les phénomènes de leur végétation par les lois ordinaires de la physique.

Où réside cette force dont nous connoissons quelques effets, quoique son principe nous soit tout-à-fait inconnu? Seroit-ce essentiellement dans la racine? Non, car une branche privée de racine et mise dans la terre ne tarde pas à se développer. Seroit-ce dans la moëlle? Nullement, car je puis enlever la moëlle d'un arbre sans que sa végétation s'arrête. Seroit-ce dans le bois? Je ne le saurois croire, car le bois est une partie endurcie qui jouit tout au plus d'une vie passive. Seroit-ce enfin dans l'écorce? Je n'en puis douter; car si je plante une branche dépouillée de son écorce, elle se dessèche et meurt.

On conçoit néanmoins que la force vitale (c'est ainsi que nous désignons cette force incompréhensible), ne réside pas dans la partie extérieure des vieilles écorces, qui est rude et desséchée, mais seulement dans cette partie interne, fraîche et molle, à laquelle on a donné le nom de *liber*. Les boutons, les feuilles, les jeunes branches, les jeunes racines, sont des expansions du liber. Ils communiquent avec le centre du végétal par les vaisseaux de la moëlle, et, comme des pompes aspirantes, ils élèvent dans les longs canaux du bois, les fluides et les gaz enlevés à la terre et à l'atmosphère. Cette succion, qui a lieu pendant que la douceur de la température entretient la force vitale, répare sans cesse les pertes abondantes occasionnées par la transpiration.

Le liber est donc l'organe essentiel des développemens; et nous allons voir par quel artifice la Nature

prolonge la vie des espèces ligneuses, et comment se peuvent concilier avec les lois de la végétation, l'énorme accroissement et la longue durée de certains arbres dont la naissance paroît être antérieure à tous les monumens historiques.

Vers l'arrière saison, une plante annuelle sèche sur pied et périt. A cette même époque, un arbre se dépouille de son feuillage, mais il reverdit l'année suivante et reproduit des feuilles, des fleurs et des fruits. La cause de ce phénomène est dans l'existence du liber. Cette portion interne de l'écorce, abreuvée par la sève et transformée en bois pendant la belle saison, est remplacée bientôt par un nouveau liber, humide et souple comme une herbe dans sa première croissance. Le nouveau liber, caché sous la partie la plus extérieure de l'écorce qui le met à l'abri des rigueurs de l'hiver, n'attend que la douce influence du printems pour couronner l'arbre de sa parure annuelle. Chaque liber est donc tout-à-fait comparable à l'herbe qui naît, se développe, fructifie et meurt dans l'espace de quelques mois; aussi, peut-on dire que le tronc de l'arbre est formé par une succession d'herbes qui se recouvrent les unes les autres, et que les couches du bois marquent la suite des générations qui ont brillé tour à tour, et sont allées grossir le squelette du végétal.

Puisque telles sont les lois de la végétation, bien loin d'être surpris de la longue durée de l'arbre, on s'étonnera peut-être qu'il soit soumis à la mort. Mais, sans parler des maladies accidentelles qui souvent abrègent sa

vie, l'engorgement des vaisseaux, occasionné par la nutrition, en marque le terme inévitable. En effet, lorsqu'après un temps prolongé plus ou moins, selon la nature du végétal et les circonstances où il se trouve, les conduits séveux du bois viennent enfin à s'obstruer, la sève, arrêtée dans son cours, cesse de se porter vers l'écorce, le liber ne se régénère plus, et l'arbre meurt d'inanition.

L'épanouissement des boutons est le premier indice de la végétation nouvelle. Les boutons s'alongent et se transforment en rameaux chargés de feuilles.

Les feuilles sont quelquefois opposées deux à deux. C'est ainsi qu'elles se montrent dans l'hortensia. D'autres fois elles sont isolées et placées de distance en distance, comme on le remarque dans la giroflée. D'où provient cette différence? Comment se fait-il qu'ici les feuilles soient en quelque sorte jetées au hazard, tandis que là elles sont constamment opposées? L'anatomie des tiges fournit une réponse à cette question. Les feuilles isolées, ou placées de distance en distance, n'ont aucun lien commun; mais il n'en est pas de même des feuilles opposées: elles ont à leur base une bride interne qui les unit l'une à l'autre, et fait que leur développement, quelle que soit la marche de la végétation, ne sauroit être que simultané.

Cette bride, foible d'abord, se fortifie en vieillissant; elle presse les vaisseaux de la tige, elle suspend l'écoulement du fluide nourricier; elle occasionne des renflemens, des *nodus* comparables à ceux que nous pouvons

faire naître sur le tronc d'un arbre en le serrant avec un lien.

Le pétiole, que l'on nomme communément la queue de la feuille, cache sous son épiderme, des filets longitudinaux disposés avec un tel art dans la plupart des plantes, qu'ils se maintiennent tous mutuellement comme des arcs-boutans et des cordes tendues, et donnent au pétiole une direction fixe, malgré sa foiblesse apparente. Mais quand la Nature veut produire la feuille mobile du tremble ou du peuplier, elle place les filets du petiole de manière qu'aucun n'oppose de résistance à la flexion des autres, et la feuille pendante est agitée par le plus léger souffle de l'air.

La fleur est le chef-d'œuvre de la végétation. Elle renferme les organes reproducteurs.

L'anthère, sachet membraneux dans lequel est contenu la poussière fécondante, offre, dessous l'épiderme dont il est recouvert, un tissu dont les membranes coupées en petites lanières se dilatent et se contractent suivant qu'elles sont plus ou moins humides. De là vient que l'anthère s'ouvre par un mouvement élastique et lance avec force la poussière fécondante.

L'ovaire recelle les jeunes embryons. Un savant Portugais, M. Corréa, que l'Institut compte parmi ses correspondans les plus distingués, observa il y a quelques années, les conduits déliés par lesquels s'opère le développement du fruit et la fécondation de la graine; et tandis que cet excellent observateur communiquoit à la Société Linnéenne de Londres l'exposé de ses décou-

vertes, dans l'ignorance où j'étois des son travail, je poursuivois les mêmes recherches et j'arrivois aux mêmes résultats (1).

Des filets vasculaires passent de la plante-mère dans chaque graine et portent aux embryons la nourriture nécessaire à leur développement. D'autres filets vasculaires s'élèvent des graines jusqu'à l'extrémité du stig-

---

(1) Dans mon *Traité d'Anatomie et de Physiologie végétales*, publié en 1801, on lit le passage suivant :

« On observe dans les ovaires, le tissu cellulaire et le tissu tubulaire. Leur » distribution varie autant qu'il y a d'espèces. Voici cependant un fait invariable : un ou plusieurs faisceaux de tubes, partis du pédoncule, vont » former le placenta ; ils se prolongent ensuite au-dehors, et produisent les » styles et les stigmates ; les filets qu'ils jettent dans la cavité intérieure » servent de cordons ombilicaux aux ovules. Lorsqu'il y a plusieurs placentas, » il est rare qu'il n'y ait pas plusieurs styles formés par les différens faisceaux » qui se prolongent en divergeant, et lorsque l'exception a lieu, c'est-à-dire, » lorsqu'il n'y a qu'un style, bien qu'on trouve dans l'ovaire plusieurs placentas, on voit par l'anatomie que les différens faisceaux se réunissent en » un seul avant de sortir de l'ovaire. Ces tubes communiquent par leur base » avec les tubes du pédoncule floral, et forment les stigmates à leur extrémité » supérieure. »

C'étoit ainsi que je m'exprimois en 1801. Depuis, j'ai vu mon opinion confirmée par celle de M. Corréa. Ce savant a fait imprimer la note suivante en 1805, dans *les Annales du Muséum*, tome VI, page 378.

« Dans tout fruit proprement dit, l'on trouve un faisceau longitudinal de » fibres et de vaisseaux que l'on peut suivre depuis l'insertion du fruit dans » le réceptacle jusqu'au stigmate ; les graines sont attachées à ce faisceau ; » c'est de lui qu'elles proviennent, et c'est par cette voie qu'elles sont probablement fécondées. Cet organe intéressant, jusqu'à présent négligé par les » botanistes, je l'appelle *cordon pistillaire*. Il y a environ six ans que j'en » donnai connoissance à mes confrères de la société Linnéenne de Londres, et » je me propose d'en publier incessamment les détails. »

mate, organe femelle sur lequel les mâles versent la poussière fécondante.

Mais cette liqueur onctueuse et volatile que contient chaque grain de poussière, cet *aura vitalis*, ce *souffle vital*, pour parler la langue des botanistes, pénètre-t-il à travers le stigmate? parcoure-t-il les conduits déliés qui vont se rendre dans la graine? arrive-t-il enfin jusqu'au fœtus? Sur ce point l'expérience et l'observation sont muettes: l'extrémité des filets vasculaires se perd dans un tissu d'une finesse extrême, et l'épiderme du stigmate ne laisse apercevoir aucune ouverture. Ainsi, dans les plantes, de même que dans les animaux, la Nature a caché le mystère de la fécondation sous un voile que la main de l'homme ne peut soulever.

Peu de temps avant la fécondation, l'organe femelle de certaines plantes laisse écouler une liqueur odorante et visqueuse, et lorsque la fécondation est opérée, l'écoulement s'arrête; mais ce n'est pas, comme pensoit Linnæus, parce que la liqueur est un des principes fécondans, c'est parce qu'elle va nourrir le fruit, et cesse de se répandre en pure perte dès que l'embryon a reçu l'impulsion vitale (1).

L'embryon est une plante en miniature. On y aperçoit une racine et une ou deux feuilles séminales. Lorsqu'il ne paroît qu'une feuille, c'est parce qu'elle forme une gaîne dans laquelle sont renfermées les autres; et dès-

---

(1) Consultez le Mémoire sur l'*organisation de la fleur*, imprimé dans les Mémoires de l'Institut, premier semestre de 1808.

lors on est assuré que la plante aura des feuilles engaînantes, et que la tige sera formée de filets longitudinaux disséminés dans la moëlle.

Lorsque, au contraire, l'embryon présente deux ou plusieurs feuilles séminales, il devient très-probable que les autres feuilles ne seront pas engaînantes, et il est certain que la tige offrira des couches concentriques et un canal médullaire.

Nous voici donc revenus au point d'où nous sommes partis, après avoir parcouru rapidement plusieurs des phénomènes les plus importans de l'économie végétale.

On peut juger, d'après cet aperçu, qu'aujourd'hui l'objet principal du physiologiste doit être de découvrir les rapports des formes extérieures avec l'organisation interne, et d'étendre, s'il se peut, le système d'anatomie comparée des végétaux. Ces recherches, qui intéressent à la fois la physique générale, la botanique et l'agriculture, sont très-longues et très-pénibles : l'extrême petitesse des objets y apporte de grandes difficultés; mais le microscope nous découvre les merveilles de ce monde inconnu, et ce n'est pas sans admiration que nous retrouvons dans les moindres parcelles des plantes, l'empreinte de cette sagesse infinie qui préside à l'arrangement de l'Univers.

SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE

Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres.

Par M. Laplace.

J'ai fait voir dans l'article VI de ce Mémoire, que si l'on suppose dans chaque observation, les erreurs positives et négatives également faciles; la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre n d'observations sera comprise dans les limites $\pm \frac{rh}{n}$, est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{k}{2k'} \cdot r^2}$$

h est l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre. Si l'on désigne ensuite par $\varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ la probabilité de l'erreur $\pm x$, k est l'intégrale $\int dx \cdot \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ étendue depuis $x = -\frac{1}{2}h$, jusqu'à $x = \frac{1}{2}h$; k' est l'intégrale $\int \frac{x^2}{h^2} \cdot dx \cdot \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$, prise dans le même intervalle: π est la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et c est le nombre dont le logarythme hyperbolique est l'unité.

Supposons maintenant qu'un même élément soit donné par n observations d'une première espèce, dans laquelle

la loi de facilité des erreurs soit la même pour chaque observation; et qu'il soit trouvé égal à A par un milieu entre toutes ces observations. Supposons ensuite qu'il soit trouvé égal à $A+q$, par n' observations d'une seconde espèce, dans laquelle la loi de facilité des erreurs ne soit pas la même que dans la première espèce; qu'il soit trouvé égal à $A+q'$ par n'' observations d'une troisième espèce, et ainsi de suite; on demande le milieu qu'il faut choisir entre ces divers résultats.

Si l'on suppose que $A+x$ soit le résultat vrai; l'erreur du résultat moyen des observations n, sera $-x$, et la probabilité de cette erreur sera, par ce qui précède,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \cdot \frac{dr}{dx} \cdot c^{-\frac{k}{2k'}r^2}$$

on a ici,

$$x = \frac{rh}{\sqrt{n}},$$

ce qui transforme la fonction précédente dans celle-ci,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a.\sqrt{n} \cdot c^{-na^2x^2}$$

a étant égal à $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}}$.

L'erreur du résultat moyen des observations n', est $\pm(q-x)$, le signe $+$ ayant lieu, si q surpasse x, et le signe $-$, s'il en est surpassé. La probabilité de cette erreur est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a' \cdot \sqrt{n'} \cdot c^{-n'a'^2 \cdot (q-x)^2}.$$

a' exprimant par rapport à ces observations, ce que a exprime relativement aux observations n.

Pareillement l'erreur du résultat moyen des observations n'' est $\pm (q' - x)$, et la probabilité de cette erreur est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a'' . \sqrt{n''} . c^{-n'' a''^2 . (q' - x)^2}$$

a'' étant ce que devient a relativement à ces observations; et ainsi du reste.

Maintenant, si l'on désigne généralement par $\Psi(-x)$, $\Psi'(q-x)$, $\Psi''(q'-x)$, etc. ces diverses probabilités; la probabilité que l'erreur du premier résultat sera $-x$, et que les autres résultats s'écarteront du premier, respectivement de q, q', etc., sera par la théorie des probabilités, égale au produit $\Psi(-x) . \Psi' . (q-x) . \Psi'' . (q'-x)$, etc.; donc si l'on construit une courbe dont l'ordonnée y soit égale à ce produit, les ordonnées de cette courbe seront proportionnelles aux probabilités des abscisses, et par cette raison nous la nommerons *courbe des probabilités*.

Pour déterminer le point de l'axe des abscisses où l'on doit fixer le milieu entre les résultats des observations n, n', n'', etc.; nous observerons que ce point est celui où l'écart de la vérité, que l'on peut craindre, est un *minimum;* or de même que dans la théorie des probabilités, on évalue la perte à craindre, en multipliant chaque perte que l'on peut éprouver, par sa probabilité, et en faisant une somme de tous ces produits; de même on aura la valeur de l'écart à craindre, en multipliant

chaque écart de la vérité, ou chaque erreur abstraction faite du signe, par sa probabilité, et en faisant une somme de tous ces produits. Soit donc l la distance du point qu'il faut choisir, à l'origine de la courbe des probabilités, et z l'abscisse correspondante à y, et comptée de la même origine; le produit de chaque erreur par sa probabilité, abstraction faite du signe, sera $(l-z).y$, depuis $z=0$, jusqu'à $z=l$, et ce produit sera $(z-l).y$, depuis $z=l$, jusqu'à l'extrémité de la courbe; on aura donc

$$\int(l-z).y\,dz+\int(z-l).y\,dz$$

pour la somme de tous ces produits, la première intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à $z=l$, et la seconde étant prise depuis $z=l$ jusqu'à la dernière valeur de z. En différenciant la somme précédente par rapport à l, il est facile de s'assurer que l'on aura

$$dl.\int y\,dz-dl.\int y\,dz$$

pour cette différencielle, qui doit être nulle dans le cas du *minimum*; on a donc alors

$$\int y\,dz=\int y\,dz;$$

c'est-à-dire que l'aire de la courbe, comprise depuis z nul jusqu'à l'abscisse qu'il faut choisir, est égale à l'aire comprise depuis z égal à cette abscisse, jusqu'à la dernière valeur de z; l'ordonnée correspondante à l'abscisse qu'il faut choisir, divise donc l'aire de la courbe des pro-

babilités, en deux parties égales. (*Voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1778, page 324).

Daniel Bernouilli, ensuite Euler et M. Gauss, ont pris pour cette ordonnée, la plus grande de toutes. Leur résultat coincide avec le précédent, lorsque cette plus grande ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales, ce qui, comme on va le voir, a lieu dans la question présente; mais dans le cas général, il me paroît que la manière dont je viens d'envisager la chose, résulte de la théorie même des probabilités.

Dans le cas présent on a, en faisant $x = X + z$,

$$y = p.p'.p''. \text{etc. } c^{-p^2\pi.(X+z)^2 - p'^2.\pi.(q-X-z)^2 - p''^2.\pi.(q'-X-z)^2 - \text{etc.}}$$

p étant égal à $\frac{a.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$, et par conséquent, exprimant la plus grande probabilité du résultat donné par les observations n; p' exprime pareillement la plus grande ordonnée relative aux observations n', et ainsi du reste. r pouvant sans erreur sensible, s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, comme on l'a vu dans l'article VII du Mémoire cité; on peut prendre z dans les mêmes limites, et alors si l'on choisit X de manière que la première puissance de z disparoisse de l'exposant de c; l'ordonnée y correspondante à z nul, divisera l'aire de la courbe en deux parties égales, et sera en même temps la plus grande ordonnée. En effet, on a dans ce cas

$$X = \frac{p'^2.q + p''^2.q' + \text{etc.}}{p^2 + p'^2 + p''^2 + \text{etc.}};$$

et alors y prend cette forme

$$y = p \cdot p' \cdot p'' \cdot \text{etc. } c^{-M - N \cdot z^2}$$

d'où il suit que l'ordonnée qui répond à z nul est la plus grande, et divise l'aire entiere de la courbe, en parties égales. Ainsi $A + X$ est le résultat moyen qu'il faut prendre entre les résultats A, $A + q$, $A + q'$, etc. La valeur précédente de X est celle qui rend un *minimum*, la fonction

$$(p \cdot X)^2 + (p' \cdot \overline{q - X})^2 + (p'' \cdot \overline{q' - X})^2 + \text{etc.};$$

c'est-à-dire la somme des carrés des erreurs de chaque résultat, multipliées respectivement par la plus grande ordonnée de la courbe de facilité de ses erreurs. Ainsi cette propriété qui n'est qu'hypothétique, lorsque l'on ne considère que des résultats donnés par une seule observation ou par un petit nombre d'observations, devient nécessaire, lorsque les résultats entre lesquels on doit prendre un milieu, sont donnés chacun par un très-grand nombre d'observations, quelles que soient d'ailleurs les lois de facilité des erreurs de ces observations. C'est une raison pour l'employer dans tous les cas.

On aura la probabilité que l'erreur du résultat $A + X$ sera comprise dans les limites $\pm Z$, en prenant dans ces limites l'intégrale $\int dz\, c^{-Nz^2}$, et en la divisant par la même intégrale prise depuis $z = -\infty$, jusqu'à $z = \infty$.

Cette dernière intégrale est $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{N}}$; en faisant donc $z\sqrt{N} = t$, et $Z\sqrt{N} = T$; la probabilité que l'erreur du résultat choisi $A + X$ sera comprise dans les limites $\pm\frac{T}{\sqrt{N}}$, sera

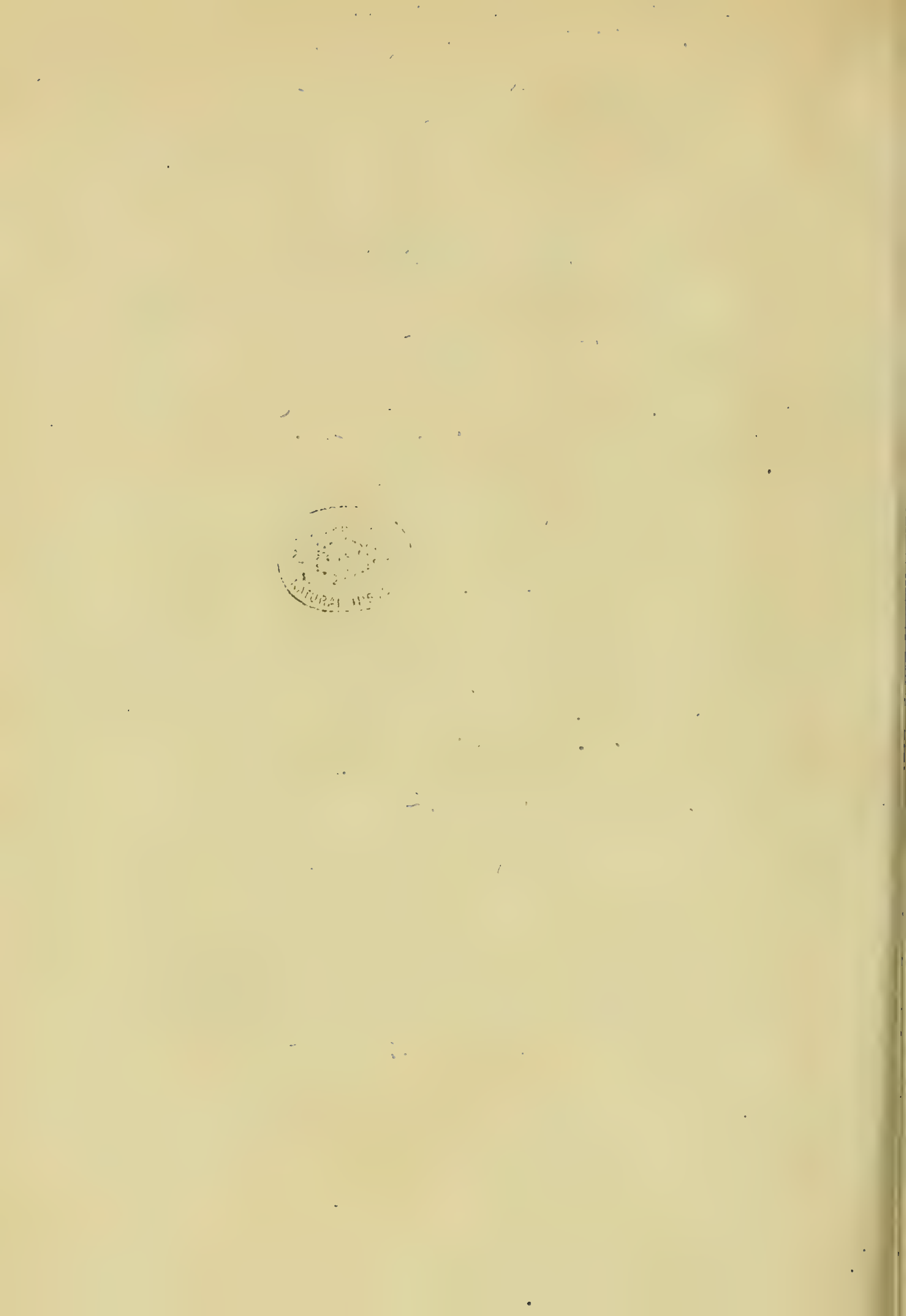
$$\frac{2.\int dt.\, c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$$

l'intégrale étant prise depuis t nul, jusqu'à $t = T$. La valeur de N est, par ce qui précède,

$$\pi.\,(p^2 + p'^2 + p''^2 + \text{etc.}).$$

FIN DU VOLUME DE 1809.





Dr Hay,

If you have not seen Andrew Clark would you please ring 259.

[illegible]